

Chapitre 2

Ensembles et applications

2.1 Ensembles

Définition 2.1 *Un ensemble est une collection d'éléments, exemple $\{0, 1\}$, $\mathbb{N}$,.....*

- *l'ensemble vide est un ensemble ne contenant aucun élément, noté $\emptyset$*
- *On note $x \in E$, si x est un élément de E , et $x \notin E$ dans le cas contraire*

2.1.1 Opérations sur les ensembles

- **Inclusion:**

$E \subset F$, si tout élément de E est un élément de F

Autrement dit: $\forall x \in E, x \in F$. Et on dit alors que E est un sous ensemble de F , (E est une partie de F)

- **L'égalité**

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$$

- **Ensemble des parties de E :**

On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E

Par exemple si $E = \{1, 2, 3\}$, alors $P(E) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E, \emptyset\}$

Si $\text{card}(E) = n$ alors, $\text{card}(P(E)) = 2^n$.

- **Différence et différence symétrique**

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . On note

1 – la différence de A et B est l'ensemble : $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

2 – la différence symétrique de A et B est l'ensemble $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

• **Complémentaire d'un ensemble**

si $A \subset E$, alors le complémentaire de A dans E est noté par $\complement_E A$, définie par

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

On le note aussi $E \setminus A$ ou A^c , ou $\overline{A}$.

• **Intersection et Union**

1– On appelle intersection de A et B , l'ensemble, noté $A \cap B$, des éléments de A appartenant aussi à B .

2– On appelle réunion de A et B , l'ensemble, noté $A \cup B$, des éléments de A et de ceux de B .

Formellement, on a :

$$A \cap B = \{x / (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

$$A \cup B = \{x / (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

• **Produit cartésien**

Le produit cartésien des ensembles E et F est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$,

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

Si $\text{card}(E) = n$, $\text{card}(F) = m$ alors, $\text{card}(E \times F) = nm$.

Proposition 2.1 Soient A, B, C des parties de E alors,

1. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$,
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$,
4. $A \cap B = A \iff A \subset B$,
5. $A \cup B = B \iff A \subset B$,
6. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
8. $\complement_E (\complement_E A) = A$,
9. $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$,
10. $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$,
11. $A \subset B \iff \complement_E B \subset \complement_E A$.

Preuve. 8. Soit $x \in E$, alors $x \in \complement_E A (\complement_E A) \iff x \notin \complement_E A$
 $\iff x \in \complement_E \complement_E A$

$$\Longleftrightarrow \overline{x \notin A}$$

$$\Longleftrightarrow x \in A$$

$$\text{Donc } \mathbb{C}_E A (\mathbb{C}_E A) = \mathbb{C}_E A$$

$$9. \text{ Soit } x \in E, \text{ alors } x \in \mathbb{C}_E(A \cap B) \Longleftrightarrow x \notin (A \cap B)$$

$$\Longleftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$$

$$\Longleftrightarrow (x \in \mathbb{C}_E A) \vee (x \in \mathbb{C}_E B)$$

$$\Longleftrightarrow x \in (\mathbb{C}_E A \cup \mathbb{C}_E B)$$

$$\text{Donc } \mathbb{C}_E(A \cap B) = \mathbb{C}_E A \cup \mathbb{C}_E B$$

De même on montre la propriété 10.

$$11. A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in E ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in E ((x \notin B) \Rightarrow (x \notin A)) \quad \text{Contraposée de l'implication}$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in E ((x \in \mathbb{C}_E B) \Rightarrow (x \in \mathbb{C}_E A))$$

$$\Longleftrightarrow \mathbb{C}_E B \subset \mathbb{C}_E A, \text{ donc } A \subset B \Longleftrightarrow \mathbb{C}_E B \subset \mathbb{C}_E A \quad \blacksquare$$

Remarquez que l'on repasse aux éléments pour les preuves.

2.2 Les applications

Définition 2.2 Une application ou une fonction $f : E \longrightarrow F$, est une relation qui associe à chaque élément $x \in E$, un unique élément de F noté $f(x)$.

