Université de Relizane

Faculté des Sciences et Technologie

Département de Génie Mécanique

-2021/2022-

Mécanique des milieux continus

S5- 3ème GM

Chap3 : États de contrainte et de déformation

1. Equations d'équilibre

$\vec{f}$ la force par unité de volume appliquée au point de coordonnées (x, y, z) du solide.
Soient $\vec{\gamma}$ l'accélération du point de coordonnées (x, y, z) et ρ la masse volumique du matériau.

1.1. Equilibre en translation

La projection sur x de la somme des forces appliquées au parallélépipède rectangle infiniment petit, de centre M et de côtés dx, dy et dz, est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure 2.6 :

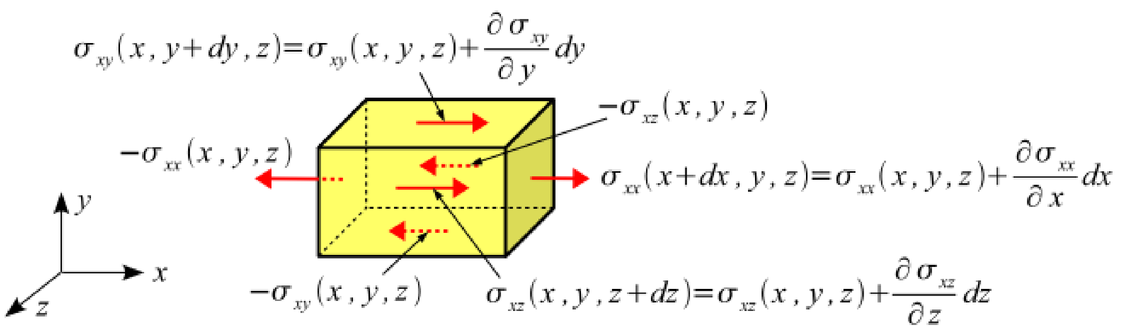


Fig. 2.6 Equilibre du parallélépipède suivant x.

$$
\begin{aligned}
&-\sigma_{xx}(x,y,z)\,dy\,dz+\sigma_{xx}(x+dx,y,z)\,dy\,dz\\
&-\sigma_{xy}(x,y,z)\,dx\,dz+\sigma_{xy}(x,y+dy,z)\,dx\,dz\\
&-\sigma_{xz}(x,y,z)\,dx\,dy+\sigma_{xz}(x,y,z+dz)\,dx\,dy+f_x\,dx\,dy\,dz\\
=&\ \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\,dV+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}\,dV+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\,dV+f_x\,dV=\rho\,dV\,\gamma_x
\end{aligned}
$$

Où $\rho \boldsymbol{dV} = \boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{dV} = \boldsymbol{dx.dy.dz}$. Il vient après simplification :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = \rho\,\gamma_x$$

De même :

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = \rho\,\gamma_y$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = \rho\,\gamma_z$$

1.2. Equilibre en rotation : réciprocité des contraintes tangentielles

La projection sur $\boldsymbol{M_z}$ de la somme des moments des forces appliquées au parallélépipède est nulle (les contraintes qui interviennent sont représentées sur la figure (2.7) :

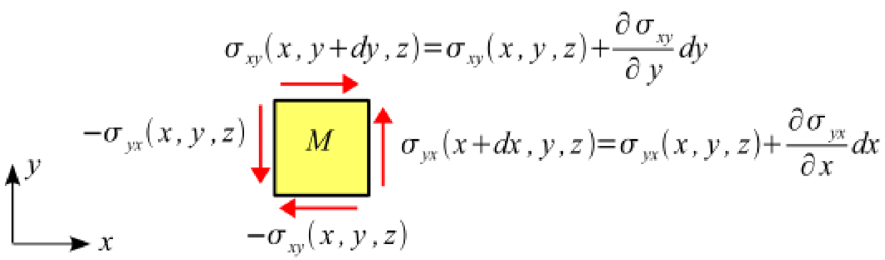


Fig. 2.7 Equilibre du parallélépipède en rotation suivant z

$$dx\,(dy\,dz\,\sigma_{yx}) - dy\,(dx\,dz\,\sigma_{xy}) = 0$$

Soit (réciprocité des contraintes tangentielles) :

