**Cour**

Transfert de quantité de la matière

T.Q.M

« 3 année génie chimique »

 **Cour**

Transfert de quantité de matière

T.Q.M

**INTRODUCTION :**

**La statistique des fluides ou l’hydrostatique est l’étude des conditions d’équilibres des fluides et de leurs comportements dans des situations ou il y a absences de mouvement relatif entre les particules qui les constituent.**

**C’est une description macroscopique des fluides en équilibre, ce qui s’appuie sur la notion de milieu continue.**

**On considère cet effet un volume de fluide assez grand à l’échelle microscopique pour que les propriétés du fluide soient moyennées sur un grand nombre de molécules.**

# Chapitre I : Propriétés des fluides

* 1. Définition d’un fluide

On appelle fluide un corps qui n’a pas de forme propre et qui est facilement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides, ainsi que des corps plus complexes tels que les polymères ou les fluides alimentaires. Ils se déforment et s’écoulent facilement. Un fluide englobe principalement deux états physiques : l’état gazeux et l’état liquide.

* 1. Système d’unités

Les unités de mesure utilisées dans ce document sont celles du système international (SI). Les unités principales de ce système sont rassemblées dans le tableau suivant :

**Tableau 1.1 :** Principales unités dans le système international (SI)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Longueur** | **Masse** | **Temps** | **Pression** | **Force** | **Energie** | **Puissance** |
| Mètre | Kilogramme | Seconde | Pascal | Newton | Joule | Watt |
| **(m)** | **(Kg)** | **(s)** | **(Pa)** | **(N)** | **(J)** | **(W)** |
| L | M | T | ML-1T-2 | MLT-2 | ML2T-2 | ML2T-3 |

* 1. Propriétés des fluides

Tous les fluides possèdent des caractéristiques permettant de décrire leurs conditions physiques dans un état donné. Parmi ces caractéristiques qu’on appelle propriétés des fluides on a :

* + 1. Compressibilité
		2. Masse volumique et densité
		3. Poids volumique
		4. Volume massique
		5. Viscosité
		6. **Compressibilité**

La compressibilité est le caractère de variation de volume de fluide avec une variation de pression (dp), le volume de fluide subit une diminution de volume (dV).

L’augmentation de pression entraine une diminution de volume.

Le coefficient de compressibilité est : **   *dV* /*V*

*dp*

  *dV*

*dpV*

(Pa-1), (m2/N) (1.1)

 : coefficient de compressibilité (m2/N) V : volume de fluide (m3)

dV : variation de volume (m3)

dp : variation de pression (N/m2)

* + 1. **Masse volumique et densité**
1. ***Masse volumique***: La masse volumique  d’un fluide est la masse de l’unité de volume de ce fluide. Elle s’exprime en ***kg/m3***

Les fluides sont caractérisés par leur masse volumique

**  *masse*  *M Volume V*

(1.2)

M : masse du fluide (kg) V : volume du fluide (m3)

 : masse volumique (kg/m3)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Fluides** | mercure | eau de mer | eau pure | huile | essence | butane | air |
| **(kg/m3)** | 13 600 | 1030 | 1000 | 900 | 700 | 2 | 1.293 |

1. ***Densité***

La densité : elle mesure le rapport de la masse volumique du fluide rapportée à un corps de

référence. C’est une grandeur sans unité définie par :

*d*  **

*réf*

(1.3)

Le corps de référence dépend de l’état physique du corps Eau : pour les solides et les liquides

Air : pour les gaz

1000

700

Exemples :

*deau* 

 1

1000

*dessence* 

1000

 0.7

Les liquides sont caractérisés par une masse volumique relativement importante ;

 liquide ≫  gaz

Pour les gaz, la masse volumique dépend de la température et de la pression.

* + 1. **Poids volumique** (poids spécifique) : ** (N/m3)

Il représente la force d’attraction exercée par la terre sur l’unité de volume, c'est-à-dire le poids de l’unité de volume.

**  *G* 

*Mg*  *Vg*

** = *g*

(N/m3) (1.4)

*V V V*

* + 1. **Volume massique** (volume spécifique)

C’est le volume qu’occupe l’unité de masse d’une substance, c’est l’inverse de la masse volumique

*v*  *V* 

*V*

*V*

*M*

 1 (m3/kg) (1.5)

* + 1. Viscosité

**

La viscosité d’un fluide est la propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches de fluide les unes par rapport aux autres. Lorsque le fluide se déplace en couches parallèles ; le facteur de proportionnalité est le coefficient de viscosité dynamique, ( ** ) et on écrit alors :

**  * du*

*dy*

(1.6)

La viscosité cinématique, , est définie comme étant le rapport entre la viscosité dynamique et la masse volumique.

**  **

**

(1.7)

Dans le système SI, l’unité de la viscosité dynamique est le (Pa.s) ou (kg/ms) ou Pl Pa.s : Pascal seconde

Pl : Poiseuille avec 1 Pa.s = 1 Pl =1kg /ms

Dans le système CGS l’unité est le Poise (Po) avec 1 Po = 10-1 Pl

Dans le système SI, l’unité de la viscosité cinématique, , est le (m2/s) ; dans le système CGS l’unité est le stockes où 1 stokes = 1 cm2/s = 10-4 m2/s

* 1. Applications Exercice 1

Soit un volume d’huile V= 6m3 qui pèse G= 47KN. Calculer la masse volumique, le poids spécifique et la densité de cette huile sachant que g= 9.81 m/s2. Calculer le poids G et la masse M d’un volume V= 3 litres d’huile de boite de vitesse ayant une densité égale à 0.9

***Solution***

* Masse volumique

**  *M*  *G*

*V gV*

 47.1000  798.5 kg/m3

9.81\* 6

* Poids volumique

** = *g*

* Densité

** = 798.5\* 9.81

= 7833.3 N/m3

*d*  **

*réf*

* Poids ;

**  *G*

*V*

*d*  798.5  0.7985

1000

G = ** \**V* =  g V = 0.9 103. 9.81. 3.10-3 = 26.48 N

* Masse : M = \*V = 0.9 103 \* 3.10-3 = 2.7 kg

*M*  *G*

*g*

 26.48

9.81

 2.7*kg*

**Exercice 2**

Déterminer le poids volumique de l’essence sachant que sa densité d=0,7. On donne :

* l’accélération de la pesanteur g=9,81 m/s2
* la masse volumique de l’eau  =1000 kg /m3

***Solution***

** = *g*

** = 0.7 \*1000 \* 9.81 = 6867 N/m3

**Exercice 3**

Déterminer la viscosité dynamique d’une huile moteur de densité d = 0.9 et de viscosité cinématique = 1.1 St

***Solution***

**  **

**

** = **.** = 1.1\*104.900

= 0.099*Pa*.*s*

**Exercice 4**

La viscosité de l’eau à 20°c est de 0.01008 Poise. Calculer

* La viscosité absolue (dynamique)
* Si la densité est de 0.988, calculer la valeur de la viscosité cinématique en m2/s et en Stokes

***Solution***

1 Po = 10-1 Pl ** = 0.001008*Pa*.*s*

**  **



**  0.001008

988

= 1.02 \* 10-6 m2/s = 1.02 10-2 St

**Exercice 5**

Du fuel porté à une température T=20°C a une viscosité dynamique μ = 95.10−3 Pa.s. Calculer sa viscosité cinématique en stockes sachant que sa densité est d=0,95.

