Correction Fiche TD N°0
(Rappel Mathematique)

Ex1:

Dans chaque cas, justifier que f est dérivable en précisant l'ensemble de dérivabilité puis calculer $f'(x)$

01) $f(x) = 2x^2 + 3x$

f est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boxed{f'(x) = 4x + 3}$

02) $f(x) \to 2\sqrt{x} + 4x$.

f est la somme d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 4}$.

03) $f(x) = x\sqrt{x}$

f est de la forme uv avec $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

u dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $u'(x) = 1$ alors

$f(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

$\boxed{f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}}$

04) $f(x) = x^3(x-\sqrt{x})$

f est de la forme uv avec $u(x) = x^3$ dérivable sur $\mathbb{R}$

et $v(x) = x - \sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

avec : $\left.\begin{array}{l} u'(x) = 3x^2 \\ v'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = 3x^2(x-\sqrt{x}) + x^3\left(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$$\boxed{f(x) = 3x^3 - \frac{7}{2}x^2\sqrt{x}}$$

05) $f(x) = -\dfrac{5}{x^2+1}$

f est de la forme $k \cdot \dfrac{1}{v}$ avec $k = 5$ et $v(x) = x^2+1$

dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulent pas avec $v'(x) = 2x$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = k \times \left(-\frac{v'(x)}{v(x)^2}\right) = -5 \times \left(-\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = \frac{10x}{(x^2+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{10x}{(x^2+1)^2}}$$

06) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x+1$ dérivable sur $\mathbb{R}$

avec $u'(x) = 2$ et $v(x) = x-3$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et s'annulant

en 3 avec $v'(x) = 1$ donc f est dérivable sur $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

et $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \dfrac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2}$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{7}{(x-3)^2}}$$

Définition : 1.1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur I.
On appelle primitive de f sur I toute fonction définie et dérivable sur I vérifiant

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Définition 2.1

On appelle intégrale indéfinie de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I qu'on note par $\int f(x)\,dx$, $x \in I$ l'ensemble des primitives de f sur I, si elles existent.
Si F est une primitive de f alors on écrit :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ex1: Montrez que $\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \frac{n}{m+n} x^{\frac{n+m}{n}} + C$

Sol: On pose $f_1(x) = \sqrt[n]{x^m}$ et $F_1(x) = \frac{n}{m+n} x^{\frac{n+m}{n}}$

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$F_1'(x) = \left(\frac{n}{m+n} x^{\frac{n+m}{n}}\right)'$$

$$= \frac{n}{m+n} \times \frac{n+m}{n} x^{\frac{n+m}{n} - 1}$$

$$= x^{\frac{n+m-n}{n}}$$

$$= x^{\frac{m}{n}}$$

$$= (x^m)^{1/n}$$

$$= \sqrt[n]{x^m} = f_1(x)$$

alors, d'après la définition (1.1) on déduit que F_1 est une primitive de f_1, Ainsi suivant la définition (1.2) de l'intégrale indéfinie, on obtient $\int f_1(x)\,dx = F_1(x)+C$

Ex2: Montrez que $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx = \frac{2}{5}(\sqrt{x})^5 + x + C$

on pose $f_2(x) = (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$

$F_2(x) = \frac{2}{5}(\sqrt{x})^5 + x.$

Sol:

$F_2'(x) = \left(\frac{2}{5}(\sqrt{x})^5 + x\right)'$

$= \left(\frac{2}{5}x^{5/2} + x\right)' = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}x^{5/2-1} + 1 = (x^{1/2})^3 + 1$

$= x^{3/2} + 1 = (\sqrt{x})^3 + 1$

$F_2'(x) = x\sqrt{x}+1$

et d'autre part $f_2(x) = (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)$

$= x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 1$

$f_2(x) = x\sqrt{x}+1$

alors F_2 est une primitive de f_2 et par suite $\int f_2(x)\,dx = F_2(x)+C$

3) Montrez que $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3}\,dx = C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|$

on pose $f_3(x) = \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3}$ et $F_3(x) = C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|$

