

4.1- Introduction

Pour les systèmes linéaires, la sortie suit toujours l'entrée. Si on applique un signal sinusoïdal, on obtient à la sortie une réponse sinusoïdale de même pulsation que le signal d'entrée, mais d'amplitude et de phase différentes. Ces deux paramètres sont en fonction du gain et de la phase de la fonction de transfert du système. C'est pour cette raison, on s'intéresse à sa représentation fréquentielle (lieu de transfert). Trois représentations du lieu de transfert sont principalement utilisées :

- ✓ Diagramme de Bode
- ✓ Diagramme de Nyquist
- ✓ Diagramme de Black

4.2- Diagramme de Bode

4.2.1- Définition

Les diagrammes de Bode consistent à tracer deux graphes correspondant respectivement au gain réel et au déphasage. Pour la courbe de gain, on ne trace pas directement $G(\omega)$ mais $G_{dB} = 20 \log G(\omega)$ défini comme le gain en décibels et, de surcroît, avec une échelle logarithmique en abscisse (figure 4.1).

Outre les raisons historiques qui ont présidé à ce choix, il existe deux intérêts essentiels au choix du tracé logarithmique du gain, intérêts que nous mettrons en évidence dans les pages qui suivent.

L'axe des ordonnées est bien évidemment gradué en décibels. Un gain réel $G(\omega)$ supérieur à 1 correspond à un gain en décibels positif tandis qu'un gain réel inférieur à 1 correspond à un gain en décibels négatif. On a bien sûr $20 \log G(\omega) = 0\text{dB}$ pour $G(\omega) = 1$.

En règle générale, on porte directement les valeurs de ω sur l'axe des abscisses en respectant l'échelle logarithmique et en plaçant la pulsation $\omega = 1$ à l'origine de cet axe (puisque'elle correspond à $\log \omega = 0$).

On notera également que la pulsation $\omega = 0$ ne peut apparaître sur l'axe qu'en « moins l'infini ».

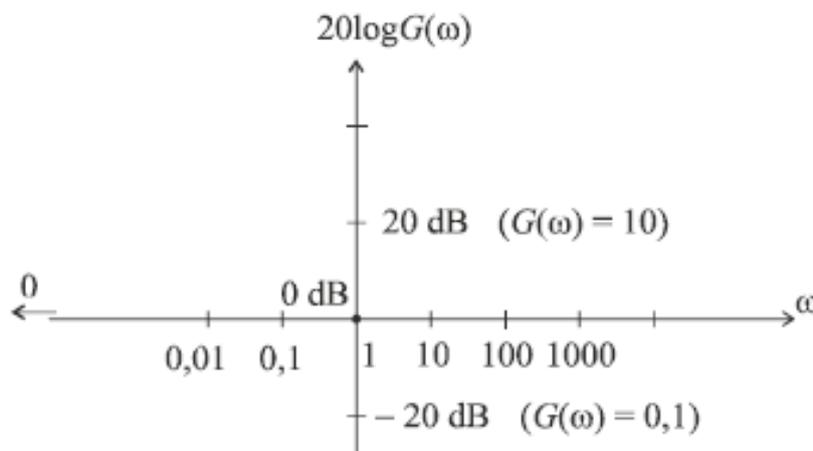


Fig.4.1 : Échelle logarithmique du diagramme de Bode.

4.3- Approche méthodique du tracé des diagrammes de Bode

4.3.1- Objectif

Nous allons tenter de tirer profit des deux intérêts fondamentaux que nous venons de mettre en évidence.

L'objectif consiste à acquérir une bonne maîtrise du tracé rapide de n'importe quel diagramme de Bode (gain et phase). Les lignes qui suivent présentent, à partir d'un exemple simple, la méthode à utiliser.

