5.1- Notion de stabilité d'un système

5.1.1- Définition de la stabilité

On dira qu'un système linéaire est stable si, après avoir soumis son entrée à une brusque variation (échelon unité, par exemple) :

- ✓ le mouvement amorcé par sa sortie reste borné en amplitude (c'est à dire que la sortie garde une valeur finie)
- ✓ ce mouvement s'amortit plus ou moins vite et la sortie tend vers un état d'équilibre.

Les réponses indicielles des figures 5.1 et 5.2 correspondent à celles de systèmes stables. Nous retrouvons les critères cités ci-dessus.

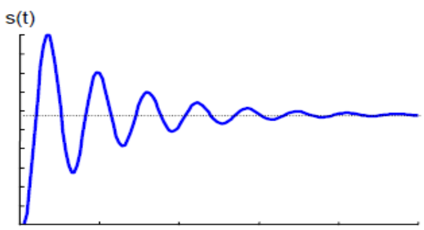

Fig 5.1: Système oscillatoire amorti(stable)

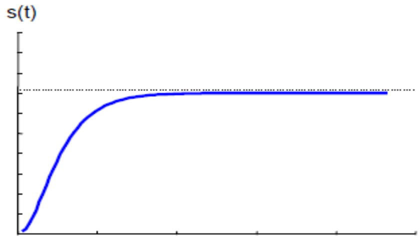

Fig 5.2: Système non oscillatoire amorti (stable)

La figure 5.3 est un cas de système instable. Les oscillations sont de plus en plus importantes et le système ne retrouve pas son état d'équilibre.

Physiquement, un système instable dont la réponse croit sans limite peut se causer des dommages ou en causer à autrui (danger pour l'être humain). En pratique, la majorité des systèmes sont conçus avec des dispositifs de limitation.

Si on considère le cas où des oscillations persistent indéfiniment (cas du pompage de la figure 5.4), on peut considérer le système comme stable (système marginalement stable) puisque sa sortie garde une valeur finie, à condition que l'amplitude ne soit pas trop grande.

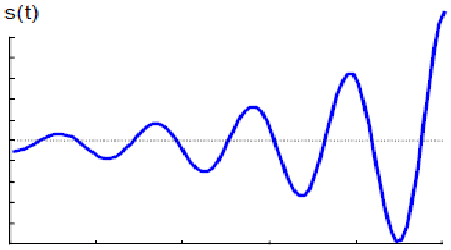

Fig 5.3: Système oscillatoire divergent (instable)

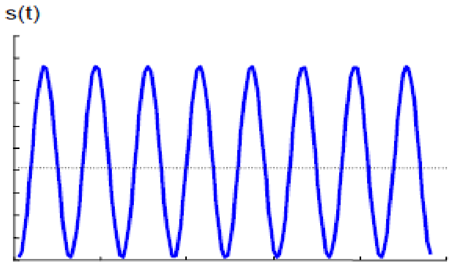

Fig 5.4: Système oscillatoire (Marginalement stable)

La stabilité est une condition impérative. Pour que les systèmes soient utilisables en asservissement, il est absolument nécessaire que les fonctions de transfert en boucle fermée FTBF soient stables. Ceci n'implique toutefois pas que les FTBO soient stables.

5.1.2- Aspect mathématique de la stabilité

Considérons un système asservi quelconque dont la fonction de transfert est:

$$H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

Si on envoie sur l'entrée un échelon unité E(p)=1/p, alors :

$$H(p) = \frac{1}{p}\,\frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

Nous avons vu précédemment, que S(p) pouvait se mettre sous la forme d'un quotient de polynômes du Type $\frac{N(p)}{D(p)}$ et que celui-ci pouvait se décomposer en une somme de fractions rationnelles : $S(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{C_1}{p-p_1} + \cdots + \frac{C_n}{p-p_n}$
Où les p_i sont les racines réelles ou complexes de $D(p)$.

