Théorème des fonctions implicites

Soient X, Y et Z des espaces de Banach

Théorème 0.0.1 *Soient $U \subset X, V \subset Y$ des ouverts et $f : U \times V \longrightarrow Z$ une application de classe C^1, $(a, b) \in U \times V$ tel que $f(a, b) = 0$ et $D_y f(a, b) \in \mathrm{Isom}\,(X \times Y, Z)$. Alors, il existe un voisinage ouvert de a, $U_a \subset U$, un voisinage ouvert de b, $V_b \subset V$ et une application de classe $C^1, \varphi : U_a \longrightarrow V_b$ tels que*

1) $\varphi(a) = b$

2)$\forall(x, y) \in U_a \times V_b, f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$

3) $D\varphi(a) = -\left(D_y f(a, b)\right)^{-1} \circ D_x f(a, b)$.

Si f est de classe $C^r, r \geq 1$, il en est de mème pour φ.

Preuve. Soit $g : U \times V \longrightarrow U \times Z$ définie par $g(x, y) = (x, f(x, y))$. La différentielle de g en (a, b) est l'application $Dg(a, b) : X \times Y \longrightarrow X \times Z$ definie par $Dg(a, b)(h, k) = (h, D_x f(a, b)h + D_y f(a, b)k)$. $Dg(a, b)$ est inversible. En effet, pour tout $(s, t) \in X \times Z$, l'équation $Dg(a, b)(h, k) = (s, t)$ a pour solution unique

$$(h, k) = \Big(s, \left(D_y f(a, b)\right)^{-1} (t - D_x f(a, b)s)\Big)$$

Par le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert voisinage de $(a, b), W_{a,b} \subset U \times V$ tel que, $g : W_{a,b} \to g\left(W_{a,b}\right)$ est un difféomorphisme de classe C^1.

L'inverse de g est alors de la forme $g^{-1}(x, y) = (x, \phi(x, y))$.

On peut, quitte à restreindre l'ouvertg $g\left(W_{a,b}\right)$, supposer que $g\left(W_{a,b}\right) = B((a, b), r)$ pour un certain $r > 0$. On a les équivalences: $(x, y) \in W_{a,b}$ et $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x, y) \in B((a, 0), r)$ et $y = \phi(x, 0) \Leftrightarrow \|x - a\| < r$ et $y = \varphi(x)$, on a posé $\phi(x, 0) = \varphi(x)$. Comme $w_{a,b}$ est un ouvert voisinage de (a, b), il existe un voisinage ouvert de a, U_a et un voisinage ouvert de b, V_b telle que $U_a \times V_b \subset W_{a,b}$. Comme φ est continue, quitte à restreindre U_a, on peut supposer que $\varphi\left(U_a\right) \subset V_b$. Finallement, $\varphi : U_a \longrightarrow V_b$ vérifie bien $\varphi(a) = b$ et $\forall(x, y) \in U_a \times V_b$, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. On obtient la formule de la différentielle de φ en a, en dérivant la fonction identiquement nulle $f(x, \varphi(x))$ comme fonction composée. La dérivation des fonctions composée nous donne $0 = D_x f(a, b) + D_y f(a, b) \circ D\varphi(a)$. ∎

Exemple 1 $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ f_3(x, y) \end{pmatrix}$

La matrice Jacobienne de f *au point* $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ *est la matrice*

$$J_{y.f}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial y2}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial y3}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial y2}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial y3}(a, b) \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1}(a, b) & \frac{\partial f_3}{\partial y2}(a, b) & \frac{\partial f_3}{\partial y3}(a, b) \end{pmatrix}$$

si le déterminant de la matrice $J_{y.f}(a)$ *est non nul. D'aprés le théorème des fonctions implicites. Alors il existe des voisinage ouvert* U_a *de* a *et* V_b *de* b *et une application* $\phi : U_a \longrightarrow V_b, \phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x))$ *telle que*

1. $\phi(a) = b$
2. *pour tout* $(x, y) \in U_a \times V_b$ *on a*

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \phi_1(x_1, x_2) \\ y_2 = \phi_2(x_1, x_2) \\ y_3 = \phi_3(x_1, x_2) \end{cases}$$

Exemple 2 $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *par* $f(x, y) = y^2 x_1 + e^{2y} + x_2 / x = (x_1, x_2)$

$(a, b) = ((1, -1), 0)$. *Alors,* $f((1, -1), 0) = 0$ *et* $D_y f(x, y) = 2x_1 y + 2e^{2y}, D_y f((1, -1), 0) = 2 \neq 0$ *et d'aprés le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage* V *de* $(1, -1)$ *dans* $\mathbb{R}^2$*,* I *de* 0 *et une application* $C^\infty, \phi : V \longrightarrow I$ *tels que* $\phi(1, -1) = 0$ *et* $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x), \forall x \in I$.