4.3.2- Construction d'un diagramme de gain asymptotique

Considérons, pour l'exemple, un système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{(p + 1)(p + 100)}{p + 10}$$

La fonction de transfert en fréquence de ce système a pour expression :

$$G(j\omega) = \frac{(j\omega + 1)(j\omega + 100)}{j\omega + 10}$$

$$\text{d'où : } G(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+1}\sqrt{\omega^2+100^2}}{\sqrt{\omega^2+10^2}}$$

considérons les équivalents des trois expressions $\sqrt{\omega^2 + 1}$, $\sqrt{\omega^2 + 100^2}$, $\sqrt{\omega^2 + 10^2}$:

$$\omega \ll 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \omega^2} \approx 1, \quad \omega \gg 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \omega^2} \approx \omega$$

$$\omega \ll 10 \Rightarrow \sqrt{10^2 + \omega^2} \approx 10, \quad \omega \gg 10 \Rightarrow \sqrt{10^2 + \omega^2} \approx \omega$$

$$\omega \ll 100 \Rightarrow \sqrt{100^2 + \omega^2} \approx 100, \quad \omega \gg 100 \Rightarrow \sqrt{100^2 + \omega^2} \approx \omega$$

L'idée consiste à déterminer un équivalent asymptotique (approché) de $G(\omega)$ pour chaque intervalle compris entre deux pulsations de coupure.

Rassemblons les résultats précédents dans le tableau suivant :

Tbleau 4.1 : CALCUL DES ÉQUIVALENTS ASYMPTOTIQUES DU GAIN

ω	0	1	10	100	$+\infty$
$\sqrt{\omega^2 + 1}$	1	ω	ω	ω	ω
$\sqrt{\omega^2 + 100^2}$	100	100	100	ω	ω
$\sqrt{\omega^2 + 10^2}$	10	10	ω	ω	ω
$G(\omega)$	10	10ω	100	ω	ω
$20\log G(\omega)$	20 dB	20 dB + 20log ω	40 dB	20log ω	20log ω
pente	0	20 dB/déc.	0	20 dB/déc.	20 dB/déc.

On réalise alors un diagramme de Bode asymptotique en approximant la courbe entre deux pulsations de coupures, par ses segments asymptotiques calculés dans le tableau (figure 4.2).

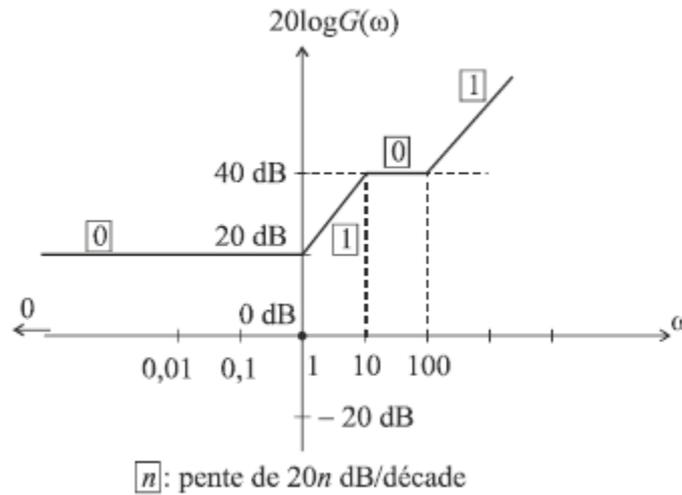


Fig.4.2 : Diagramme de Bode de gain du système.

La direction asymptotique de phase se déduit immédiatement du diagramme de gain en multipliant la pente n de ce dernier par $\pi/2$ (figure 4.3).

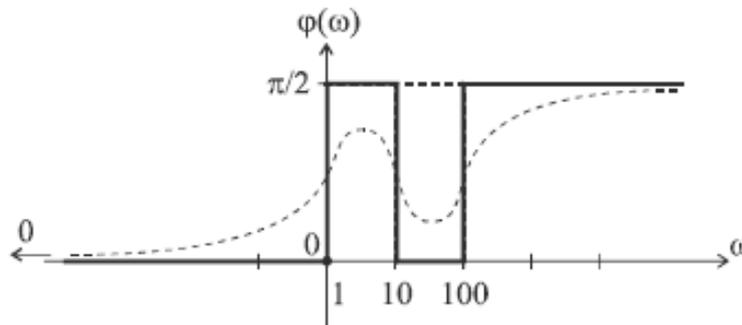


Fig.4.3 : Diagramme de Bode de phase du système.