On donne la masse volumique de l’eau est 1000 kg /m3

***Solution***

**  **

**

**  0.095

950

= 10-4 m2/s = 1 St (1 stokes = 1 cm2/s = 10-4 m2/s)

**Exercice 6**

On comprime un liquide dont les paramètres à l’état initial sont : p1= 50bar et V1= 30.5 dm3 et les paramètres à l’état final sont : p2= 250bar et V2= 30dm3. Calculer le coefficient de compressibilité  de ce liquide

***Solution***

**   *dV* /*V*

*dp*

  *dV*

*dpV*

  (30.5  30)

(250  50) \* 30.5

 8.2\*105 *bar* 1

**Chapitre II : Statique des fluides.**

* 1. Introduction

La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. L’étude des propriétés des fluides au repos constitue la statique des fluides.

* 1. II.1.Notions de pression

La pression exercée par une force F agissant perpendiculairement sur une surface S est :

Force

Surface

(N/m2) (N)

P  F

S

(m2)

*N*

(2.1)

L’unité légale (SI) de pression est le Pascal. 1Pa = 1 *m*2

On utilise également l’hectopascal (hPa) 1hPa = 100 Pa Autres unités :

* + - le bar 1bar = 105 Pa = 105 *N m*2
		- l’atmosphère 1atm = 101325 Pa = 1013 hPa appelée pression atmosphérique.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **Pascal (Pa)** | **Bar** | **Atmosphère** |
| **Pascal** | **1** | **10-5** | **9.869 10-6** |
| **Bar** | **105** | **1** | **0.987167** |
| **Kgf/cm2** | **98039** | **0.9803** | **0.968** |
| **Atmosphère** | **101325** | **1.0133** | **1** |
| **cm d’eau** | **98.04** | **980 10-6** | **968 10-6** |
| **mm de Hg** | **133** | **1.333 10-3** | **1.316 10-3** |
| **mbar** | **102** | **10-3** | **987 10-6** |

* 1. **Pression en un point d’un fluide au repos** (Théorème de Pascal)

dz 0 x

z y

ds ps (ds.dy)



G

dx

px (dz.dy)

**Figure (2.1)** : Pression en un point d’un liquide au repos

pz (dx.dy)

Supposons que le liquide exerce une pression px sur la surface (dz dy), une pression pz sur la surface (dx dy) et une certaine pression ps sur la surface (ds dy) de l’élément.

Donc l’intensité des forces de pression (s’appliquant de façon normale aux surfaces) est : Fx= px (dzdy) ; Fz = pz (dxdy) ; Fs = ps (dsdy) (2.2)

La force de gravité agissant sur cet élément de fluide est : *G*  **

(*dxdz*) *dy*

2

(2.3)

Dans la direction horizontale des x :



∑Fox =0 Fx – Fs sin = 0 px (dzdy) – ps (dsdy) sin = 0

D’où : px dz – ps ds sin   en sachant que ds sin = dz, on obtient : px = ps (2.4)

∑Foz =0 Fz- Fz cos - G = 0 pz (dxdy) – ps (dsdy) cos - ** (*dxdz*) *dy* =0

2

D’où : pzdx- psds cos- ** (*dxdz*) = 0 et en sachant que ds.cos = dx, on obtient : pz - ps - *dz* =0

2 2

Et si l’on réduit l’élément de volume à un point,

c'est-à-dire dz =0, on obtient pz=ps (2.5)

Des équations (2.4) et (2.5), on obtient : px = pz = ps (2.6)

**Par conséquent, la pression hydrostatique en un point donné d’un fluide au repos est la même (agit de façon égale) dans toutes les directions**

On peut vérifier que la pression exercée au sein d’un liquide en équilibre,

* + - est constante en tous points d’un même plan horizontal.
		- est indépendante de la direction considérée.
		- croît au fur et à mesure que l’on s’éloigne de sa surface libre.
	1. II.1.1.Principe fondamental de l’hydrostatique

3.1 Principe fondamental de l’hydrostatique

La différence de pression entre deux points d’un fluide en équilibre est

A

B x

A

x Fluide

h

donnée par la relation,

pA-pB =gh

Figure 2.2

 est la masse volumique du fluide en (kg/m3)

h est la dénivellation entre les deux points A et B en (m) g est l’accélération de la pesanteur (9,81 N/kg)

P = PA-PB est la différence de pression en (Pa)

* 1. II.1.2Transmission des pressions dans les liquides
		1. **A/.Théorème de Pascal**

Toute variation de pression en un point d’un liquide au repos est transmise intégralement à tous les autres points du liquide.

* + 1. Application : Principe de la presse hydraulique

Soit le schéma de principe d’une presse hydraulique (Fig.2.3). On y produit une force considérable à partir d’une force relativement peu importante, en considérant la surface d’un piston à la sortie 2 plus large que celui à l’entrée 1.

F1 = p1.S1

F2 = p2.S2

S1

S2

P1

p2

2

1

**Figure.2.3** : Principe d’une presse hydraulique

Lorsque les deux pistons 1 et 2 sont sur le même niveau, on a : p1=p2

Soit : F =p .S

et F

=p .S

donc :

*P*1  *F*1 *P*2  *F*2

1 1 1

2 2 2

*S*1 *S*2

p1 = p2 donc :

*F*1  *F*2 *S*1 *S* 2

*F*2

d’où :

*F*

1

 *S*2

*S*1

Si S2 ≫ S1 F2 ≫ F1

B /.**Equilibre de deux fluides non miscibles**

Un tube en U rempli d’un liquide de masse volumique (B), si dans l’une des branches un autre liquide non miscible au premier et de masse volumique (A) est versé, il est observé une dénivellation h=(hA-hB) entre les deux liquides. Les deux surfaces libres étant à la pression atmosphérique. D’après le principe de Pascal, il est possible d’écrire les équations suivantes :

h

patm

patm

A

A

B

hA

C

D

hB

hC

hD

B

pD = patm + B g (hB-hD)

pC = patm + A g (hA-hC)

patm + B g (hB-hD)= patm + A g (hA-hC)

et puisque hD = hC (même plan horizontal d’un même fluide) B g (hB-hC)= A g (hA-hC)

(2.7)

**  **

(hB - hC )

*A*

*B* (*h*  *h* )

*A C*

La simple mesure des hauteurs des deux fluides permet de déterminer la masse volumique d’un fluide. De même ce concept est utilisé pour la masure des pressions avec les manomètres à colonne de liquide ou manomètre différentiel.