- f, g deux applications, $f = g \Longleftrightarrow \forall x \in E, f(x) = g(x)$.
- Le graphe de l'application $f : E \longrightarrow F$ est l'ensemble noté G_f définie par

$$G_f = \{(x, f(x)) \in E \times F \mid x \in E\}$$

- La Composition de deux applications f et g telles que $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ est l'application $g \circ f : E \longrightarrow G$ définie par

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Exemple 2.1 Soient $f :]0, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ et $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) =$

$$\frac{x-1}{x+1}.$$

Alors

$$g \circ f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(f(x))$$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1-x}{1+x} = -g(x).$$

Remarque 2.1 Le composé de deux applications n'est pas toujours définies, par exemple $g \circ f$ est défini si l'ensemble d'arrivée de f est l'ensemble de départ de g .

2.2.1 Image directe , Image réciproque

Définition 2.3 • Soit $A \subset E$, et $f : E \longrightarrow F$ une application, l'image directe de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset F$$

c-à-d:

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$$

• Soit $B \subset F$, et $f : E \longrightarrow F$ une application, l'image réciproque de B par f est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \subset E$$

c-à-d:

$$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$$

Exemple 2.2 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^2$

alors:

$$f(\{2\}) = \{4\}, \quad f([-1, 3]) = \{f(x) \mid x \in [-1, 3]\} = [0, 9]$$

$$f([-1, 0] \cup [1, 3]) = [0, 9]$$

$$f^{-1}(\{2\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{2\}\} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

$$f^{-1}([0, 3]) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [0, 3]\} = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$f^{-1}([-1, 3]) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$f^{-1}([-1, 0] \cup [1, 3]) = \{0\} \cup [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$$

$$f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}, \quad f^{-1}(\mathbb{R}_*) = \emptyset$$

Remarque 2.2 • $f(A)$ est un sous ensemble de F , $f^{-1}(B)$ est un sous ensemble de E

• La notation $f^{-1}(B)$ est un tout rien ne dit que f est bijective, l'image réciproque existe quelque soit la fonction.

• L'image directe d'un singleton $f(\{x\}) = \{f(x)\}$ est un singleton, par contre l'image réciproque d'un singleton $f^{-1}(\{y\})$ dépend de f , elle peut être un singleton, un ensemble à plusieurs éléments, peut être E si f est une fonction constante.

Proposition 2.2 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, A, A' des parties de E , B, B' des parties de F

1. $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$,
2. $B \subset B' \implies f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$,
3. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$,
4. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$,
5. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$,

6. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$,
7. $A \subset f^{-1}(f(A))$,
8. $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Preuve. 1. Soit $y \in f(A)$, alors $\exists x \in A$, $y = f(x)$, comme $A \subset A'$ alors, $x \in A'$, alors $y \in f(A')$, donc $f(A) \subset f(A')$.

2. Soit $x \in f^{-1}(B)$, alors $f(x) \in B$, comme $B \subset B'$, alors $f(x) \in B'$, alors $x \in f^{-1}(B')$, d'où $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

3. Soit $y \in f(A \cap A')$, il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$, or $x \in A$ donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même $x \in A'$ donc $y \in f(A')$. D'où $y \in f(A) \cap f(A')$ donc $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

4. Soit $y \in f(A \cup A')$, $\exists x \in A \cup A'$ tel que $y = f(x)$, si $x \in A$ alors $y \in f(A)$, sinon $x \in A'$ et $y \in f(A')$, dans les deux cas $y \in f(A) \cup f(A')$

inversement: soit $y \in f(A) \cup f(A')$, si $y \in f(A)$ alors $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$. or $x \in A \subset (A \cup A')$ donc $y \in f(A \cup A')$. de même si $y \in f(A')$ par double inclusion on a l'égalité.

5. Soit $x \in f^{-1}(B \cap B')$, alors $f(x) \in (B \cap B')$, donc $f(x) \in B$ et $f(x) \in B'$, donc $x \in f^{-1}(B)$ et $x \in f^{-1}(B')$, donc $x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$, alors $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

6. démontré comme -5-.

7. Soit $x \in A$, Posons $B = f(A)$, on a $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A))$, d'où $f(A) \subset f^{-1}(f(A))$.

8. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$, posons $A = f^{-1}(B)$, on a $y \in f(A)$ donc $\exists x \in A$, $y = f(x)$, comme $x \in A = f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$, donc $y \in B$, alors $f(f^{-1}(B)) \subset B$. ■

Définition 2.4 Antécédent

Fixons $y \in F$, tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un antécédent de y

- En terme d'image réciproque, l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

2.2.2 Injection, surjection, bijection

Définition 2.5 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application,

- f est injective, si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f .
- f est surjective, si tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent par f .
- f est bijective, si tout élément de l'ensemble d'arrivée a un unique antécédent par f .