Il suffit alors d'un peu d'intuition pour imaginer l'allure de la courbe réelle (en pointillé sur la figure 4.3), ce qui dispense de l'étude complète de la fonction $\varphi(\omega)$. On peut encore affiner le tracé en calculant les extrema relatifs de la fonction. On veillera, lors d'un tracé intuitif, à ne pas tracer la courbe réelle jusqu'aux directions asymptotiques calculées, compte tenu que ces valeurs sont... asymptotiques !

4.3.3- Méthode rapide

On peut tracer un diagramme de Bode sans faire ni calcul, ni tableau : dans la fonction de transfert $G(p)$, repérons les pulsations de coupure 1, 10 et 100 et portons les en abscisse sur le diagramme de gain (figure 4.4).

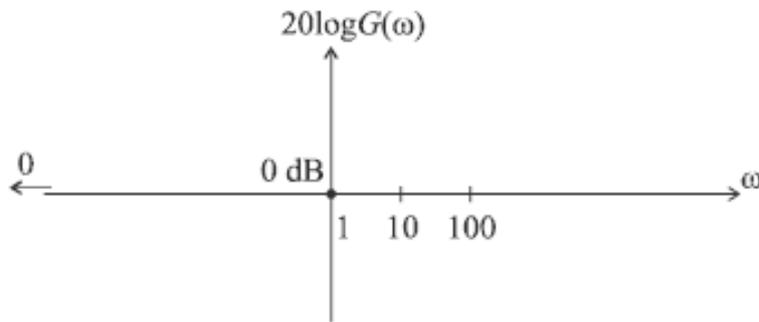


Fig.4.4 : Placement des pulsations de coupure.

Calculons l'équivalent asymptotique quand p tend vers 0 : $G(p) \approx 10$. Ceci implique, bien évidemment $G(\omega) \approx 10$, soit un gain de 20dB. Cette expression est valable pour $\omega < 1$ (jusqu'à la première coupure), ce qui nous permet de tracer le premier segment (figure 4.5).

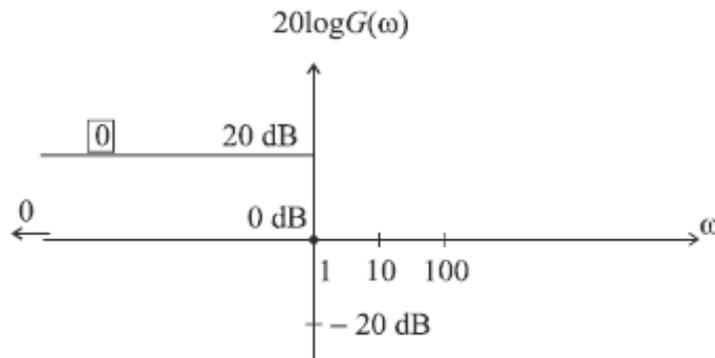


Fig.4.5. Tracé du premier segment.

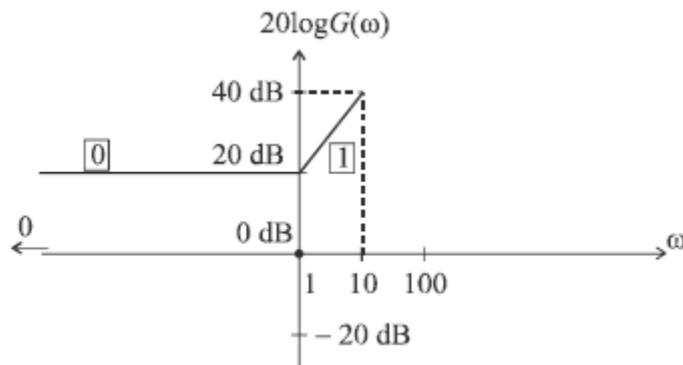


Fig.4.6 : Tracé du deuxième segment.