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

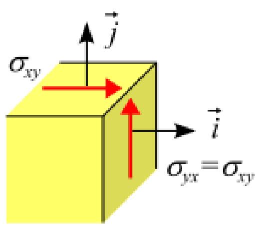


Fig. 2.8 Réciprocité des contraintes tangentielles

De même :

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad , \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

Dans le cas général, la somme des moments est :

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}} \wedge \vec{\boldsymbol{F}}$$

$$\vec{M} = dx\vec{i} \wedge dydz\sigma_{xy}\vec{j} + dx\vec{i} \wedge dydz\sigma_{xz}\vec{k} + dy\vec{j} \wedge dxdz\sigma_{yx}\vec{i} + dy\vec{j} \wedge dxdz\sigma_{yz}\vec{k} + dz\vec{k} \wedge dxdy\sigma_{zx}\vec{i} + dz\vec{k} \wedge dxdy\sigma_{zy}\vec{j}$$

A l'équilibre, on doit avoir $\vec{M} = \vec{0}$, d'où $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

Le tenseur des contraintes doit donc être symétrique.

$$[\sigma] = [\sigma]^{\mathrm{T}}$$

2. État de contrainte dans un point

a) *État plan de contrainte*

Existe-t-il en M une facette $\vec{n}$ telle que le vecteur contrainte soit colinéaire avec $\vec{n}$ (figure 3.1) ? Dans ce cas, le vecteur cisaillement est nul sur cette facette et le vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$ satisfait la relation :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_n \, \vec{n}$$

$$[\sigma(M)]\{n\} = \sigma_n \, \{n\}$$

σ_n est alors valeur propre du tenseur des contraintes et $\vec{n}$ est le vecteur propre associé.

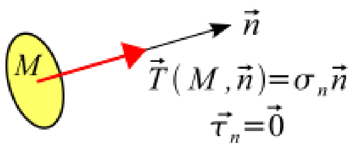


Fig. 3.1 Face et contrainte principale en M

Exemple :

Considérons la matrice associée au tenseur des contraintes suivante :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

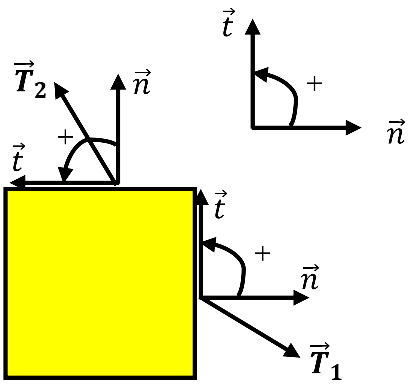
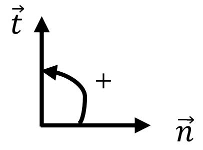


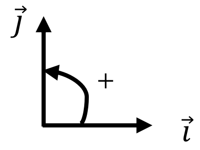
Fig. 3.2 Définition des contraintes géométriquement

$$\vec{T}_1 = 1.5\vec{\imath} - 0.5\vec{\jmath}$$

$$\vec{T}_2 = -0.5\vec{\imath} + 0.5\vec{\jmath}$$



Repère local



Repère géométrique

Vecteur contrainte sur une facette quelconque de normale unitaire $\vec{\boldsymbol{n}}$

$$\vec{n} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$$
$$\vec{t} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$$

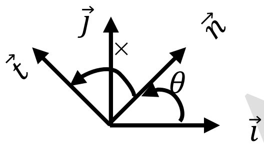


Fig. 3.3 Repère géométrique et repère local

D'après la relation de Cauchy :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta \\ \tau_{yx}\cos\theta + \sigma_{yy}\sin\theta \end{bmatrix}$$