Cette définition peut se reformuler comme:

Définition 2.6 • f est injective, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution dans E .

- f est surjective, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a au moins une solution dans E .
- f est bijective, si pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ a une unique solution dans E .

Autrement dit f est bijective, si elle est injective et surjective.

Proposition 2.3 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, les assertions suivantes sont équivalentes:

- 1. f est injective $\iff \forall x_1, x_2 \in E; f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$,
- 2. f est injective $\iff \forall x_1, x_2 \in E; x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.
- 1. f est surjective $\iff \forall y \in F, \exists x \in E; y = f(x)$
- 2. f est surjective $\iff f(E) = F$
- f est bijective $\iff \forall y \in F, \exists! x \in E; y = f(x)$.

Le symbole ! exprime l'unicité, c-à-d: il existe une solution unique pour l'équation $f(x) = y$.

Exemple 2.3 Soient les applications $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, telles que $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^2$.
Les applications f_1, f_2, f_3 sont elles injectives, surjectives, bijectives?

Preuve. 1. $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\bullet \forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}; f_1(x_1) = f_1(x_2) \implies \frac{1}{1+x_1} = \frac{1}{1+x_2},$$

$$\implies x_1 = x_2,$$

Donc f_1 est injective.

$$\bullet \forall y \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+x} = y \implies x = \frac{1-y}{y}, \text{ par exemple pour } y = 5, \text{ on obtient } x = \frac{-4}{5} \notin \mathbb{N}, \text{ alors } f_1 \text{ n'est pas surjective.}$$

par conséquence f_1 n'est pas bijective.

$$2. f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$$

$$\bullet \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+; f_2(x_1) = f_2(x_2) \implies x_1^2 = x_2^2$$

$$\implies x_1 = \pm x_2$$

$$\implies x_1 = x_2, \quad (x_1, x_2 \text{ ont même signe})$$

Alors f_2 est injective.

$$\bullet \forall y \in \mathbb{R}; x^2 = y \implies x = \pm\sqrt{y}, \text{ si } y \geq 0, \text{ alors pour } y \in \mathbb{R}^-, x \notin \mathbb{R}, \text{ d'où } f_2 \text{ n'est pas surjective.}$$

par conséquence f_2 n'est pas bijective.

$$3. f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+, f_3(x) = x^2$$

$$\bullet \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+; f_2(x_1) = f_2(x_2) \implies x_1^2 = x_2^2$$

$$\implies x_1 = \pm x_2,$$

alors, $\exists 2, -2 \in \mathbb{R}, 2 \neq -2$ mais $(2)^2 = (-2)^2$, donc f_3 n'est pas injective.

$$\bullet \forall y \in \mathbb{R}^+, x^2 = y \implies x = \pm\sqrt{y}, \text{ si } y \geq 0,$$

alors $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}; y = f_3(x)$. donc f_3 est surjective

par conséquence f_3 n'est pas bijective. ■

Proposition 2.4 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, alors

1. f injective et g injective $\implies g \circ f$ injective,
2. f surjective et g surjective $\implies g \circ f$ surjective,
3. $g \circ f$ injective $\implies f$ injective,
4. $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective.

Preuve. 1. Soient $x_1, x_2 \in E$, alors $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$ car f injective
 $\implies g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ car g injective
 $\implies g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$ ce qui montre que $g \circ f$ est injective.

2. Soit $z \in G$, g étant surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$, comme $y \in F$ et f est surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g(f(x))$ et on déduit que : $\forall z \in G, \exists x \in E; z = g \circ f(x)$, ce qui montre que $g \circ f$ est surjective.

3. $\forall x_1, x_2 \in E; f(x_1) = f(x_2) \implies g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (car g : une application)
 $\implies (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$
 $\implies x_1 = x_2$ (car $g \circ f$ est injective), d'où f est injective.