Au delà de la pulsation 1, le terme $(p+1)$ va introduire un changement d'équivalent : un terme en ω apparaît au numérateur de la fonction de transfert approchée, la pente du segment asymptotique correspondant augmente d'une unité (de 20dB par décade). Voir figure 4.6.

Et ce, jusqu'à la cassure suivante qui a lieu à la pulsation 10. Le terme $(p+10)$ étant au dénominateur, la pente diminue d'une unité, et ce jusqu'à la pulsation 100 où elle s'incrémente à nouveau (figure 4.7).

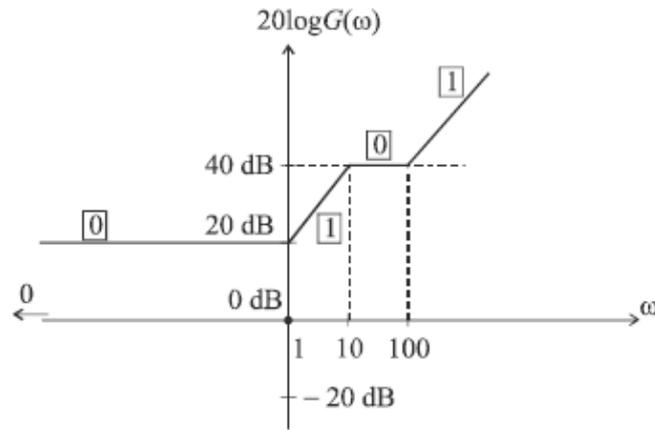


Fig.4.7 : Diagramme de Bode de gain du système.

4.3.4- Cas particuliers

a) Présence d'un terme en p au numérateur ou au dénominateur

On cherche toujours l'équivalent quand p tend vers 0, mais en prenant soin de laisser le p tel quel. Le diagramme asymptotique débute alors par une pente non nulle; on détermine le segment par deux points particuliers.

Considérons par exemple le système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{(p + 1)}{p(p + 10)}$$

Les deux pulsations de coupure sont facilement identifiées : 1 et 10. Par ailleurs, nous obtenons aisément un équivalent de la fonction de transfert lorsque p tend vers 0 :

$$G(p) \approx \frac{1}{10p} \text{ lorsque } p \rightarrow 0$$

Soit :

$$G(\omega) \approx \frac{1}{10\omega} \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0$$

L'équation du segment de droite correspondant dans le diagramme de Bode de gain est donc :

$$G_{dB} \approx 20 \log\left(\frac{1}{10\omega}\right) = -20 \log \omega - 20 \text{ dB}$$

Il nous suffit alors de deux points (ou d'un seul), par exemple :

$G_{dB}(1) = -20 \log 1 - 20 \text{ dB} = -20 \text{ dB}$, en considérant que la pente est connue, soit -20 dB/décade , pour tracer ce segment de droite qui constitue l'équivalent asymptotique considéré comme valable entre les pulsations 0 et 1 ($\omega = 1$ étant la première coupure détectée dans la fonction de transfert).

Le tracé des autres segments est immédiat (figure 4.8) : le terme en $(p+1)$ se trouvant au numérateur, la pente du segment s'incrémente d'une unité au passage de la pulsation 1. Le segment ainsi déterminé est valable jusqu'à la coupure suivante $\omega = 10$, pulsation à laquelle la pente de la courbe se décrémente d'une unité compte tenu que le terme en $(p+10)$ se trouve au dénominateur.

