Université Ahmed Zabana-Relizane

Fiche TD 1- Calcul diff-master 1 -2021/2022

$1^{ère}$ année master-LMD-Maths

Exercice 1:

1) Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ est un C^1-difféomorphisme

2) Montrer que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(x, y) = (y + f(x), x + f(y))$ est un C^1-difféomorphisme

Exercice 2:

Soit $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ un espace de Banach

et $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ une application de classe C^1, tel que $\exists k > 0$ avec $\|f(y) - f(x)\| \geq k \|y - x\|$.

1. Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{X})$ est fermée dans $\mathbb{X}$.
2. Montrer que f est surjective.
3. Est ce que f est C^1-difféomorphisme.

Exercice 3:

Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R})$. Montrer que si $\forall x, y \in \mathbb{R}, f'(x) \neq g'(y)$,

alors l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \to (x + y, f(x) + g(y))$

est un diffeomorphisme sur son image.

Exercice 4:

Soit f $[a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$.

S'il existe $M \geq 0$ telle que $|f'(x)| \leq M$, pour tout $x \in [a, b]$.

Montrer que $|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$ pour tout $x, y \in [a, b]$.

Exercice 5:

Soient E et F deux des espaces vectoriels normés, U ouvert convexe de E.

Soit $f : U \to F$ une application différentiable,

on suppose qu'il existe $K > 0$ telque $\|Df(x)\| \leq K$ pour tout $x \in U$.

Montrer que f est $K-$lipschitzienne.

Corréction

Exercice 1:

1) Montrons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ est un C^1-difféomorphisme

On a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ est classe C^1

et bijective car $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$

et $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x = 2(y-2) \in \mathbb{R} / f(x) = y$

et l'inverse de cette application définie par $f^{-1}(x) = 2(x-2)$

est classe C^1 alors f est un C^1-difféomorphisme

2) Montrons que $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, g(x,y) = (y + f(x), x + f(y))$ est un C^1-difféomorphisme

on a $g(x,y) = \left(y + \frac{1}{2}x + 2, x + \frac{1}{2}y + 2\right)$

on a les dérivées partielles est continues donc l'application g est classe C^1.

et g est bijective car

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \exists! (x,y) = \left(\frac{4}{3}(2a - b - 2), \frac{4}{3}(2b - a - 2)\right)$ tel que $g(x,y) = (a,b)$.

et la matrice jacobienne de g, $\mathrm{J}_g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

et déterminant de cette matrice $\det(J_g(x,y)) = -\frac{3}{4} \neq 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

finalement g est un C^1-difféomorphisme

Exercice 2:

Soit $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}^*$ un espace de Banach

et $f : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ une application de classe C^1, tel que $\exists k > 0$ avec $\|f(y) - f(x)\| \geq k \|y - x\|$.

1. Montrons que f est injective

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (f(y) = f(x)) &\Longrightarrow f(y) - f(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \|f(y) - f(x)\| = 0 \\ &\Longrightarrow 0 = \|f(y) - f(x)\| \geq k \|y - x\| \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

Montrons que $f(\mathbb{X})$ est fermée dans $\mathbb{X}$

$\forall f(x_n) \in f(\mathbb{X})$ et $f(x_n) \to b$

donc est une suite de cauchy

on a $\|f(x_n) - f(x_m)\| \geq k \|x_n - x_m\|$

ce qui nous donne $(x_n)_n$ est une suite de cauchy

alors $(x_n)_n$ et converge c'est à dir $x_n \to a$

et f est continue donc $f(x_n) \to f(a)$ et $f(x_n) \to b$

c'est à dire $b = f(a)$ car la limite si elle existe, est unique.

ce qui montre $f(\mathbb{X})$ est fermée dans $\mathbb{X}$

2. Montrons que f est surjective.

f est surjective sur son image.

on a $f : \mathbb{X} \to f(\mathbb{X})$ est bijective

3. Est ce que f est C^1-difféomorphisme.

on a $\|f(y) - f(x)\| \geq k \|y - x\|$

si $y \neq x$ on trouve $\left\| \frac{f(y)-f(x)}{\|y-x\|} \right\| \geq k.$

on suppose il existe $h \in \mathbb{X}$, tel que $Df(x)(h) = 0$

alors $\left\| \frac{f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)}{\|h\|} \right\| \geq k.$

c'est à dire $\frac{o(h)}{\|h\|} \geq k > 0$

est une contradiction.

finalement f est un C^1-difféomorphisme.

Exercice 3:

Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R})$. Montrons que si $\forall x, y \in \mathbb{R}, f'(x) \neq g'(y)$,

on a l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \to (x + y, f(x) + g(y))$

est un diffeomorphisme sur son image.

on a $F : \mathbb{R}^2 \to F\left(\mathbb{R}^2\right)$ est de classe C^1 car $f, g \in C^1(\mathbb{R})$

et $F : \mathbb{R}^2 \to F\left(\mathbb{R}^2\right)$ est surjective

on motre F est injective

on a $F(x, y) = F(x', y')$

donc $(x + y, f(x) + g(y)) = (x' + y', f(x') + g(y')$

alors $x = x'$et $y = y'$.

Sa matrice jacobienne est $\mathrm{J}_F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ f'(x) & g'(y) \end{pmatrix}$

et $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ f'(x) & g'(y) \end{pmatrix} = g'(y) - f'(x) \neq 0.$

alors est un diffeomorphisme sur son image.

Exercice 4:

Soit $f\ [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a,b[$.

S'il existe $M \geq 0$ telle que $|f'(x)| \leq M$, pour tout $x \in [a,b]$.

Montrons que $|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$ pour tout $x, y \in [a,b]$.

pour tout $x, y \in [a,b]$ on a $f\ [x,y] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]x,y[\subset\ ]a,b[$.

Si $y > x$ d'après le théorème des accroissements finis il existe c$\in]x,y[$

tel que $(f(y) - f(x)) = f'(c)\,(y-x)$

donc $|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$

Si $x = y$ (Clair)

Exercice 5:

Soient E et F deux des espaces vectoriels normés, U ouvert convexe de E.

Soit $f : U \to F$ une application différentiable,

on suppose qu'il existe $K > 0$ telque $\|Df(x)\| \leq K$ pour tout $x \in U$.

Montros que f est $K-$lipschitzienne.

pour tout $x, y \in U$ on a $[x,y] \subset U$ car U est un convexe de E.

et $\|Df(z)\| \leq K$, pour tout $z \in [x,y]$ car $\|Df(x)\| \leq K$ pour tout $x \in U$.

d'après l'inégalité des accroissements finis

on trouve$\|f(y) - f(x)\| \leq K\,\|y-x\|$.