* 1. Principe d’Archimède

Si l’on examine le comportement d’un cylindre de longueur L et de section S, immergé dans un fluide de masse volumique  dans le champ de pesanteur terrestre, ce cylindre est soumis à plusieurs forces :

* des forces radiales de pression qui s’exercent sur la paroi verticale et qui sont diamétralement opposées et s’annulent deux à deux (f et f’)
* sur la surface inférieure s’exerce une force verticale normale à S, dirigée vers le haut et d’intensité F2 = p2.S.
* sur la surface supérieure s’exerce une force verticale normale à S dirigée vers le bas et d’intensité F1 = p1.S

Liquide de masse z

volumique 

F1

h1 **Figure 2.4 :** Poussée d’Archimède

f cylindre immergé

f’

h2

F2

La poussée d’Archimède est la résultante de toutes ces forces. Si ces forces sont projetées sur l’axe Oz, la résultante suivante est obtenue :

∑Fext = F2+F1 = (p2-p1).S = (h2 –h1)  g S = V g



∑F = Vg

Puisque (h2-h1) n’est autre que la hauteur du cylindre. Donc : (2.8)

La poussée d’Archimède est dirigée dans le sens inverse du champ de pesanteur et s’annonce de la façon suivante : ˵Tout corps totalement immergé dans un liquide est soumis à une poussée dirigée du bas vers le haut et égale au poids du liquide déplacé, c'est-à-dire correspondant au volume du corps immergé˵

Le comportement d’un corps immergé dans un fluide au repos ; soumis seulement aux forces de pression et de pesanteur, est donné par le sens du vecteur poids apparent, défini par la relation, en projetons sur l’axe Oh ; on obtient : Fapp = -m g + FA dans laquelle Fapp, mg et FA représentent respectivement le poids apparent, le poids réel et la poussée d’Archimède. Dans la pratique, trois cas peuvent se présenter, si :

* FA > 0, le corps s’élève dans le fluide et cette ascension aboutit à une flottaison du solide.
* FA = 0, le corps est immobile dans le fluide, puisque la poussée d’Archimède équilibre le poids du solide.
* FA < 0, le corps s’enfonce dans le fluide, c’est le type de chute qui est rencontrée dans la décantation des solides.
	1. Equations de l’hydrostatique

Considérons un réservoir plein de liquide accéléré en bloc dans une direction quelconque dont la surface libre est exposée à la pression atmosphérique, et prenons un élément de fluide de volume (dxdydz). L’élément de fluide est en équilibre statique sous l’influence de trois forces de volume et de six forces de pression hydrostatique. Les forces qui agissent sur cet élément de volume (dxdydz) dans la direction z sont :

1. Les forces de volume : Z (dxdydz)
2. Les forces de surface (de pression) : (p  *p dz* ) dxdy et (p+ *p dz* ) dxdy

*z* 2

*z* 2

*p dz*

z (p+ *z*

) dxdy

2

dz Z (dxdydz)

dx x

(p  *p dz* ) dxdy

*z* 2

**Figure (2.2) :** Forces agissant sur un élément

de fluide de volume (dxdydz) dans la direction z La condition d’équilibre des forces selon z est : ∑ Fext = 0

* *p dz* ) dxdy – (p+ *p dz* ) dxdy + Z(dxdydz) = 0 d’où : - *p* + Z = 0 (2.9)

(p

*z* 2 *z* 2 *z*

De la même façon, on obtient les équations d’équilibre dans les autres directions x et y :

X 

Y -

Z 

*p*

*x* = 0

*p*

F - grad p = 0

*y* = 0



*p*

*z* = 0 1 2

(2.10)

1. Force de volume par volume unitaire 2. Force de pression par volume unitaire Les équations (2.6) sont appelées équations fondamentales de l’hydrostatique (équations d’Euler). Ces équations montrent que la pression hydrostatique en un point donné d’un fluide au repos dépend des coordonnées du point dans le volume du liquide et de la masse

volumique, c'est-à-dire p = f(x, y, z, ).

* 1. Hydrostatique d’un liquide incompressible dans le champ de pesanteur

Dans le cas où la force massique est seulement la force de pesanteur, les composantes de la force massique unitaire sont :

z  X=0 Y=0 Z=  g

g

 14

**Année Universitaire 2020-2021**

y x

g 

d’où

*dp* = 0 ; *dp* =  g**** *dz*

*dz*

*p* ( *z* )=  g *z* + C

(2.11)

* 1. Hydrostatique dans d’autres champs de force

Dans certains cas particuliers, d’autres champs sont à prendre en considération. Les équations fondamentales générales de l’hydrodynamique sont valables s’il n’ya as de mouvement relatif entre les particules de fluide, elles sont aussi valables si le fluide est accéléré en bloc comme un corps solide.

On s’intéresse aux deux cas suivants :

1. Cas d’un liquide soumis à l’action de la pesanteur avec accélération constante
2. Cas d’un liquide soumis à l’action de la pesanteur avec rotation uniforme
	* 1. Champ de pesanteur avec accélération horizontale constante

Soit un liquide homogène soumis à une accélération horizontale constante **a**, donc : X a

F = Y = 0 ainsi les équations (2.6) deviennent : Z g z

g

F

a

*p*

*x* = a

*p*

*y* = 0 **(2.8) a**

*p* ***x***

*z* =  g

La pression est fonction uniquement de ***x*** et de z

La variation totale de la pression est définie comme suit : p(***x***, y) = -a ***x*** +f (z)

*p*

*z* = - g = f’(z) f(z) = - gz + C

D’où la pression est :

(2.12)

p(x, z) = -a ***x*** – gz + C

On divise les deux termes de l’équation (2.9) par ( = g), on obtient :

*p*  *z*  *a x*  *C*

** *g* (2.13)

C’est l’équation fondamentale de l’hydrostatique dans le champ de pesanteur avec accélération horizontale constante.

Les lignes isobares (lignes d’égale pression) sont des lignes dont tous les points sont soumis à la même pression, p= Cte et dp = 0. Donc l’équation (2.10) peut se mettre sous la forme :

(2.14)

*z*   *a x*  *C*

*g*

C’est l’équation générale des lignes d’égales pression qui sont des droites de (-a/g) orthogonales au vecteur F.

