

En prenant une estimation initiale $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ et en utilisant le système (3) on calcule $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ ensuite on remplace le vecteur $X^{(1)}$ dans le système (3) avec $k=1$ on calcule $X^{(2)}$ et continue de la même façon de calculer les vecteurs $X^{(3)}, X^{(4)}, X^{(5)}, \dots$ jusqu'à la convergence.

Exemple :

Résoudre par la méthode de Jacobi en utilisant 3 itérations et un vecteur initial $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le

$$\text{système} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Le système s'écrira en forme réduite :

$$\begin{cases} x_1 = (-1 - x_2 - 3x_3)/-1 \\ x_2 = (2 - x_1)/2 \\ x_3 = (1 - 3x_1 - x_2)/-1 \end{cases} \quad \text{sera} \quad \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 + 3x_3 \\ x_2 = 1 - x_1/2 \\ x_3 = -1 + 3x_1 + x_2 \end{cases}$$

- 1^{ère} itération :

$$\begin{cases} x_1^1 = 1 + x_2^0 + 3x_3^0 \\ x_2^1 = 1 - x_1^0/2 \\ x_3^1 = -1 + 3x_1^0 + x_2^0 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^1 = 1 \\ x_2^1 = 1 \\ x_3^1 = -1 \end{cases}$$

- 2^{ème} itération

$$\begin{cases} x_1^2 = 1 + x_2^1 + 3x_3^1 \\ x_2^2 = 1 - x_1^1/2 \\ x_3^2 = -1 + 3x_1^1 + x_2^1 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^2 = -1 \\ x_2^2 = 0.5 \\ x_3^2 = 3 \end{cases}$$

- 3^{ème} itération :

$$\begin{cases} x_1^3 = 1 + x_2^2 + 3x_3^2 \\ x_2^3 = 1 - x_1^2/2 \\ x_3^3 = -1 + 3x_1^2 + x_2^2 \end{cases} \quad \text{cela donne} \quad \begin{cases} x_1^3 = 10,5 \\ x_2^3 = 1,5 \\ x_3^3 = -3,5 \end{cases}$$

4- Méthode de Gauss-Seidel :

La méthode de Gauss-Seidel est une amélioration de la méthode de Jacobi en effet elle rend le processus itératif plus rapide.

Partons de la méthode de Jacobi, le calcul des vecteurs $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}, \dots$ mène à la convergence, cela veut dire que chaque nouveau vecteur est meilleur que le précédent. On remarque dans la méthode de Jacobi que pour calculer la composante $x_2^{(2)}$ du vecteur $X^{(2)}$ on utilise celles de $X^{(1)}$ malgré que $x_1^{(2)}$ est déjà calculée et elle est meilleure que $x_1^{(1)}$. D'ici vient le principe de la méthode de Gauss-Seidel, on utilise chaque composante des quelle sera calculée. Ainsi, pour

5- Condition de convergence des méthodes itératives

Pour que les méthodes itératives de résolution des systèmes d'équations linéaires convergent il faut que la matrice A soit diagonalement dominante ce qui est très facile à vérifier.

On dit qu'une matrice est diagonalement dominante si la valeur absolue de l'élément de la diagonale est supérieure à la somme des valeurs absolues de tous les autres éléments sur la même ligne. On écrit donc :

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \dots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \dots + |a_{in}| \quad (5)$$

$$a_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Avec i variable entre 1 et n le nombre de lignes ou de colonnes de la matrice.

6- Critère d'arrêt de calcul pour la méthode de Jacobi et Gauss-Seidel

On arrête les calculs pour cette méthode lorsque la différence absolue entre deux itérations successives soit inférieure à une certaine précision ε donnée.

$$|X^{(n+1)} - X^{(n)}| < \varepsilon \quad (6)$$

Ici, il faut vérifier la différence pour toutes les composantes une par une.

$$\left| x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} \right| < \varepsilon, \left| x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} \right| < \varepsilon, \dots, \left| x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)} \right| < \varepsilon$$