Table des Matières

Théorème d'inversion locale

Soiet $(\mathbb{X}, \|.\|)$ et $(\mathbb{Y}, \|.\|)$ deux espaces de Banach

Théorème 0.0.1 *Soient $f : U \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une fonction de classe C^1et $a \in U$ (U un ouvert). Si $d_a f$ est un isomorphisme de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$ alors il existe un voisinage W de a dans U tel que $f(W)$ ouvert et $f : W \to f(W)$ est un C^1-difféomorphisme.*

Preuve. Par translation et composition on va se ramener au cas, $X = Y, a = f(a) = 0$ et $Df(0) = Id_E$, posons pour tout $x \in U - a := \{y - a; y \in U\}$ (le translaté de U par le vecteur $a, g(x) = (Df(a))^{-1}(f(x+a) - f(a))$ alors $g : U - a \longrightarrow E, g(0) = (Df(a))^{-1}(f(a) - f(a)) = 0$ et $Dg(0) = (Df(a))^{-1}(Df(a)) = Id_E$. Enfin, si g est difféomorphisme local, il en est de meme de $f(x) = \mathrm{Df}(a)(g(x-a) + f(a))$. On est donc ramené à traiter le cas $E = F, a = 0, f(a) = 0$ et $Df(0) = Id_E$.

On suppose que $a = 0$, $d_0 f = id$ et $g(x) = x - f(x)$ alors $d_x g = id - d_x f$ donc $d_0 g = 0$. Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}, \exists r > 0$ tel que $\sup\limits_{x \in B_r} \|d_x g\| \leq \varepsilon$, d'après théorème d'accroissements finis on trouve $\|g(x) - g(y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|, \forall x, y \in B_r$ alors $\|f(x) - f(y)\| \geq (1 - \varepsilon)\|x - y\|$ donc f est injective dans B_r

Montrons que $f(B_r)$est un ouvert, soit $z_0 \in f(B_r)$ on a $z_0 = f(x_0)$, on pose, $\forall z \in B_{\varepsilon'}(z_0)$ $g_z(x) = z - g(x), \forall x \in B_r$ d'après théorème de point fix $\exists x \in B_r, g_z(x) = x$ alors $f(x) = z$ qui nous donne $z \in f(B_r)$ donc $B_{\varepsilon'}(z_0) \subset f(B_r)$.

- Montrons que $f^{-1} : f(B_r) \to B_r$ est differentiabe. On a $\forall x, y \in B_r, \|f(x) - f(y)\| \geq \frac{1}{2}\|x - y\|$ et $f : B_r \to f(B_r)$ est un bijection alors f^{-1} est differentiabe. ■

Corollaire 0.0.2 *Soit $f : U \to Y$ une application de classe C^1 avec U un ouvert non vide.*

f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si elle est injective, et sa différentielle est en tout point de U un isomorphisme de X sur Y.

Corollaire 0.0.3 *Dimension finie. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to f(U)$ injective et de classe C^1. Alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$ si et seulement si le déterminant de sa matrice jacobienne (que l'on appelle jacobien de f) ne s'annule pas sur U.*

Soient E et F deux espaces de Banach.

Théorème 0.0.4 *Soit $U \subset X$ un ouvert et $f : U \to Y$ une application de classe C^r. On suppose que f est injective et que $a \in U$, $Df(a) \in Isom(X, f)$. Alors $f : U \to f(U)$ est un difféomorphisme de classe C^r.*

Preuve. D'après le théorème d'inversion locale f est un difféomorphisme local de classe C^r. Ceci implique en particulier que $V = f(U)$ est voisinage de tout ses points, donc un ouvert de F. l'hypothèse d'injectivité de f c-à-d la bijectivité de $f : U \to f(U)$, permet de définir un inverse f^{-1}. Comme localement, l'inverse de f coïcident avec f^{-1}, f^{-1} est alors de classe C^r. Donc f est un difféomorphisme "global" de classe C^r. ■

Exemple 1 *(les coordonées polaires). Soit $\Phi : U \longrightarrow V$, définie par $\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$*

et $U = \left\{(r,\theta); r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } -\pi < \theta < \pi\right\}$

et $V = \mathbb{R}\backslash\{(x,0), x \leq 0\}$ Alors 1. Φ est de classe C^∞. 2. Φ est injective.

$\Phi(r,\theta) = \Phi\left(r',\theta'\right) \|\Phi(r,\theta)\| = r = r' = \Phi\left(r',\theta'\right)$

$\cos\theta = \cos\theta'$ *et* $\sin\theta = \sin\theta'$ *et donc* $\theta' = \theta$.

Finalement $(r,\theta) = \left(r',\theta'\right)$ 3. pour tout $(r,\theta) \in U$,

$\det J_\Phi(r,\theta) \neq 0$, $J_\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ *et donc* $\det J_\Phi(r,\theta) = r \neq 0$

D'aprés théorème d'inversion globale, on dit que Φ est difféomorphisme de classe C^∞.

Exemple 2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x+2y, 3x+5y)$ *et* $f\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$.

injective et de classe C^1 et $df_{(x,y)} = J(f)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

et $detJ(f)_{(x,y)} = -1$.

donc f est un C^1-difféomorphisme.