* + 1. **Champ de pesanteur avec rotation uniforme**

Considérons un réservoir cylindrique qui tourne à une vitesse angulaire  constante.

z

2r

g

F

R

2r

X

F = Y = 0

Z -g

h

*p*(*r*, *z*) 

*r* 2**2

2

r



* *f* (*z*)

*p* = 2r (a)

*r*

*p*

*y* = 0 (b) (2.15)

*p*

*z* = g (c)

*p*

*z* =  g =

*f* '(*z*)

d’où

*f* (*z*) =  gz + C

(2.16)

*p*(*r*, *z*) 

*r* 2**2

2

* **gz + C

On divise les deux termes de l’équation (2.13) par ( = g), on obtient :

*p*  **2 2

* z*  2*g r*  *C*

(2.17)

C’est l’équation fondamentale de l’hydrostatique dans le champ de pesanteur avec rotation uniforme

Les lignes isobares (lignes d’égale pression) sont des lignes dont tous les points sont soumis à la même pression, p= Cte et dp = 0. Donc l’équation (2.14) peut se mettre sous la forme :

2

**

*z*  *r* 2  *C*

2*g*

(2.18)

C’est l’équation générale des lignes d’égale pression qui sont des paraboles de révolution symétriques par rapport à l’axe de rotation, orthogonales au vecteur F.

* 1. Applications:

**Exercice 1 :** Une brique de dimension (20x10x5) cm pèse 2.5 kg. Quelle pression exerce-t-elle sur le sol suivant la face sur laquelle on la pose ?

***Solution***

*F*

Face 1 : p1 =

*S*

1

*mg* 2.5\*9.81

= =

*S*

1 0.2\* 0.1

*N*

= 1226.25 *m*2

Face 2 : p2 =

*F mg*

= =

*S*2 *S*2

2.5\*9.81 *N*

= 2425.50

0.2 \* 0.05 *m*2

Face 3 : p3 =

*F mg*

= =

*S*

3 *S*3

2.5\* 9.81 *N*

= 4905.00

0.1\* 0.05 *m*2

**Exercice 2 :** On enfonce une punaise métallique dans une planche en exerçant sur sa tète une force de 3 kgf avec le pouce ; la tète a 1cm de diamètre et la pointe 0.5mm

Quelles sont les pressions exercées sur le pouce ensuite sur la planche ?

***Solution***

Pression sur le pouce :

P= *F* 

*S*

3 \* 9.81

** (102 )2

 3.8.10 5 *Pa*

4

Sur le bois :

P= *F* 

*S*

3 \* 9.81

** (0.53 )2

4

 1530.10 5 *Pa*

La pression augmente lorsque la surface pressée est petite

**Exercice 3 :** Combien faut-il de mètres d’eau pour avoir une différence de pression de 1bar?

***Solution***

P = gh soit 105 = 103 9.81 h d’où h = 10.19 m

**Exercice 4 :** Calculer la pression relative et la pression absolue auquel est soumis un plongeur en mer à une profondeur de 31.6m. On donne eau de mer = 1025 kg/m3

***Solution***

Pression relative

Pr = eau de mer g h = 1025. 9.81. 31.6 = 317 746 Pa = 3.17 bar Pression absolue = Pression relative + pression atmosphérique Soit Pabsolue = 317 746 + 101 325 = 419 071 Pa = 4.19 bar

**Exercice 5 :** La cuve ci-contre est à moitié pleine d’eau. Calculez la différence de pression entre les points A et B, puis entre les points B et C. Comparer ces résultats et conclure !

B

Air

Eau

On donne : - masse volumique de l’eau 103 kg/m3

***Solution***

\_ masse volumique de l’air 1.3 kg/m3 h = 1,6 m

PAB = eau g (hA-hB) = eau g h/2 soit PAB = 103 9.81 0.8 = 7 848 Pa

A

PBC = air g(hB-hC) = air g h/2 soit PBC = 1.3 9.81 0.8 = 10.2 Pa

Conclusion : la pression dans l’eau est très supérieure devant la pression dans l’air

**Exercice 6 :** On donne F1 = 100 N et D1 = 10cm (diamètre du petit piston) Le petit piston descend d’une hauteur h1 = 1m

1. Si le diamètre du grand piston est D2 = 1m, quelle est l’intensité de la force F2 exercée sur le grand piston ?
2. De quelle hauteur h2 monte le grand piston ?

***Solution***

1.

*P*1  *F*1

*S*1

 100

*S*1

 12732*Pa*

avec

*S*1 

** (0,1)2

4

 7,8.103 m2

F2  P2.S2 or

*P*  *P*

soit

**

*F* 2  12732 (1)  10.000 N

2

1 2 4

2. V = S1h1 = 0,0078  1 = 7,8.10-3 m3

D’où

*h*2 

2

*V*

*S*

 7,8 103

** (1)2

4

 102

*m*  1*cm*

**Exercice 7 :** Un récipient contient de l’eau sur 20cm et de l’huile sur 50cm. La pression au point A est égale à la pression atmosphérique. Calculer la pression aux points B et C ; sachant que eau = 103kg/m3 et huile = 900kg/m3

***Solution :***

Soit PA = Patm = 105 Pa

PB = PA + h g H2 = 105 + 900 .9.81. 0.5 = 104500 Pa

PC = PB + e g H1 = 104500 + 1000. 9.81. 0.2 = 106482 Pa

**Exercice 8 :** Un récipient en partie rempli d’eau et soumis à une accélération horizontale constante. L’inclinaison de la surface de l’eau est de 30°. Quelle est l’accélération du récipient ?

***Solution***

*tg*  *a*

*g*

Donc : a = g \*tg    tg       m/s2

 **Exercice 9 :** Un récipient en partie rempli d’eau et soumis à une accélération horizontale constante. Calculer cette accélération si on : L=3m H1 =1.8m H2 =1.2m g = 9.81 m/s2

***x Solution***

H1 H2

L

*tg*  *a*

*g*

 *x*

* 1. *L*

*g* \* *x*

Donc *a*



0.5*L*

 9.81\* 0.6 = 3.9 m/s2

1.5

***x*** = H1 – H2 = 1.8 – 1.2 = 0.6m

**Exercice 10 :** Un réservoir cylindrique de 3m de haut, 1m de diamètre contient 2m d’eau et tournant autour de son axe. Quelle vitesse angulaire  constante peut-on atteindre sans renverser l’eau. Quelle est la pression au fond du réservoir en A (axe) et B paroi) quand  = 10rad/s

***Solution***

****

1m

* + 1. Calcul de  D'après l’équation des isobares, on a :

3m

*r* 2** 2

2m

*z*   *C*

2*g*

Au point O (r=0 et z=0) donc C=0 ; d’où :

