

Université Ahmed Zabana-Relizane
Fiche TD 2- Calcul diff-master 1 -2021/2022
1^{ère} année master-LMD-Maths

Exercice 1:

Démontrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est un C^1 -difféomorphisme local, mais que f n'est pas un C^1 -difféomorphisme global.

Exercice 2:

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$.

Démontrer qu'il existe un ouvert I de \mathbb{R} contenant x_0

et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$

Exercice 3:

Montrer que la relation $x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 = 1$

définit y comme fonction de x au voisinage du point $(-1, 1)$.

Calculer alors $\frac{dy}{dx}$ en ce point.

Exercice 4:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que $|ab| < 1$.

1. Soit $v \in \mathbb{R}$. On définit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(x) = x + a \sin(v - b \sin x)$.

Démontrer que g est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

2. On pose $f(x, y) = (x + a \sin y, y + b \sin x)$.

Démontrer que f est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même.

Exercice 5:

Déterminer une solution y de l'équation $x = y + \frac{y}{\ln y}$ en x pour $x, y > 0$ proches de 0, de la forme $y(x) = x \left(1 + u\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)$ avec u classe C^∞ au voisinage de 0 et $u(0) = 0$.

Calculer $u'(0)$ et $u''(0)$.