La composante normale du vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$

$$\sigma_n = \{n\}^T \underbrace{[\sigma]\{n\}}_{\vec{T}(M,\vec{n})} = [\cos\theta \quad \sin\theta] \begin{bmatrix} \sigma_{xx}\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta \\ \tau_{yx}\cos\theta + \sigma_{yy}\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= \sigma_{xx}\cos^2\theta + \tau_{xy}\cos\theta\sin\theta + \tau_{yx}\sin\theta\cos\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta$$

$$= \sigma_{xx}\cos^2\theta + \sigma_{yy}\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\cos\theta\sin\theta$$

La composante tangentielle du vecteur contrainte $\vec{T}(M,\vec{n})$

$$t = \{t\}^T \underbrace{[\sigma]\{n\}}_{\vec{T}(M,\vec{n})} = [-\sin\theta \quad \cos\theta] \begin{bmatrix} \sigma_{xx}\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta \\ \tau_{yx}\cos\theta + \sigma_{yy}\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$= -\sigma_{xx}\cos\theta\sin\theta + \tau_{xy}\cos^2\theta - \tau_{yx}\sin^2\theta + \sigma_{yy}\sin\theta\cos\theta$$

$$= (\sigma_{yy} - \sigma_{xx})\cos\theta\sin\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

b) ***<u>Contraintes principales</u>***

Le tenseur des contraintes principales est tel que, les composantes tangentielles sont nulles.

Exemple :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{Contraintes\ principales \rightarrow valeurs\ propres\ de\ la\ matrice\ associ\acute{e}e\ au\ tenseur\ des\ contraintes}$

Les valeurs propres sont les solutions de l'équation :

$$\boldsymbol{det|[\sigma] - \sigma[I]| = 0}$$

$[\boldsymbol{I}]$ est la matrice identité

$$[\boldsymbol{I}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{det} \begin{vmatrix} \mathbf{1.5} - \boldsymbol{\sigma} & -\mathbf{0.5} \\ -\mathbf{0.5} & \mathbf{0.5} - \boldsymbol{\sigma} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$= (\mathbf{1.5} - \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{0.5} - \boldsymbol{\sigma}) - (-\mathbf{0.5})(-\mathbf{0.5}) = \mathbf{0}$$

$$= \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{2}} - \mathbf{2}\boldsymbol{\sigma} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0}$$

$\Delta > \mathbf{0}$ admet deux solutions

Contrainte principale majeure :

$$\sigma_I = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma_1} = \frac{\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \approx \mathbf{1.7072}\boldsymbol{MPa} = \boldsymbol{\sigma_I}$$

Contrainte principale mineure :

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\boldsymbol{\sigma_2} = \frac{\mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \approx \mathbf{0.2929}\boldsymbol{MPa} = \boldsymbol{\sigma_{II}}$$

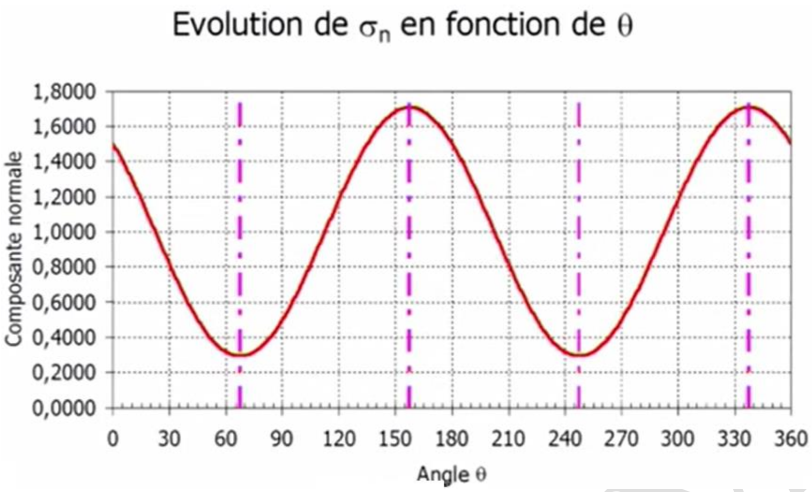
Dans le repère principal $\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2\}$, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$[\sigma]_{\{M,\vec{n}_1,\vec{n}_2\}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma_2} \end{bmatrix}$$

Où les contraintes normales $\boldsymbol{\sigma_1}$et $\boldsymbol{\sigma_2}$ sont les contraintes principales.