Sol: $F_3'(x) = \left(-\frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|\right)' = \left(-\frac{2}{3}x^{-3/2} - e^x + \ln|x|\right)'$

$= \cancel{\left(-\frac{2}{3}\right)}\cdot\cancel{\left(-\frac{3}{2}\right)}x^{-\frac{3}{2}-1} - e^x + \frac{1}{x}$

$= x^{-\frac{5}{2}} - e^x + \frac{1}{x} = \frac{x^{-\frac{3}{2}} - xe^x + 1}{x}$

$= \frac{x^{1/2} - x^3 e^x + x^2}{x^3}$

$= \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} = f_3(x)$

alors F_3 est une primitive de f_3

donc $\int f_3(x)\,dx = F_3(x)+C$

Université Ahmed Zabana –Relizane
Faculté Science et Technologie
Département ST

Année Universitaire 2021/2022
LMD ST (1 semestre)
Travaux Dirigés Physique 1

Série TDN^{0}2 (les vecteurs)

Exercice1 :

On considère dans le repère orthonormé $\boldsymbol{Oxyz}$ les trois vecteurs :

$\overrightarrow{V_1} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$, $\overrightarrow{V_2} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$,$\overrightarrow{V_3} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$

1/ Calculer les modules de $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}$

2/ Calculer les composantes ainsi que les modules des vecteurs :

$\vec{A} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}$ et $\vec{B} = 2\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}$

3/ Déterminer le vecteur unitaire porté par $\vec{C} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_3}$ et déduire l'angle formé par les deux vecteurs

4/ Calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{V_1} * \overrightarrow{V_3}$ et $\overrightarrow{V_3} * \overrightarrow{V_1}$, que remarquer vous ? Puis déduire l'angle formé par les deux vecteurs

5/ Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}$

On considère un vecteur $\vec{Z} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, trouver les variables x, y , z pour que $\vec{A} + \vec{B} + \vec{Z} = \vec{0}$

Exercice2 :

Considérons un vecteur $\vec{A} = xz\vec{i} + (2x^2 - y)\vec{j} - yz^2\vec{k}$ et une fonction scalaire

$\emptyset(x, y, z) = 3x^2y + 2y^2z^3$

1/ Calculez $\overrightarrow{grad}(\emptyset)$, $div(\vec{A})$, $\overrightarrow{rot}(A)$

2/ Calculez au point (1, 0,1) :

a- $\overrightarrow{grad}(\emptyset)$
b- $div(\vec{A})$
c- $\overrightarrow{rot}(A)$

exercice3:

1- Dans un repère orthonormé $\boldsymbol{Oxyz}$ de vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$, on considère les vecteurs :
$\vec{A} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ et $\vec{B} = b_1\vec{i} + b\vec{j} + b_3\vec{k}$

Calculer **cos** $(\vec{A}, \vec{B})$ en fonction des paramètres a_i et b_i sachant que i varie de 1 à 3

2- Soient les points $M_1(1, 1, 1)$, $M_2(2, 2, 1)$ et M_3 $(2, 1, 0)$, calculer l'angle $M_1\widehat{M}_2M_3$

3- Déterminez l'équation du plan (P) passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$, et perpendiculaire au vecteur au vecteur A. Application du cas particulier où M_0 est en M_2 et $\vec{A} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

Exercice4 :

On considère deux vecteurs $\vec{A} = 3x\vec{i} + x^2\vec{j} - x^3$ et $\vec{B} = -x\vec{i} + 4x\vec{j} + x\vec{k}$:

Calculer les dérivées $\frac{d}{dx}(\vec{A}.\vec{B})$ par deux méthodes différentes :

1- En appliquant les règles dérivation vectorielle

2- En calculant le produit scalaire et le produit vectoriel puis dérivant le résultat