4. Soit $z \in G$, alors $g \circ f$ surjective $\implies \exists x \in E; g \circ f(x) = z$
 $\implies \exists x \in E; g(f(x)) = z$
 $\implies \exists y = f(x) \in F; g(y) = z$,
donc $\forall z \in G, \exists y \in F; g(y) = z$, ce qui montre que g est surjective. ■

2.2.3 L'application réciproque

Proposition 2.5 Une application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si et seulement s'il existe une unique application $g : F \longrightarrow E$ telle que

$$f \circ g = Id_F \text{ et } g \circ f = Id_E.$$

On dit que f est inversible et g , notée f^{-1} , est appelée "l'application réciproque" ou "l'application inverse" de f .

Preuve. I.) Supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

Montrons que f est bijective.

1. Soit $y \in F$, comme $f \circ g = Id_F$ alors $f \circ g(y) = y$, par suite il existe $x = g(y) \in E$ tel que $f(x) = y$, ce qui montre que f est surjective.
2. Soient $x_1, x_2 \in E$, comme $g \circ f = Id_E$ alors $g \circ f(x_1) = x_1$ et $g \circ f(x_2) = x_2$, par suite:
 $f(x_1) = f(x_2) \implies g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (car g application)
 $\implies g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$
 $\implies x_1 = x_2$, ce qui montre que f est injective.

De 1. et 2. on déduit que f est bijective.

II.) Supposons que f est bijective. Construisons l'unique application $g : F \longrightarrow E$,

telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

f étant bijective, alors : $\forall y \in F, \exists! x \in E; y = f(x)$.

Ainsi, à tout élément $y \in F$, on fait associer un unique élément $x \in E$, qu'on notera $g(y)$, tel que $f(g(y)) = y$. On définit ainsi une application

$$\begin{aligned} g : F &\longrightarrow E \\ y &\mapsto g(y) = x \end{aligned}$$

Montrons que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.

1. Soit $y \in F$, alors $g(y) = x$, avec $f(x) = y$, donc $f \circ g(y) = f(g(y)) = f(x) = y$, ce qui montre que : $f \circ g = Id_F$.

2. Soit $x \in E$, alors pour $y = f(x)$ on a $g(y) = x$, par suite $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = x$, ce qui montre que : $g \circ f = Id_E$.

3. Montrons l'unicité de g . Soit $g_1 : F \longrightarrow E$ vérifiant les deux propriétés précédentes, alors pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $g_1(y) = g_1(f(x)) = g_1 \circ f(x) = Id_E(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$ ce qui montre que $g_1 = g$. ■

Exemple 2.4 $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \exp(x)$ est bijective, sa bijection réciproque est $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \ln(y)$. Nous avons bien $\exp(\ln(y)) = y$, pour tout $y \in]0, +\infty[$ et $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.6 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Preuve. D'après la proposition 2.5, il existe $u : F \longrightarrow E$ tel que $u \circ f = id_E$ et $f \circ u = id_F$.

Il existe aussi $v : G \longrightarrow F$ tel que $v \circ g = id_F$ et $g \circ v = id_G$.

On a alors $(g \circ f) \circ (u \circ v) = g \circ (f \circ u) \circ v = g \circ id_F \circ v = g \circ v = id_G$.

Et $(u \circ v) \circ (g \circ f) = u \circ (v \circ g) \circ f = u \circ id_F \circ f = u \circ f = id_E$.

Donc $g \circ f$ est bijective et son inverse est $u \circ v$.

Comme u est la bijection réciproque de f et v celle de g alors : $u \circ v = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

2.2.4 Prolongement et restriction

Définition 2.7 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, soit $A \subset E$, $B \subset F$, tel que $f(A) \subset B$.

On appelle restriction de f à A comme ensemble de départ et B comme ensemble d'arrivée et on note

$f|_{A \rightarrow B}$ l'application de A dans B qui à tout x dans A associe $f(x)$.

- Cette application a la même règle de calcul que f , seuls changent les ensemble de départ et d'arrivée

Remarque 2.3 Quand on restreint uniquement l'ensemble de départ ($B = F$) on utilise la notation $f|_A$.

Définition 2.8 Soient f, g des applications, on dit que f est un prolongement de g si g est une restriction de f .

Exemple 2.5 1. Soient
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

c-à-d g est la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$, ($g = f|_{\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+}$), on remarque que g est croissante et bijective, mais f ne l'est pas.

2. Soient
$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{x} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

L'application f est prolongement de g . ($g = f|_{\mathbb{R}^*}$)

De plus on peut montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, et on dit que f est le prolongement par continuité de g .

2.3