Prenons, par exemple, le cas où le dénominateur contient des racines nulles (pôles multiples), des racines réelles (pôles réels) et des racines complexes. C'est-à-dire qu'il est de la forme :

$$D(p) = p^{n_0}(p - p_1)\dots(p - p_{n_1})[(p - \alpha_1)^2 + \omega_1^2]\dots\left[\left(p - \alpha_{n_2}\right)^2 + \omega_{n_2}^2\right]$$

La décomposition de S(p) en fractions rationnelles sera :

$$S(p) = \sum_{i=1}^{i=n_0}\frac{A_i}{p^i} + \sum_{k=1}^{k=n_1}\frac{B_k}{p - P_k} + \sum_{j=1}^{j=n_2}\frac{C_j p + D_j}{(p - \alpha_j)^2 + \omega_j}$$

Les racines complexes étant $\alpha_j \pm j\,\omega_j$ (α_j partie réelle, ω_j partie imaginaire), cherchons l'original s(t) de S(p) qui est la réponse du système à un échelon unité. On trouve :

$$s(t) = A_1 + \sum_{i=2}^{i=n_0}\frac{A_i t^{(i-1)}}{(i-1)!} + \sum_{k=1}^{k=n_1} B_k.e^{P_k t} + \sum_{j=1}^{j=n_2} F_j.e^{\alpha_j t}.\sin(\omega_j t + \varphi_j)$$

On constate donc que la *sortie garde une valeur finie* quand t → ∞, si les conditions suivantes sont remplies :

- ✓ Les p_k et les α_j doivent être négatifs pour que les exponentielles correspondantes soient décroissantes.
- ✓ Les A_i doivent être nuls sauf A_1.

Nous verrons dans la suite que pour certaines fonctions de transfert, la présence de pôles multiples nuls n'entraîne pas forcément une augmentation infinie de la sortie.
En effet, les termes en 1/p ont une action d'intégration, leur influence peut être combattue par des actions de dérivation provenant de terme en p au numérateur. S'il n'en est pas ainsi, le système possédant des pôles multiples à l'origine au dénominateur de sa fonction de transfert est dit " intrinsèquement instable ", c'est-à-dire qu'aucune modification des coefficients ne peut le rendre stable.

5.1.3- Conditions de stabilité

Un système linéaire est stable si aucune des racines du dénominateur de sa fonction de transfert n'a de partie réelle positive.
Cela exclut :

- ✓ Les racines réelles positives.
- ✓ Les racines complexes à parties réelles positives.

On peut formuler ceci autrement :

- ✓ Un système asservi bouclé est stable si tous les pôles de la FTBF sont localisés dans le demi-plan gauche du plan complexe.

- ✓ Un système asservi bouclé est instable si sa FTBF comprend, au moins, un pôle localisé dans le demi-plan droit du plan complexe et/ou des pôles de multiplicité> 1 sur l'axe imaginaire.
- ✓ Si le système comprend une seule paire de pôle sur l'axe imaginaire ou un pôle unique à l'origine, le système est dit marginalement stable. Sa réponse sera oscillatoire non amortie ou non oscillatoire à variation constante lorsque t → ∞.

La figure 5.5 récapitule les cas possibles suivant le signe et la nature des racines.