*r* 2** 2

2*gz r* 2

*z*  ** 

2*g*

z = 2x x=3-2 =1m d’où z =2m

**  ** 12.65*rad* / *s*

2.10.2

0.52

* + 1. Calcul des pressions aux points A et B

*r* 2** 2

*z* 

2*g*

0.52102

29.81

 1.25*m*

L’origine O s’abaisse de z/2 =1.25/2= 0.625m et o se trouve à présent à 2- 0.625= 1.375m du fond du réservoir

*p*(*r*, *z*)  *gz*  **

*r* 2** 2

*C*



2

(r=0 ; z=0) C=0

Point A : r=0

*p*  *gz*  103 \*9.81(1.375)  13750*Pa*

*r* 2** 2 0.52102

*A A*

*p*  *gz*  * B*  103 \* 9.81(1.375) 103   26250*Pa*

*B B*

2

2

Point B : r=0.5m

# Chapitre III : Dynamique des fluides parfaits incompressibles

* 1. Introduction

La dynamique étudie les fluides en mouvement pour simplifier le problème, on néglige les frottements. Dans un liquide non visqueux ou parfait en mouvement, la pression a les mêmes propriétés que dans un liquide au repos.

On s’intéresse dans ce chapitre aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits incompressibles à savoir :

L’équation de continuité (conservation de la masse) Le théorème de Bernoulli (conservation de l’énergie)

Le théorème d’Euler (Conservation de la quantité de mouvement)

* 1. Equations générales de la dynamique des fluides parfaits

Soit un cylindre élémentaire de fluide parfait qui se déplace. La démonstration se fait dans la direction des z ; pour les autres directions x et y elle se fait de façon analogue.

*p*

(p+ *z dz*)*dS*

z

***y***

Z (dSdz)

**Figure (1.1)** : Forces agissant sur un élément de volume (dSdz) dans la direction z

x

p dS

Les forces qui agissent sur cet élément de volume (dSdz) sont :

* + 1. La force de volume : Z (dSdz)

*p*

* + 1. Les forces de pression : pdS et (p+ *z dz*)*dS*

*dw*

* + 1. La force d’inertie (accélération) : 

(*dSdz*)

*dt*

où w est la composante de la vitesse V (u, v, w) selon la direction z

Etant donné que la masse volumique reste constante, l’ensemble des forces satisfait à l’équation de Newton :

∑ Fext = masse x accélération

La condition d’équilibre des forces selon la direction des z s’écrit :

* (p+ *p dz*)*dS*

pdS

*z*

+ Z (dSdz) = 

*dw* (*dSdz*)

*dt*

ou par unité de volume : 

*p*  *Z*  * dw*

*z dt*

On peut écrire de manière identique la condition d’équilibre des forces dans les autres directions, puis sous sa forme vectorielle.

X 

*p du*

=

**

X  1

*p du*

=

*x dt * *x dt*

F  grad p= * dV*

*dt*

Y -

*p dv*

=

**

Y - 1

*p dv*

=

(3.1)

*y dt * *y dt*

Z 

*p dw*

=

**

Z  1

*p dw*

= 1 2 3

*z dt * *z dt*

1. Force de volume par volume unitaire
2. Force de pression par volume unitaire
3. Force d’inertie par volume unitaire

F est le vecteur de force de volume par unité de masse dont les trois composantes sont (X, Y, Z). Les équations (3.1) sont appelées équations générales de la dynamique des fluides parfaits ou **équations d’Euler**

En introduisant les expressions des composantes de l’accélération pour un écoulement tridimensionnel, les équations (3.1) s’écrivent sous la forme :

X  **

1

1

*p* *u*

*x* = *t*

*p* *v*

* *u* *u*

*x*

*v*

* *v* *u*

*y*

*v*

* *w* *u*

*z*

*v*

Y - **

*y* = *t*

* *u* *x*  *v* *y*
* *w* *z*

(3.2)

1 *p* *w* *w* *w* *w*

Z  **

*z* = *t*

* + *u* *x*
* *v* *y*
* *w* *z*
	1. Ecoulement permanent ou stationnaire

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire lorsqu’en chaque point de l’espace, le vecteur vitesse V varie indépendamment du temps.

*V*  0

*t*

Dans le cas contraire, l’écoulement est dit non-permanent ou in stationnaire.

* 1. Equation de continuité

dx2 V2

dV2

S’2 dm2

dx1 S2

dV1 m

V1 S’1 **Figure 3.1** Veine de fluide parfait incompressible

S1

dm1

Considérons une veine de fluide incompressible de masse volumique  animé d’un écoulement permanent (Fig.3.1). On désigne par :

S1 et S2 respectivement les sections d’entrée et la section de sortie du fluide à l’instant t

S’1 et S’2 respectivement les sections d’entrée et la section de sortie du fluide à l’instant t’ (t+dt)

V1 et V2 les vecteurs vitesses d’écoulement respectivement à travers les sections S1 et S2 de la veine dx1 et dx2 respectivement les déplacements des sections S1 et S2 pendant l’intervalle de temps dt dm1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S1 et S’1

dm2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S2 et S’2 m : masse comprise entre S1 et S2

dV1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S1 et S’1 dV2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S2 et S’2

**A l’instant t** : le fluide compris entre S1 et S2 a une masse égale à (dm1+m)

**A l’instant t’** : le fluide compris entre S’1 et S’2 a une masse égale à (m+dm2)

La masse déplacée étant conservée, on écrit alors : dm1+m = m+dm2 ; soit dm1 = dm2 Alors : 1dV1 = 2 dV2 ou encore : 1 S1 dx1 = 2 S2 dx2

En divisant par dt, on obtient :

V1 V2

* S dx*1  * S dx*2

* S V*

 * S V*

1 1 *dt* 2 2 *dt*

1 1 1

2 2 2

**Année universitaire 2020-2021**

 23

Puisque le fluide est considéré comme incompressible :      on obtient l'équation de continuité suivante :

*S*1*V*1  *S*2*V*2

(3.3)

Cette relation représente le débit volumique Q exprimé en (m3/s). L’équation de continuité représente la loi de conservation de masse.