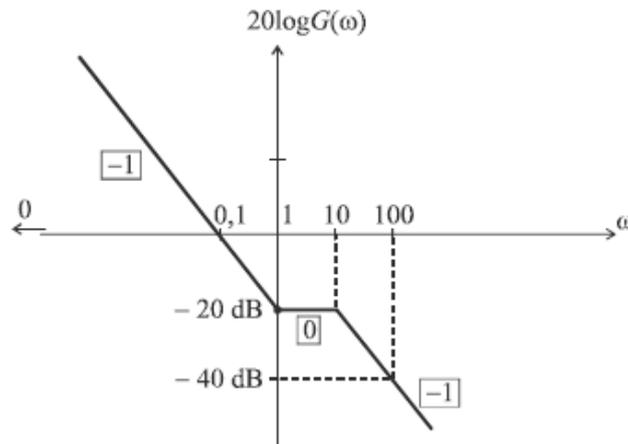


Fig.4.8 : Diagramme de Bode de gain du système

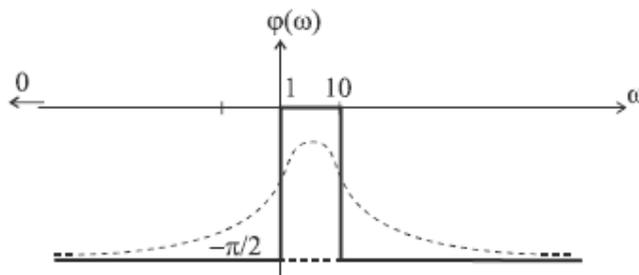


Fig.4.9: Diagramme de Bode de phase du système.

Compte tenu du choix des valeurs des pulsations de coupure, il est facile de positionner les pentes des segments avec précision, la pente d'ordre -1 correspondant à une chute de 20dB par décade.

Le diagramme de phase se déduit des pentes des segments du diagramme de gain : chaque pente d'ordre -1 correspond à une direction asymptotique de phase égale à $-\pi/2$; la pente d'ordre 0 nous donne une direction asymptotique de phase égale à 0. On peut, intuitivement, esquisser la courbe réelle (en pointillé sur la figure 4.9). La connaissance précise de la valeur maximale du déphasage ne peut se faire, bien entendu, que par le calcul.

b) Présence d'un terme au carré

Lorsqu'on passe la pulsation de coupure correspondante, on incrémente ou on décrémente la pente de deux unités (selon que terme est au numérateur ou au dénominateur).

Considérons par exemple le système de fonction de transfert :

$$G(p) = \frac{1000(p + 1)}{(p + 10)^2}$$

Les deux pulsations de coupure sont facilement identifiées: 1 et 10. Par ailleurs, nous obtenons aisément un équivalent de la fonction de transfert lorsque p tend vers 0 :

$$G(p) \approx 10 \text{ lorsque } p \rightarrow 0$$

Soit :

$$G(\omega) \approx 10 \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0$$

L'équation du segment de droite correspondant dans le diagramme de Bode de gain est donc : $G_{dB} \approx 20 dB$

Nous pouvons déjà tracer ce segment de droite horizontal qui constitue l'équivalent asymptotique considéré comme valable entre les pulsations 0 et 1 ($\omega = 1$ étant la première coupure détectée dans la fonction de transfert).

Le tracé du segment suivant est immédiat (figure 4.10) : le terme en $(p + 1)$ se trouvant au numérateur, la pente du segment s'incrémente d'une unité au passage de la pulsation 1. Le segment ainsi déterminé est valable jusqu'à la coupure suivante $\omega = 10$, pulsation à laquelle la pente de la courbe se décrémente de deux unités étant donné que le terme en $(p+10)$ est au dénominateur et se trouve élevé au carré.

Compte tenu du choix des valeurs des pulsations de coupure, il est facile de positionner les pentes des segments avec précision, la pente d'ordre 1 correspondant à une croissance de 20dB par décade, celle d'ordre -1 correspondant à une chute de 20dB par décade.

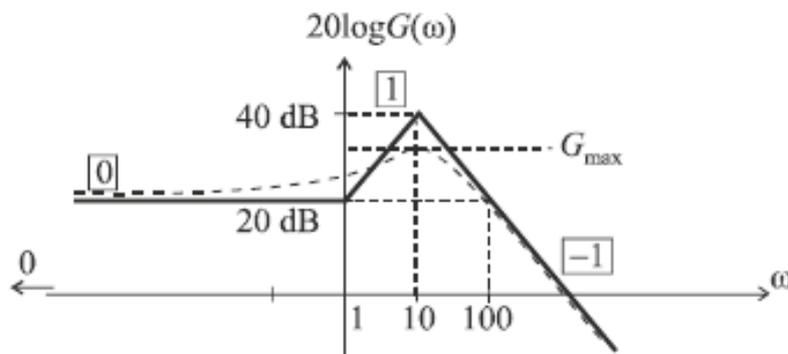


Fig.4.10 : Diagramme de Bode de gain du système.