Si on varie θde 0° $\rightarrow 360°$:

- Nous observons une valeur maximale et une valeur minimale pour la composante normale ;
- Nous observons deux extrémas ($\|max\| = \|min\|$) pour la composante tangentielle ;



c) Directions principales

Directions de l'espace géométrique telle que, dans ces directions, les composantes tangentielles sont nulles.

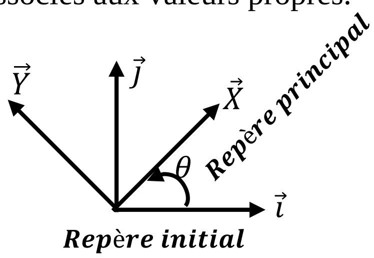
$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + 0\vec{t}$$

$$\boldsymbol{Directions\ principales \rightarrow vecteurs\ propres\ des\ contraintes\ principales}$$

Directions principales sont portées par les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

$$\vec{X} = cos\ \theta \vec{\imath} + sin\ \theta \vec{\jmath}$$

$$\vec{Y} = -sin\ \theta \vec{\imath} + cos\ \theta \vec{\jmath}$$



Composante tangentielle du vecteur contrainte :

$$\tau = (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) cos\ \theta sin\ \theta + \tau_{xy}(cos^2\theta - sin^2\theta) = 0$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) cos\ \theta sin\ \theta = \tau_{xy}(cos^2\theta - sin^2\theta)$$

$$\frac{cos\ \theta sin\ \theta}{cos^2\theta - sin^2\theta} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

D'où

$$sin\ 2\theta = 2cos\ \theta sin\ \theta$$

$$sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

Alors

$$\boxed{\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} = \tan 2\theta}$$

$$\vec{X} = 0.9239\vec{\imath} - 0.3827\vec{\jmath}$$

$$\vec{Y} = 0.3827\vec{\imath} + 0.9239\vec{\jmath}$$

$$\theta = -22.5°$$

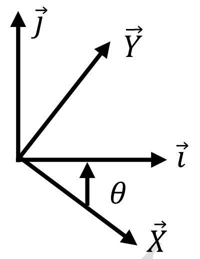


Fig. 3.4 Repère initial et repère principal

θ est l'angle entre le repère initial et le repère principal

$$\boxed{\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}}$$

d) ***Représentation du Cercle de MOHR en mécanique des milieux continus***

Le cercle de Mohr est une représentation graphique des états de contrainte à dimensions, proposée par Christian Otto Mohr en 1882.

Dans un graphique où l'axe horizontal représente l'amplitude de la contrainte normale et l'axe vertical représente l'amplitude de la contrainte de cisaillement, le cercle de Mohr est le lieu des états de contrainte en un point M lorsque le plan de coupe tourne autour du point M. Il s'agit d'un cercle centré sur l'axe horizontal dont les intersections avec l'axe horizontal correspondent aux deux contraintes principales au point M.

Ce cercle se construit à partir de la connaissance des efforts extérieurs auxquels est soumis de la pièce. Il permet de déterminer :

- Les directions principales, ainsi que les contraintes principales ;
- La direction pour laquelle on a la cission τ maximale, qui est donc la direction de rupture probable (l'orientation du faciès de rupture), ainsi que la valeur de cette contrainte.