* 1. Notion de débit
		1. Débit massique

Le débit massique d’une veine fluide est la limite du rapport dm /dt quand dt tend vers zéro

*q*  *dm*

*m dt*

*Où :*

qm : masse de fluide par unité de temps traversant une section droite de la veine [kg/s] dm : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt dt : intervalle de temps en (s)

En tenant compte des équations précédentes, on obtient :

*qm*  **.*S*.V

Ou encore :

*qm*  **.*S*1.V1  **.*S*2.V2

(3.4)

Compte tenu de la conservation de masse, on peut généraliser l’équation (3.4)

*qm*  **.*S*.V

qm : Débit massique (kg/s)

: masse volumique (Kg/m3)

S : section de la veine fluide (m2)

V : vitesse moyenne du fluide à travers la section S (m/s)

* + 1. Débit volumique

(3.5)

Le débit volumique d’une veine fluide est la limite du rapport **dV /dt** quand dt tend vers zéro

*q*  *dV*

*v dt*

Où :

qv : volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite (m3/s)

dV : volume élémentaire en (m3) traversant une section S pendant un intervalle de temps dt dt : intervalle de temps en secondes (s)

Relation entre le débit massique qm et le débit volumique qv :

**

*q*  *qm*

*v *

 **.*S*.*V*

 *S*.*V*

* 1. Théorème de Bernoulli (Conservation de l’énergie)
1. Cas sans échange d’énergie

Hypothèses :

* + Le fluide est parfait et incompressible
	+ L’écoulement est permanent
	+ L’écoulement est dans une conduite lisse Application du théorème de l’énergie cinétique

**Z** B dx1 Bˊ

P2

Dˊ **V2** Cˊ

Z2

C

D

dm2

Aˊ

A

m

**V1**

**F1**

Z1

dm1

p1

dx2

La relation de Bernoulli est une équation de conservation de l’énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement.

A l’instant t : masse fluide ABCD et à l’instant t+dt : masse fluide AˊBˊCˊDˊ

Théorème de l’énergie cinétique

Appliquons le théorème de l’énergie cinétique entre les instants t et t+dt. La variation de l’énergie cinétique Ec est égale à la somme des travaux des forces extérieures (poids de l’élément fluide, forces de pression).

Ec = ∑ W Fext ½ dm (V22 – V12) = dm .g (z1 –z2) + (p1 S1 dx1 – p2 S2 dx2)

**=** dm .g (z1 –z2) + p1 - p2

S2 dx2

S1 dx1

½ dm (V22 – V 2) = dm .g (z1 –z2) + (p1 dV1 – p2 dV2)

1

*dm*  *dV*  *dV*  *dm*

**

½ dm (V22 – V12) = dm .g (z1 –z2) + (p1 dm1/  – p2 dm2/ )

dm1 = dm2 =dm

Fluide incompressible: 1 = 2 = 

dV1 dV2

½ dm (V22 – V 2) = dm .g (z1 –z2) + (p1 /  – p2 / )

1

dm

½ (V22 – V12) = g (z1 –z2) + (p1 /  – p2 / ) Formes de l’équation de Bernoulli

 *p*1 

2

1

*v*

+ g Z

= *p*2 

*v*22

+ g Z

(J/kg)

** 2 1 ** 2 2

*p*  **

*v*2

+ g Z = *p*

1

2

 * v*2

+ g Z

(Pa) (3.7)

1 2

*p v*21

1 2 2 2

*p v*22

1 

**

*g* 2*g*

+ Z1 = 2 

*g* 2*g*

+ Z2 (m)

* 1. Applications du théorème de Bernoulli
		1. *Formule de Torricelli*

On considère un réservoir de grandes dimensions ouvert à l’atmosphère contenant un liquide de masse volumique  et percé d’un petit orifice à sa base à une hauteur h de la surface libre. (S >>s)

h

(1) Air

d

V2

On applique le théorème de Bernoulli entre deux points (1) et (2) d’une même ligne de courant (surface libre et la sortie de l’orifice).

g Z =

1

+

2

1

*v*2

**

 *p*1 

*p*2 

*v*22

** 2

+ g Z2

Hypothèses :

* p1 = p2 =patm
* Z2 = 0 ; Z1 = h (plan de référence en 2)
* S >>s V2 >> V1 donc V1 = 0 (négligeable)

(3.8)

*V*2  2*gh*

Formule de Torricelli

V2 est la vitesse théorique Vth, par conséquent le débit théorique du fluide recueilli à l’orifice de section S2, est donné par : Qth = Vth.S2

Qth = *S*2 .

2*gh*

En réalité à cause des frottements (solide/liquide), la vitesse est plus petite que la vitesse théorique. On écrit : Vr= 1. Vth

Vr  **1.

2*gh*

**  *Vr Vth*

1

(3.9)

1 : coefficient plus petit que 1 (1 <1), appelé coefficient de vitesse La section du fluide à la sortie de l’orifice est : Sr= 2 Sth,

*S*

**2  *r*

*S*

(3.10)

*th*

2 : coefficient plus petit que 1 (2 <1), appelé coefficient de contraction de section. Donc le débit réel à la sortie de l’orifice est donc :

Qr = Sr. Vr = 2. Sth. 1. √2gh =  Sth. √2gh =  .Qth

**  *Qr*

*Qth*

(3.11)

 : coefficient plus petit que 1 ;  1. 2, appelé coefficient de débit.

* + 1. *Calcul du temps de vidange*

A un instant t donné, on a :

*Qvr*

*dt*

  *dV*

*dt*

 

*dV*

*Sth* 2*gz*

 *Sth*

 

2*gz*

*S*(*z*)*dz*

*Sth* 2*gz*

Si le réservoir est de section constante : S(z) = S

*h*

*dV*

*Sth* 2*gz*

*Sdz*

*Sth* 2*gz*

*t*  

 

0

D’où le temps de vidange total

*t*  (3.12)

2*Sh*

*Sth* 2*gz*

S.h : représente le volume initial (V0) contenu dans le réservoir

*Sth*

2*gz*

: représente le débit en volume initial (Qv0) au débit de l’expérience, on peut mettre t

sous la forme :

*t*  2*V*0

*Qv*0

(3.13)

* + 1. Tube de Venturi

Un venturi est un étranglement de conduit, limité par les sections S1 et S2 où les pressions sont respectivement p1 et p2. Un tel appareil permet de mesurer le débit volumique d’un

**Année universitaire 2020-2021**

 28

fluide. La vitesse du fluide circulant dans la conduite augmente dans l’étranglement et sa pression diminue. V2 > V1 p2 < p1

S1 S2

Qv

V1

V2

p1, D1,

p2, D2

h

m

On appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre les deux points (1) et (2), on obtient :

*p*1  1  *z*  *p*2

*v*

2

2

 2  *z*

*v*

*g* 2*g* 1 *g* 2*g* 2

Ici z1 =z2 (écoulement horizontal) et l’équation de continuité permet d’écrire :

*Q*  *S V*  *S V*

*V*  *S V*1

*v* 1 1 2 2

*S*

2 1

2

*p* \_ *p*

2 \_ 2

*v*2  *S*

 *v*2  *D* 

 1 2  *v*2 *v*1

 1 ( 1 )2  1  1 ( 1 )4  1

*g* 2*g*

*v*2 

2*g*  *S*2

*D* 

 2*g*  *D*2 

*p*  *p* = ** 1 ( 1 )4  1

(3.14)

1 2 2  *D* 

2

S1 et S2 sont connues (caractéristiques du venturi), p1 et p2 sont données par les hauteurs du liquide manométrique dans le manomètre, on détermine donc la vitesse V1.