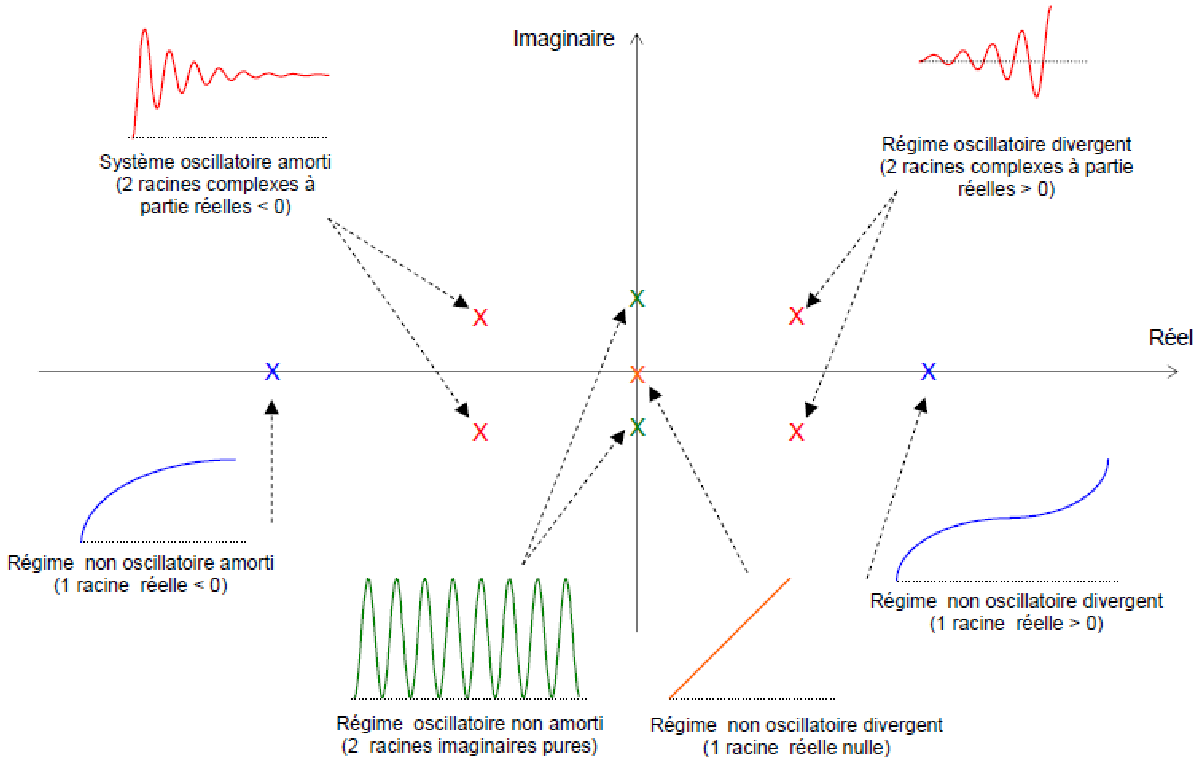

Fig 5.5 : Récapitulatif des comportements des systèmes selon la position et le signe des pôles (selon les réponses indicielles).

Mais les conditions de stabilité ainsi définies ne sont pas suffisantes pour caractériser un système asservi : un système très mal amorti sera inutilisable, il faudra donc toujours définir des marges dites de sécurité sur les coefficients d'amortissement.

Remarque à propos des systèmes instables

Quand on a affaire à un système instable, sa sortie tend théoriquement vers l'infini si on soumet son entrée à une brusque variation. En réalité, sa sortie ne tend pas vers l'infini, mais vers une valeur qui correspond à la saturation. Cette valeur peut être très grande et conduire à la destruction du système. En tout état de cause, dans le cas où la fonction de transfert a des pôles à parties réelles positives, le système sort rapidement de son domaine de linéarité et ses équations ne sont plus valables.

5.2- Etude de la stabilité d'un système bouclé

Le système asservi bouclé de la figure 5.6 a pour fonction de Transfert :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

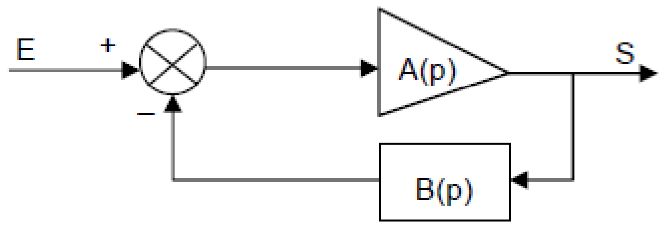

Fig 5.6 : Schéma fonctionnel d'un système asservi bouclé

Sa stabilité est conditionnée par le signe des parties réelles des racines du dénominateur.
Il suffira, donc, d'étudier l'équation : 1 + A(p).B(p) = 0, et de chercher le signe de ses racines.
Plusieurs moyens sont possibles pour y arriver :

a) 1er moyen : Calculer les racines de 1 + A(p).B(p) = 0

Cette méthode est bonne puisqu'elle nous donne également les valeurs des racines en plus de leurs signes. Mais elle est pratiquement inapplicable à cause de la grande difficulté qu'elle présente si le degré du polynôme est important. L'usage d'un ordinateur peut simplifier le travail, car il peut aussi tracer le lieu des racines quand on fait varier les paramètres. C'est une méthode très puissante.

b) 2ème moyen : Discuter le signe des racines sans les calculer, à partir des coefficients du dénominateur (critère de Routh-Hurwitz)
Malheureusement, si le système trouvé est instable, on ne sait pas sur quel paramètre il faut agir pour le rendre stable. Il faut en plus connaître la fonction sous sa forme mathématique.

c) 3ème moyen : Utiliser le critère de Nyquist (méthode graphique).