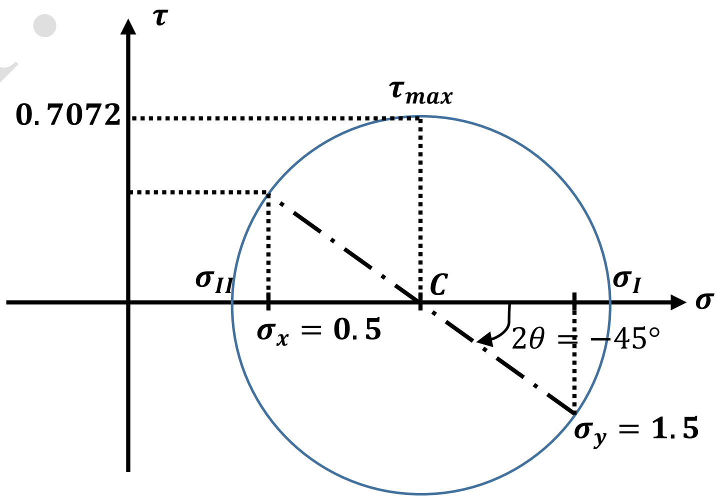


Fig. 3.5 Cercles de Mohr des contraintes 2D

- Le centre du cercle C est situé sur l'axe des contraintes normales à l'abscisse

$$C = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} = 1$$

- La contrainte de cisaillement maximale est :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = 0.7071$$

Et le tenseur de contraintes s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 \\ 0 & \sigma_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7072 & 0 \\ 0 & 0.2929 \end{bmatrix}$$

Remarque :

– Les points représentatifs des directions principales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont les intersections $(\sigma_I, 0)$ et $(\sigma_{II}, 0)$ du cercle avec l'axe σ_n.

– Si la facette $\vec{n}$ fait un angle θ avec la facette $\vec{n}_1$, son point représentatif sur le cercle de Mohr fait un angle -2θ avec le point représentatif de la facette $\vec{n}_1$.

3. État de contrainte tridimensionnel

Les contraintes principales dans un volume, s'écrit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de l'équation sont :

$$P = det|[\sigma] - \sigma_n[I]| = 0$$

$[I]$ est la matrice identité

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = det\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$= -\sigma_n{}^3 + I_1\sigma_n{}^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

I_1, I_2 et I_2 sont des invariants du tenseur de contraintes :

$$I_1 = \mathrm{tr}\,[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{1}{2}\left((\mathrm{tr}\,[\sigma])^2 - \mathrm{tr}\,[\sigma]^2\right) &= \sigma_{xx}\,\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\,\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\,\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\ &= \sigma_1\,\sigma_2 + \sigma_1\,\sigma_3 + \sigma_2\,\sigma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 = \det[\sigma] &= \sigma_{xx}\,\sigma_{yy}\,\sigma_{zz} + 2\,\sigma_{xy}\,\sigma_{xz}\,\sigma_{yz} - \sigma_{xx}\,\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\,\sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz}\,\sigma_{xy}^2 \\ &= \sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3 \end{aligned}$$

Exemple

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{50} & \mathbf{30} & \mathbf{20} \\ \mathbf{30} & \mathbf{-20} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{20} & \mathbf{-10} & \mathbf{10} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I_1} = \mathbf{50 - 20 + 10 = 40}$$

$$\boldsymbol{I_2} = \mathbf{(50)(-20) + (-20)(10) + (10)(50) = -21}$$

$$\boldsymbol{I_3} = \boldsymbol{det}[\boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{(50)(-20) + (-20)(10) + (10)(50) = -2.8}$$

Etat de contraintes en un point est défini par :

- Le tenseur $\boldsymbol{\sigma_{ij}}$
- Les invariants du tenseur de contraintes $\boldsymbol{I_1}$, $\boldsymbol{I_2}$ et $\boldsymbol{I_3}$