*V*1 

2( *p*1  *p*2 ) )

**[*D*1 )4  1]

*D*2

(3.15)

3.7.4 Tube de Pitot

 h

VA

B

A

Le tube de Pitot sert à mesurer la vitesse locale d’un fluide en le reliant à la différence de pression d’un manomètre à liquide. On considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu’il soit parallèle aux lignes de courant. A son embouchure, le fluide peut pénétrer. Une fois qu’il a occupé tout l’espace disponible au sein du tube, il n’ya plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure du tube, est donc nulle. On l’appelle un point d’arrêt de la ligne de courant.

Considérons une ligne de courant A-B.

En A, on a p = pA (par exemple une pression hydrostatique), V = VA = V∞, et z = zA En B, on a p = pB, VB = 0, et z = zA = zB

=0 -

Le théorème de Bernoulli donne donc : pA + ½ V2A + gzA = pB + ½ V2B + gzB

*V* 

**

2 ( *p*  *p* )

*B A*

(3.16)

Comme la différence de pression (pB – pA) peut être déterminée si on utilise un manomètre (tube en U), on peut déduire la vitesse V∞

De l’hydrostatique, on a : (pB - pA) = gh, ce qui donne :

*V*2 

2*gh*

* 1. Théorème de Bernoulli (Conservation de l’énergie)
1. Cas avec échange d’énergie

Il est assez fréquent, dans les installations industrielles, qu’un appareil hydromécanique, placé dans une veine fluide, permette une transformation d’énergie mécanique en énergie hydraulique (une pompe par exemple) ou inversement (une turbine).

Appelons Wi l’énergie massique transférée en (J/kg)

Wm1 : représente la densité énergétique à l’entrée de la veine Wm2 : représente la densité énergétique à la sortie.

* 1. **Applications**

**Exercice 1 :**

Soit un fluide supposé incompressible (eau) qui s’écoule à travers un tube de venturi représenté par la figure 1.

Données : m = 13.6 103 kg/m3 eau = 103 kg/m3 V1= 6m/s D1= 25 cm

-On demande de calculer le diamètre D2 si p1= p2

-Si cette pression (p2) est de 12N/cm2, quelle est la valeur de h ?

**Exercice 2 :**

Un tube de venturi est disposé sur une conduite d’eau incliné. Les tubes de liaison au manomètre sont remplis d’eau.

1. Calculer la dénivellation h du manomètre en fonction de V1, S1, S2, eau, m
2. Calculer le débit volumique si h = 90mm et D1= 200mm et D2= 90mm

**Chapitre VI : Dynamique des fluides réels incompressibles**

* 1. Ecoulement laminaire et turbulent

La science de la turbulence a commencé vers la fin du XIXe siècle quand l’anglais Osborne Reynolds a pu observer la transition du régime laminaire au régime turbulent. Dans un tuyau, si l’eau passe lentement, on aura des filets bien réguliers c’est- à-dire un écoulement laminaire. Si cette eau va trop vite, il apparaît un très grand nombre de tourbillons et les pertes de charges dans le tuyau vont être très différentes.

* + 1. Régimes d'écoulement Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il a été mis en évidence en 1883 par Osborne Reynolds. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en a dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante :

(4.1)

𝐑𝐞 = 𝐕.𝐃.𝛒 = 𝐕.𝐃

𝛍

𝛎

Avec :

D : Diamètre intérieur de la conduite en (m) V : Vitesse moyenne d’écoulement en (m/s) ρ : Masse volumique du fluide en (kg/m3)

μ : Viscosité dynamique en (Pa.s)

ν : Viscosité cinématique en (m2/s)

En fonction des nombres de Reynolds croissants, on distingue quatre régimes principaux : régime de Stokes, régime laminaire, régime transitoire, régime turbulent.

L'écoulement de Stokes correspond aux très faibles valeurs du Reynolds (inférieures à 1). Dans ce cas les forces d'inertie liées aux vitesses étant négligeables, les forces visqueuses et les forces de pression s'équilibrent. Cette notion correspond au domaine de la micro fluidique. Pour des valeurs plus élevées, les forces d'inertie entrent en jeu : c'est le domaine de la dynamique des fluides.

On observe d'abord un écoulement laminaire avec des lignes de courant bien identifiées. Dans ce type d'écoulement l'effet de la viscosité s'atténue au fur et à mesure que l'on s'éloigne des parois, les vitesses du fluide tendant à s'homogénéiser. Il est alors souvent commode de considérer que l'approximation du fluide parfait (non visqueux) est suffisante hors d'une zone proche d'une paroi, appelée couche limite.

À partir d'un certain Reynolds se produit une transition qui fait apparaître des instabilités dues à l'amplification des perturbations. La valeur du Reynolds de transition et la nature des instabilités dépendent essentiellement du type d'écoulement considéré.

Ensuite, les instabilités augmentent au point de donner naissance à un phénomène chaotique dans lequel il est difficile de voir une organisation : c'est la turbulence

Soit un courant d’eau qui circule dans une conduite à section circulaire. On introduit un filet de colorant dans l’axe de cette conduite. Suivant la vitesse d’écoulement de l’eau, on peut observer les phénomènes suivants :

* + - 1. **Régime laminaire :** le fluide s’écoule en couches cylindriques coaxiales ayant pour axe le centre de la conduite.
			2. **Régime transitoire :** c’est une transition entre le régime laminaire et le régime turbulent.
			3. **Régime turbulent :** Formation de mouvement tourbillonnant dans le fluide. Cette expérience est faite par Reynolds en faisant varier le diamètre de la conduite, la température, le débit, etc… pour divers fluides.
* Si Re < 2000 , le régime est Laminaire.
* Si Re > 3000 , le régime est turbulent.
* Si 2000 < 𝑅𝑒 < 3000 , le régime est transitoire.
	+ 1. **Signification physique du nombre de Reynolds «Re »**

Le fluide est globalement soumis à 2 forces :

* Celle que subirait le fluide s’il était parfait :

Finertie = m. a = ρV. dv

dt

* Celle qui résulte des frottements

Ffrot = μ. S. dv

dx

(4.2)

( 4.3)

* Le rapport de ces deux forces Finertie = Re ( 4.4)

Ffrot

Ainsi, si Re est très grand, il y a prédominance des forces d’inertie, par contre, aux faibles valeurs, c’est la force de frottement qui domaine

La distribution des vitesses est une « parabole aplatie » :

0,75 ≤ 𝑣𝑚𝑜𝑦 ≤ 0,85. 𝑣𝑚𝑎𝑥 Les particules circulent dans toutes les directions (=aléatoire). La variation de quantité de mouvement est prépondérante.