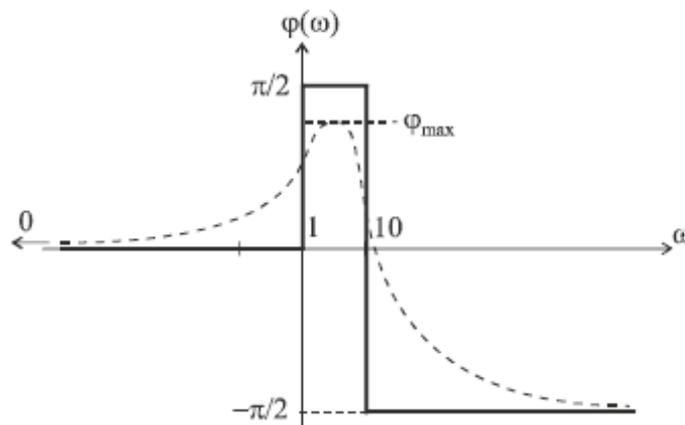


Fig.4.11 : Diagramme de Bode de phase du système.

Le diagramme de phase se déduit des pentes des segments dans le diagramme de gain : la pente d'ordre 0 nous donne une direction asymptotique de phase égale à 0, celle d'ordre 1 correspond à une direction asymptotique de $\pi/2$ et la pente d'ordre -1 correspond à une direction asymptotique de phase égale à $-\pi/2$. On peut, intuitivement, esquisser la courbe réelle (en pointillé sur la figure 4.11). Le tracé réel ne peut bien évidemment se faire de manière précise qu'en calculant des points particuliers (par exemple la valeur maximale φ_{max}).

4.4- Diagramme de Nyquist

Le diagramme de Bode constitue un moyen très efficace et facile d'accès pour représenter graphiquement le comportement fréquentiel d'un système. Toutefois, il est nécessaire de toujours effectuer deux graphes : gain et déphasage.

Le diagramme de Nyquist permet d'obtenir une représentation graphique de ce comportement sur un graphe unique. Plus délicat à tracer, il revêt néanmoins un intérêt primordial en automatique, comme nous le verrons à l'étude de la stabilité des systèmes asservis.

4.4.1- Définition

Le diagramme de Nyquist, ou lieu de Nyquist d'un système est le lieu, en coordonnées polaires, des points M de coordonnées $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ (figure 4.12).

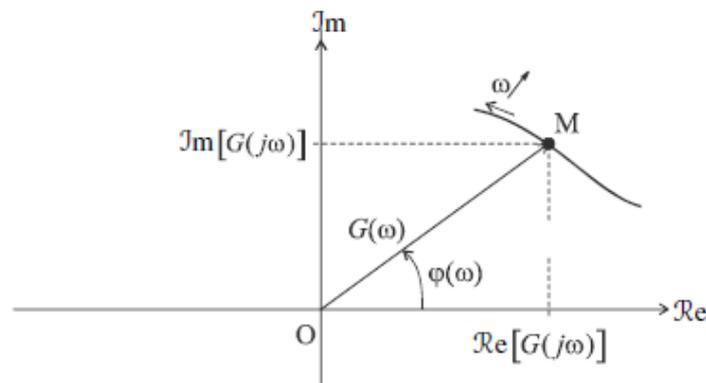


Figure 4.12 Définition du diagramme de Nyquist.

C'est aussi le lieu, dans le plan complexe, des points d'affixe $G(j\omega)$, donc de coordonnées $Re[G(j\omega)], Im[G(j\omega)]$ dans ce plan.

Il est d'usage d'orienter le graphe dans le sens des ω croissants et parfois, de graduer la courbe en ω .