Cette méthode est intéressante car elle n'a pas les inconvénients du critère de Routh. A savoir, on peut utiliser directement les résultats expérimentaux sans connaître les équations du système et elle montre graphiquement sur quels paramètres on peut agir pour rendre le système stable.

5.3- Critère de Routh - Hurwitz

5.3.1- Enoncé du critère

Soit P(p) le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée. P(p) peut être écrit sous la forme :

$$P(p) = 1 + A(p).B(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n$$

(Équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée)
Pour que le système soit stable, il faut et il suffit que les racines de P(p) n'aient pas de parties réelles positives.

a - Critère d'Hurwitz

Ce critère (nécessaire mais pas suffisant) indique que le système est instable si les a_i sont de signes différents ou certains sont nuls.

b - Critère de Routh-Hurwitz

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est alors que tous les termes de la 1ère colonne du tableau de Routh soient de même signe.
On construit le tableau de Routh de la manière suivante :

Pour $P(p) = 1 + A(p).B(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n$, le tableau de Routh est simplement une matrice carrée avec une ligne pour chaque puissance de p dans le polynôme de l'équation caractéristique.

p^n :	✓ $1^{ère}$ ligne : coefficients des termes en p^{n-2k} (avec k = 0,1, 2,…)
P^{n-1} :	✓ $2^{ème}$ ligne : coefficients des termes en $p^{n-(2k+1)}$ (avec k = 0,1, 2,…)
P^{n-2} :	✓ $3^{ème}$ ligne : combinaison des 2 lignes précédentes
P^{n-3} :	✓ $4^{ème}$ ligne : combinaison des 2 lignes précédentes
⋮	
P^0 :	✓ dernière ligne : combinaison des 2 lignes précédentes

Si, par exemple, $P(p) = a_0p^7 + a_1p^6 + a_2p^5 + a_3p^4 + a_4p^3 + a_5p^2 + a_6p^1 + a_7$, alors le tableau de Routh se construit comme suite :

P^7 :	a_0	a_2	a_4	a_6
P^6 :	a_1	a_3	a_5	a_7
P^5 :	$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}$	$b_3 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}$	$b_5 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}$	
P^4 :	$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{b_1a_5 - a_1b_5}{b_1}$	$c_5 = \frac{b_1a_7 - a_1.0}{b_1} = a_7$	
P^3 :	$d_1 = \frac{c_1b_3 - b_1c_3}{c_1}$	$d_3 = \frac{c_1b_5 - b_1c_5}{c_1}$		
P^2 :	$e_1 = \frac{d_1c_3 - c_1d_3}{d_1}$	$e_3 = \frac{d_1c_5 - c_1.0}{d_1} = c_5$		
P^1 :	$f_1 = \frac{e_1d_3 - d_1e_3}{e_1}$			
P^0 :	$g_1 = \frac{f_1e_3 - e_1.0}{f_1} = e_3$			

Routh a démontré que le nombre de " pôles instables " (c'est-à-dire le nombre de pôles à partie réelle positive) de la fonction de transfert en boucle fermée est égal au nombre de changement de signe que comporte la $1^{ère}$ colonne, lue de haut en bas.
Si ce nombre est différent de zéro, alors le système est instable.

Remarques

Cette méthode a l'avantage d'être rapide est exacte, mais elle ne donne pas une mesure de la stabilité comme les autres critères; car elle se borne à dire si le système est stable ou non. De plus, elle est inapplicable si on ne connaît pas l'expression mathématique de la fonction de transfert.
Le critère de Routh est intéressant pour connaître le nombre de racines réelles positives, mais il est incapable de donner des renseignements sur l'amortissement du système quand celui-ci est stable.
La méthode est cependant en défaut dans les 2 cas suivants :

- ✓ Si tous les coefficients d'une ligne sont nuls.
- ✓ Si un terme de la $1^{ère}$ colonne de gauche est nul à l'exclusion des autres termes de la même ligne.