Au voisinage de la paroi, l’écoulement est laminaire : couche limite.

Le régime turbulent est le plus fréquemment rencontré : il est permanent en moyenne.

* + 1. Théorème de BERNOULLI pour fluides réels

Lorsque le fluide est réel, la viscosité est non nulle, alors au cours du déplacement du fluide, les différentes couches frottent les unes contre les autres et contre la paroi qui n’est pas parfaitement lisse d’où il y a une perte sous forme de dégagement d’énergie ; cette perte appelée « perte de charge ».

La relation de Bernoulli peut s’écrire sous la forme :

z + v12 + P1 = z

+ v22 + P2 + ∆H

##### (4.5)

1 2g ρg

2 2g ρg

1,2

∆H1,2 : C’est l’ensemble des pertes de charge entre (1) et (2) exprimée en hauteur.

Les pertes de charge peuvent être exprimées en pression :

∆p1,2 = ρ. g. ∆H1,2 (4.6)

* + 1. Ecoulement de Poiseuille

Nous adoptons les hypothèses simplificatrices suivantes :

Fluide incompressible Ecoulement laminaire

Symétrie de révolution autour de l’axe r = 0 Ecoulement permanent

Ecoulement induit par gradient de pression constant ΔP établi entre l'entrée et la sortie de la conduite de longueur L.

1. 1.5. Répartition des vitesses à l'intérieur d'une conduite

Soit l'axe (ox) confondu avec l'axe d'une conduite de diamètre D=2r0, (oy) et (oz) sont quelconques perpendiculaire à (ox). Figure (4.5)

L'écoulement étant laminaire, les lignes de courant sont, par raison de symétrie parallèle à (ox). Les composantes v et w de la vitesse sont nulles : v = w =0 ; ainsi l'écoulement étant aussi stationnaire.

Par suite la répartition de la vitesse à l'intérieur du cylindre est donnée par l'expression suivante :

**(III.15)**

*u*(*r*) 

*a*

4**

*R*2  *r* 2 

En posant r = o on trouve (4.7)

*u* 

*aR* 2

4**

= u

max

Expression qui représente un paraboloïde de révolution ayant son sommet sur l'axe De la conduite. Figure (4.6).

 

 **Figure (4.5) :** Répartition des vitesses dans la conduite.

**X**

umax

r

R

On a

De même on peut déterminer la répartition des pressions le long du tube :

*dPm*  *a dx*

(4.8)

Soit : p\*(x) =  *ax*  *p*\*

0

*p*\* : Étant une constante d'intégration.

0

La pression motrice décroît donc linéairement le long du tube, tout en restant constante dans une même section droite.

On peut écrire :p∗ - p∗ = *a*L

1 2

L : La distance entre les deux points 1et 2 sur lesquels s’exerce la pression

Δpm

= pm1 –pm2 est la différence de pression motrice entre l’entrée et la sortie.

Ou encore : *a*  *Pm*

*L*

* + 1. Calcul du débit volumique:

Le débit du fluide est donné par l'intégrale (débit en volume)

(4.9)

𝑅 2𝜋𝑎 𝑅 ( 2 2)

0

### 𝜋𝑎𝑅4

𝜋𝑎𝐷4

### 𝑞𝑣 = ∫ 2𝜋𝑟𝑢(𝑟)𝑑𝑟 =

0

### 4𝜇 ∫ 𝑟 𝑅

− 𝑟

### 𝑑𝑟 =

8𝜇

### = 128𝜇

En remplaçant **a** par sa valeur *a*  *pm*

*L*

*qv*  8*L* *Pm*

*R*4

 *P*

128*L m*

*D*4

, il vient :

(4.10)

Cette dernière formule traduit la loi de Hagen Poiseuille : le débit est proportionnel à la différence des pressions motrices appliquées aux extrémités du tube, et à la puissance 4 de son diamètre.

* + 1. Vitesse débitante (vitesse moyenne):

La vitesse débitante est par définition la vitesse moyenne calculée sur la section droite,

c'est donc :

*umoy*

 *qv* 

*S*

1

*R*2

*aR*4

8**

Soit :

*umoy* 

*aR*2 *u*

8**

 max

2

(4.11)

La vitesse maximale de l'écoulement laminaire dans un tube circulaire est exactement le double de la vitesse débitante.

* + 1. Coefficient de perte de charge

Dans le cas de l'écoulement permanent d'un fluide dans une conduite cylindrique la perte de pression motrice est proportionnelle à la longueur de la conduite considérée. Il est donc naturel d'introduire un coefficient de perte de pression linéique tel que λ.

Des considérations dimensionnelles amènent à écrire la différence de pression traduisant la perte de charge dans une conduite cylindrique sous la forme générale :

ΔPm

/L  λ

1 u 2

ρ m

D 2

(4.12)

λ : est un coefficient sans dimension, appelé coefficient de perte de charge linéaire.

* + 1. Pertes de charge

Elles dépendent de :

* + - * La viscosité du fluide.
			* La nature de l’écoulement.
			* La géométrie de la conduite.

Les pertes de charge sont à l’origine :

* + - * Des frottements entre les différentes couches de liquide et des frottements entre le liquide et la paroi interne de la conduite le long de l’écoulement : ce sont les pertes de charge régulières (linéaires)
			* De la résistance à l’écoulement provoqués par les accidents de parcours (vannes, coudes, etc…) ; ce sont les pertes de charge singulières ou locales.



1. **Pertes de charge régulières :**

Soit un écoulement permanent d’un liquide dans une conduite de diamètre D. La perte de charge entre deux points séparés d’une longueur L est de la forme :

(4.13)

∆H = λ .

L V

2

r

D 2g

Avec :

𝐕 : vitesse moyenne du fluide (m/s)

𝛌 : Coefficient de perte de charge régulière. L : longueur totale de la conduite (m)

D ; Diamètre intérieur de la conduite (m)

Pour déterminer le coefficient de perte de charge régulière𝛌, on fait souvent appel à des formules empiriques tel que :

Si l’écoulement est laminaire, on applique la loi de Poiseuille : λ = 64

Re

* + Si l’écoulement est turbulent, on a deux cas :
1. Turbulent lisse : Re < 105, on applique la loi de Blasius : λ = 0,316. Re−1/4
2. Turbulent rugueux : Re > 105, on a la loi de Blench : λ = 0.79 ε

D

√

𝛆 **:** hauteur moyenne des aspérités (mm). En pratique pour les tubes en acier soudé :

ε ∈ [0.15; 0.20]