4.4.2- Méthode de tracé rapide

On peut certes, pour tracer le diagramme de Nyquist d'un système, réaliser l'étude complète en coordonnées polaires du lieu des points M de coordonnées $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, voire même faire cette étude en coordonnées cartésiennes paramétrées $Re [G(j\omega)], Im[G(j\omega)]$.

On peut néanmoins réaliser un tracé sommaire d'un lieu de Nyquist quelconque à partir du diagramme de Bode en reportant dans le plan complexe, du mieux possible et en balayant les axes des pulsations de 0 à $+\infty$, chaque couple de points $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ relevés respectivement sur le diagramme de Bode de gain et sur celui de phase.

Reprenons l'exemple traité précédemment avec :

$$G(p) = \frac{1000(p + 1)}{(p + 10)^2}$$

Les figures 4.10 et 4.11 présentent les fonctions $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. Nous pouvons déjà placer dans le plan complexe le point de départ du lieu de Nyquist, en relevant, dans les diagrammes de Bode, les valeurs du gain et du déphasage pour $\omega = 0$.

On a : $G(0) = 10$ et $\varphi(0) = 0$

Soit A ce point de départ.

Remarque : Il n'est plus question de gain en décibels dans le diagramme de Nyquist ; c'est bien la valeur du gain réel qui y est représentée.

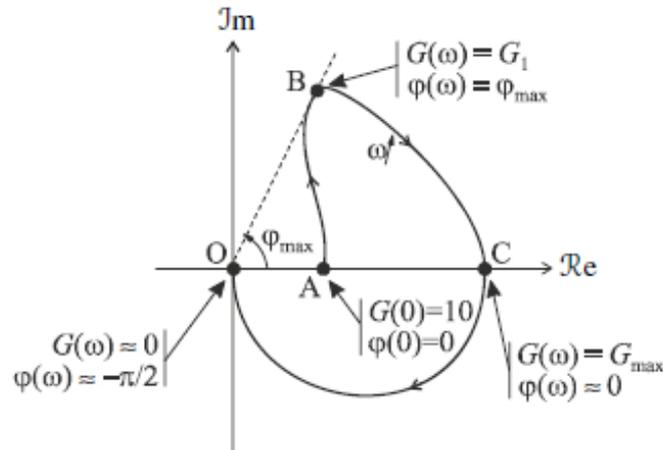


Fig.4.13 : Diagramme de Nyquist du système.

Lorsque ω commence à croître, le gain augmente tandis que l'angle $\varphi(\omega)$ croît jusqu'à une valeur φ_{\max} (figures 4.10 et 4.11). Cette évolution nous permet d'effectuer le tracé de la portion AB de la courbe de Nyquist (figure 4.13).

On remarquera, sur les diagrammes de Bode, que ce maximum de phase ne correspond pas au maximum de gain : le gain continue de croître jusqu'à sa valeur maximale, tandis que $\varphi(\omega)$ se remet à décroître. La valeur maximale G_{\max} du gain est atteinte pour une valeur de $\varphi(\omega)$ visiblement voisine de 0, ce qui nous amène au point C.

Enfin, tandis que le gain décroît de cette valeur maximale jusqu'à 0 ($-\infty$ en décibels), le déphasage continue sa décroissance jusqu'à $-\pi/2$. La dernière portion de courbe nous conduit donc au point O tangentiellement à l'axe des imaginaires puisque $\varphi(\omega)$ tend vers $-\pi/2$.

Remarque : Hormis les diagrammes de Bode et de Nyquist, il existe d'autres modes de représentation du comportement fréquentiel d'un système linéaire. Nous nous limiterons toutefois à ces deux types de graphe qui constituent les outils qui nous seront nécessaires lorsque nous aborderons l'étude des systèmes asservis.

Exemple : On considère le système de fonction de transfert $G(p)$ définie par :

$$G(p) = \frac{2}{(2p + 1)(p + 1)\left(\frac{p}{2} + 1\right)}$$

Tracer le diagramme de Nyquist de ce système.