Dans le repère $\{\boldsymbol{M}; \vec{\boldsymbol{n}}_1; \vec{\boldsymbol{n}}_2; \vec{\boldsymbol{n}}_3\}$, les composantes du vecteur contrainte sur la facette $\vec{\boldsymbol{n}}$

$$\boldsymbol{\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2}$$

$$\boldsymbol{T^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1\, n_1 \\ \sigma_2\, n_2 \\ \sigma_3\, n_3 \end{Bmatrix}$$

où n_1, n_2 et n_3 sont les composantes de $\vec{n}$. Compte-tenu de la relation :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

on en déduit :

$$\frac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1$$

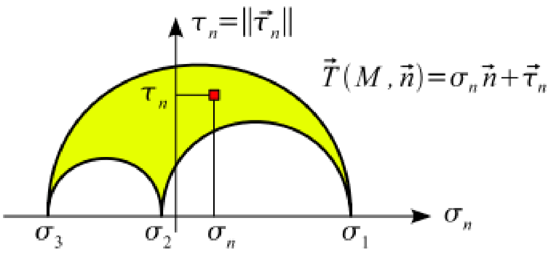


Fig. 3.6 Cercles de Mohr des contraintes 3D

Le point de coordonnées $(\boldsymbol{\sigma_n}, \boldsymbol{\tau_n})$ se trouve

- A l'extérieur du demi-cercle de centre $\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, \mathbf{0}\right)$ et de rayon $\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}, \mathbf{0}\right)$.
- A l'extérieur du demi-cercle de centre $\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, \mathbf{0}\right)$ et de rayon $\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}, \mathbf{0}\right)$.
- A l'intérieur du demi-cercle de centre $\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, \mathbf{0}\right)$ et de rayon $\left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}, \mathbf{0}\right)$.

Remarque :

On peut déduire que la valeur maximale en M de la contrainte normale est égale :

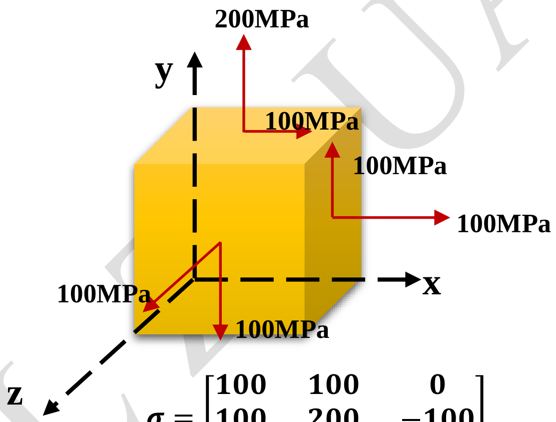
$$\sigma_{max} = max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|)$$

Et du cisaillement

$$\tau_{max} = \frac{max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2}$$

Exemple

Déterminer les contraintes et les directions principales de l'état de contraintes illustré sur la figure ci-dessous :



Solution

$$\sigma = \begin{bmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 100 & 200 & -100 \\ 0 & -100 & 100 \end{bmatrix}$$

$$P = det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$P = det \begin{bmatrix} 100 - \sigma_n & 100 & 0 \\ 100 & 200 - \sigma_n & -100 \\ 0 & -100 & 100 - \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$= -\sigma_n{}^3 + I_1\sigma_n{}^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$$

$$= \sigma_n(100 - \sigma_n)(\sigma_n - 300) = 0$$

Contraintes principales sont :

$$\sigma_I = 300MPa$$

$$\sigma_{II} = 100MPa$$

$$\sigma_{III} = 0MPa$$

D'après l'équation d'équilibre :

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)n_1 + \tau_{xy}n_2 + \tau_{xz}n_3 = 0 \\ \tau_{xy}n_1 + (\sigma_y - \sigma)n_2 + \tau_{xz}n_3 = 0 \\ \tau_{xz}n_1 + \tau_{xy}n_2 + (\sigma_z - \sigma)n_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 100-\sigma_n & 100 & 0 \\ 100 & 200-\sigma_n & -100 \\ 0 & -100 & 100-\sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sachant que $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

$$\begin{bmatrix} 100-300 & 100 & 0 \\ 100 & 200-300 & -100 \\ 0 & -100 & 100-300 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Direction principale 1 : (65.9°, 35.3°, 114.1°)

$$\begin{bmatrix} 100-100 & 100 & 0 \\ 100 & 200-100 & -100 \\ 0 & -100 & 100-100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Direction principale 2 : (45°, 90°, 45°)

$$\begin{bmatrix} 100-0 & 100 & 0 \\ 100 & 200-0 & -100 \\ 0 & -100 & 100-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Direction principale 3 : (54.7°, 125.3°, 54.7°)