Exemple 1

$P(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K$ (K gain variable)
$1^{ère}$ condition (critère d'Hurwitz) : $1 + K > 0 \rightarrow K > -1$

$2^{ème}$ condition (critère de Routh-Hurwitz) : tableau de Routh

p^3 :	1	2
p^2 :	3	$1+K$
p^1 :	$\frac{9-(1+K)}{3}$	
p^0 :	$1+K$	

Pour que le système soit stable, il faudrait que : $\begin{cases} \frac{9-(1+K)}{3} > 0 \\ 1+K > 0 \end{cases}$

C'est-à-dire : $-1 < K < 8$ (condition nécessaire et suffisante de stabilité)

Si cette condition n'est pas vérifiée, c'est-à-dire, si :

- ✓ K<-1, il y a 1 seul changement de signe dans la $1^{ère}$ colonne; donc un seul pôle instable.
- ✓ K> 8, il y a 2 changement de signe dans la $1^{ère}$ colonne; donc 2 pôles instables.
- ✓ Si (K=-1 ou K=8), (frontière entre la stabilité et l'instabilité) on dit que le système est oscillant (marginalement stable).

Exemple 2 (ligne complète de zéros)

Nous avons dit que si une ligne complète était composée de zéro, la méthode était en défaut. En fait, il est quand même possible d'en tirer des conclusions moyennant certains aménagements.

Si $P(p) = p^5+7p^4+6p^3+42p^2+8p+56$

Alors, le tableau de Routh est :

P^5 :	1	6	8	
P^4 :	7→1	42→6	56→8	Division de la ligne par 7
p^3 :	0	0		
p^2 :	-	-		
p^1 :	-			
p^0 :	-			

La $3^{ème}$ ligne est nulle. On substitue alors à cette ligne les coefficients obtenus en différentiant une fonction fictive, appelée polynôme auxiliaire, construite sur la ligne précédant la ligne nulle. Le polynôme auxiliaire pour l'exemple en cours s'écrit :

$$Q(p) = p^4+6p^2+8$$

Si nous le dérivons, par rapport à p, nous obtenons alors :

$$\frac{dQ(p)}{dp} = 4p^3 + 12p + 0$$

Les coefficients de ce polynôme remplacement ceux de la ligne nulle dans le tableau initial. Le tableau devient alors :

P^5 :	1	6	8
P^4 :	1	6	8
p^3 :	4→1	12→3	
p^2 :	3	8	
p^1 :	1/3		
p^0 :	8		

Il n'y a aucun changement de signe sur la 1ère colonne du tableau, donc aucune racine à partie réelle positive. Le système est donc stable.

Exemple 3 (un zéro sur la première colonne)

Si le premier élément de la ligne est nul, la ligne suivante ne pourra pas être calculée car il y aurait une division par zéro. Pour éviter cela, on utilise un nombre de valeur très faible ε (epsilon) pour remplacer le zéro de la première colonne. ε peut tendre vers zéro par valeur positive ou négative, pour permettre par la suite le calcul du nombre de changement de signe de la première colonne.

Considérons le système dont la FTBF

$$G(p) = \frac{10}{p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3}$$

$P(p) = p^5 + 2p^4 + 3p^3 + 6p^2 + 5p + 3$

Alors, le tableau de Routh est :

***P⁵* :**	1	3	5
***P⁴* :**	2	6	3
***p³* :**	$0 \to \varepsilon$	$7/2$	
***p²* :**	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	3	
***p¹* :**	$\frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$		
***p⁰* :**	3		

Considérons uniquement le changement de signe dans la première colonne et calculons le signe de chaque ligne dans les 2 cas ($\varepsilon \to 0^+$ et $\varepsilon \to 0^-$) :

	1ère colonne	$\varepsilon \to 0^+$	$\varepsilon \to 0^-$
***P⁵* :**	1	+	+
***P⁴* :**	2	+	+
***p³* :**	$0 \to \varepsilon$	+	-
***p²* :**	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	-	+
***p¹* :**	$\frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$	+	+
***p⁰* :**	3	+	+

Si ε est choisi positif, il y a 2 changements de signe. S'il est choisi négatif, il y a également 2 changements de signe. Le système a donc 2 pôles dans le demi-plan droit du plan complexe (2 pôles instables) et ce n'est pas important si nous choisissons d'approcher le zéro par valeur positive ou négative. Ceci est toujours le cas.