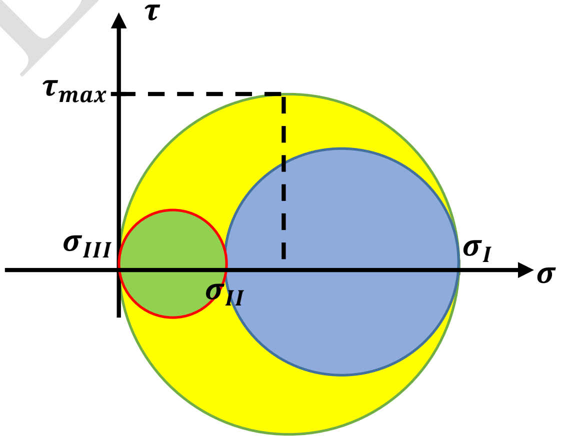


Fig. 3.7 Cercles de Mohr des contraintes 3D

Remarque :

On peut déduire que la valeur maximale en M de la contrainte normale est égale :

$$\boldsymbol{\sigma_{max} = max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) = 300MPa}$$

Et du cisaillement

$$\boldsymbol{\tau_{max} = \frac{max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2} = 150MPa}$$

États de contraintes particuliers

Nous allons envisager divers cas particuliers correspondant à des états de contraintes remarquables.

a) *<u>État de contrainte isotrope (hydrostatique)</u>*

Les trois contraintes principales sont égales, le déviateur est nul, et toutes les directions sont principales, soit :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}$$

Qui représente un état de tension si σ > 0 et un état de compression si σ < 0. Sur toute facette s'exerce donc une contrainte purement normale.
C'est l'état de contraintes qui existe dans les fluides à l'équilibre, d'où la terminologie hydrostatique.

Fig. 3.8a Etat de contraintes hydrostatique

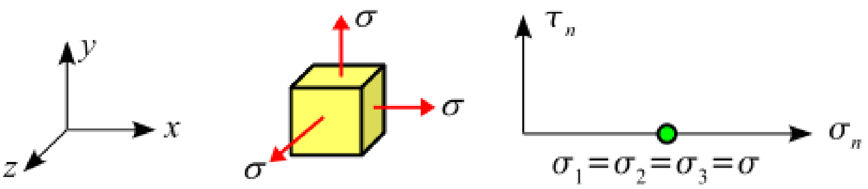


Fig. 3.8b Etat de contraintes hydrostatique (Cercle de Mohr)

b) *<u>État de traction ou compression uniaxiale</u>*

C'est un cas particulier du précédent avec $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ (pas de contraintes latérales). C'est l'état de contrainte le plus facile à réaliser expérimentalement : il suffit d'exercer une force longitudinale sur un barreau (essai de traction). Le tenseur de contrainte se réduit à :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Traction si $\boldsymbol{\sigma} > 0$, compression si $\boldsymbol{\sigma} < 0$

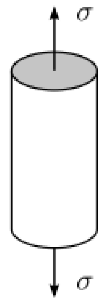


Fig. 3.9a Etat de contrainte uniaxiale

$\boldsymbol{\sigma_2 = \sigma_3 = 0}$ **,** $\boldsymbol{\sigma_1 = I_1 = \sigma_x}$ et $\boldsymbol{I_2 = I_3 = 0}$

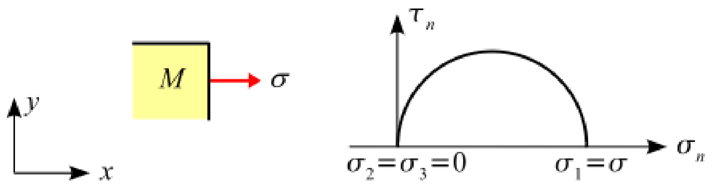


Fig. 3.9b Etat de contrainte uniaxiale (cercle de Mohr)

c) *<u>État de cisaillement pur</u>*

C'est un état de contrainte purement déviatoire. Les directions principales sont l'axe $\boldsymbol{x_3}$ ($\boldsymbol{\sigma_3} = 0$) et les bissectrices des axes $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ (contraintes principales $+\boldsymbol{\tau}$ et $-\boldsymbol{\tau}$).

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\tau} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\tau} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

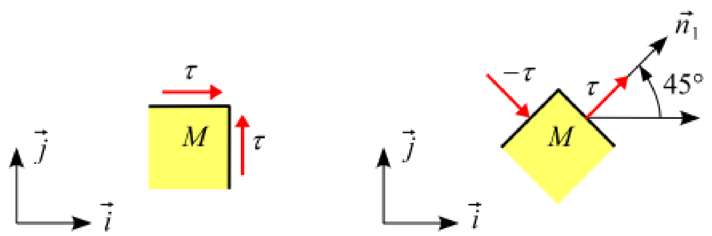


Fig. 3.10a Etat de cisaillement pur

Les contraintes principales et les directions principales sont :

$\boldsymbol{\sigma_1 = \tau}$, $\boldsymbol{\sigma_2 = -\tau}$ et $\boldsymbol{\sigma_3 = 0}$

$$\{\boldsymbol{n_1}\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \{\boldsymbol{n_2}\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{Bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \textbf{ et } \{\boldsymbol{n_3}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{Bmatrix}$$

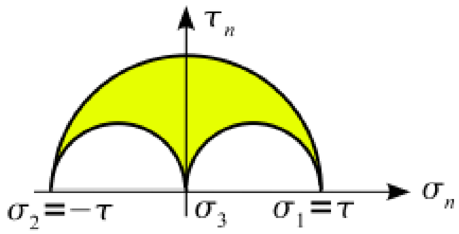


Fig. 3.10b Etat de cisaillement pur (cercle de Mohr)

d) *<u>État de contrainte plane</u>*

En un point M, l'état de contrainte est dit plan par rapport aux deux directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ (figure 3.11a), si le tenseur des contraintes se réduit à :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma_{xx}} & \boldsymbol{\sigma_{xy}} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma_{yx}} & \boldsymbol{\sigma_{yy}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

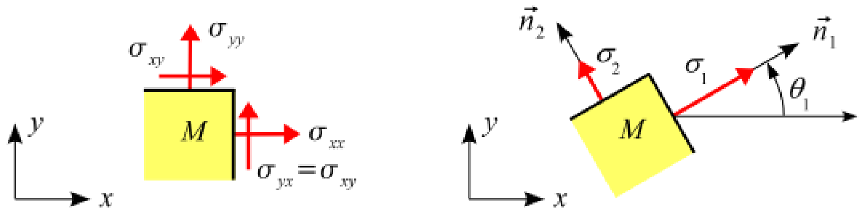


Fig. 3.11a Etat de contrainte plane

Le vecteur contrainte sur la facette $\vec{\boldsymbol{k}}$ est nul :

$$\vec{T}(M, \vec{k}) = \vec{0}$$

La direction $\vec{\boldsymbol{k}}$ est donc direction principale et la contrainte principale associ´ee est nulle :

$$\vec{\boldsymbol{n}}_{\mathbf{3}} = \vec{\boldsymbol{k}}\,,\ \boldsymbol{\sigma_3} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\tau_{xz}} = \boldsymbol{\tau_{yz}} = \mathbf{0}$$

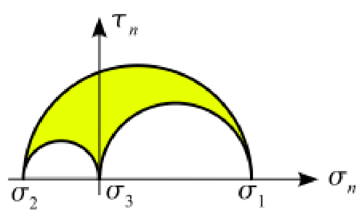


Fig. 3.11b Etat de contrainte plane (cercle de Mohr)