Université Ahmed Zabana - Relizane 2021-2022

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 2

Exercice 1 : A, B et C trois sous-ensembles de ensemble E . Montrer que

1· $A \cup B = A \cap B \Longrightarrow A = B$

2· $A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$

3· $B \subset C \Longrightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$

4· $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

Exercice 2 : On définit sur $\mathbb{R}^*$ la relation $\Re$ par

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^* \qquad x \Re y \Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

1· Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

2· Déterminer la classe d'équivalence pour tout a de $\mathbb{R}^*$.

3· En déduire la classe d'équivalence de 2.

Exercice 3 : Soit $f\ : \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2 - \dfrac{8 - x}{4x + 6}$

$\star$ f est-elle injective ? surjective ? justifier.

$\star$ Quelle restriction doit-on faire sur lensemble darrivée pour que f devienne une bijection ? Dans ce cas donner l'application réciproque de f.

Correction de fiche TD 2

Solution de L'exercice 1:

• $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$?

Hypothèse : $A \cup B = A \cap B$

But: $A = B$

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x \in A \cup B \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \quad \text{car } \mathrm{A \cup B = A \cap B} \\ &\Rightarrow x \in B, \text{ ceci implique que } A \subset B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in B &\Rightarrow x \in A \cup B \\ &\Rightarrow x \in A \cap B \quad \text{car} \, A \cup B = A \cap B \\ &\Rightarrow x \in A, \text{ ceci implique que } B \subset A \end{aligned}$$

Donc $A \cup B = A \cap B \Longrightarrow A = B$.

•$A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$?

Hypothèse : $A \subset B$

But: $\complement_E B \subset \complement_E A$

$$\begin{aligned} x \in \complement_E B &\Rightarrow x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \, \text{car} \, A \subset B \\ &\Rightarrow x \in \complement_E A \end{aligned}$$

Donc $A \subset B \Longrightarrow \complement_E B \subset \complement_E A$.

• $B \subset C \Longrightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$?

Hypothèse : $B \subset C$

But : $(A \cap B) \subset (A \cap C)$

$\forall\, x \in (A \cap B) \Longrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B$

$$\begin{aligned} \textit{Comme } B \subset C &\Longrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in C \\ &\Longrightarrow x \in (A \cap C) \end{aligned}$$

Donc : $B \subset C \Longrightarrow (A \cap B) \subset (A \cap C)$.

• $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$?

a. $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow [(A \cup B) \subset C]$?

Hypothèse : $(A \subset C) \wedge (B \subset C)$
But : $(A \cup B) \subset C$
$\forall\, x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in A \ \vee \ x \in B$

$$\begin{aligned} Comme\ \ (A \subset C) \wedge (B \subset C) &\Longrightarrow x \in C \vee x \in C \\ &\Longrightarrow x \in C \end{aligned}$$

Donc : $[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longrightarrow [(A \cup B) \subset C]$

b. $[(A \cup B) \subset C] \Longrightarrow [(A \subset C) \wedge (B \subset C)]$?

Hypothèse : $(A \cup B) \subset C$
But : $(A \subset C) \wedge (B \subset C)$
$\forall\, x \in A \Longrightarrow x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in C$, ceci implique que $A \subset C$
$\forall\, x \in B \Longrightarrow x \in (A \cup B) \Longrightarrow x \in C$, ceci implique que $B \subset C$
Donc : $[(A \cup B) \subset C] \Longrightarrow [(A \subset C) \wedge (B \subset C)]$
Conclusion :
$[(A \subset C) \wedge (B \subset C)] \Longleftrightarrow [(A \cup B) \subset C]$
Solution de L'exercice 2:

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^* \qquad x\Re y \Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + \frac{1}{y^2}$$

1) $\Re$ est une relation d'équivalence :
a) $\Re$ est réflexive $\forall\, x \in \mathbb{R}^* \qquad x\Re x$?

$$\begin{aligned} x\Re x &\Longleftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} \\ &\Longleftrightarrow 0 = 0. \end{aligned}$$

Alors $\Re$ est réflexive.

b)$\Re$ est symétrique : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^*$ $\quad x\Re y \Longrightarrow y\Re x$?

$$\begin{aligned}
x\Re y &\Longleftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2+\frac{1}{y^2}\\
&\Longleftrightarrow y^2+\frac{1}{y^2}=x^2+\frac{1}{x^2}\\
&\Longrightarrow y\Re x
\end{aligned}$$

Alors $\Re$ est symétrique.

c)$\Re$ est transitive : $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^*$ $\quad x\Re y \wedge y\Re z \Longrightarrow x\Re z$?

$$\left\{\begin{array}{c} x\Re y\\ \wedge\\ y\Re z\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2+\dfrac{1}{y^2}\\ \wedge\\ y^2+\dfrac{1}{y^2}=z^2+\dfrac{1}{z^2}\end{array}\right. \Longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=z^2+\frac{1}{z^2} \Longrightarrow x\Re z$$

Alors $\Re$ est transitive.

Conclusion : $\Re$ est une relation d'équivalence.

2) Classe d'équivalence :

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Cherchons les éléments y de $\mathbb{R}^*$ tels que $a\Re y$.

$\dot{a} = \{y \in \mathbb{R}^* \;/\; a\Re y\}$

$$\begin{aligned}
a\Re y &\Longleftrightarrow a^2+\frac{1}{a^2}=y^2+\frac{1}{y^2}\\
&\Longleftrightarrow y^2+\frac{1}{y^2}-\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=0\\
&\Longleftrightarrow (y^2-a^2)+\frac{1}{y^2}-\frac{1}{a^2}=0\\
&\Longleftrightarrow (y^2-a^2)+\frac{a^2-y^2}{y^2a^2}=0\\
&\Longleftrightarrow (y^2-a^2)\left(1-\frac{1}{y^2a^2}\right)=0
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2-a^2=0\\ 1-\dfrac{1}{y^2a^2}=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} y^2=a^2\\ y^2a^2=1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} y=\pm a\\ y=\pm\dfrac{1}{a}\end{array}\right.$$

Donc $\dot{a}=\left\{a,-a,\dfrac{1}{a},-\dfrac{1}{a}\right\}$

2) $\dot{2} = \left\{2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$.

Solution de L'exercice 3:

f est injective$\Longleftrightarrow \forall\, x_1,\ x_2 \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\},\ \ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$?

$$\begin{aligned} f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) &\Rightarrow 2 - \frac{8-x_1}{4x_1+6} = 2 - \frac{8-x_2}{4x_2+6} \\ &\Rightarrow \frac{8-x_1}{4x_1+6} = \frac{8-x_2}{4x_2+6} \\ &\Rightarrow \left(8-x_1\right)\left(4x_2+6\right) = \left(8-x_2\right)\left(4x_1+6\right) \\ &\Rightarrow 32x_2 + 48 - 4x_1x_2 - 6x_1 = 32x_1 + 48 - 4x_1x_2 - 6x_2 \\ &\Rightarrow 32x_1 + 6x_1 = 32x_2 + 6x_2 \\ &\Rightarrow 38x_1 = 38x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ donc } f \text{ est injective.} \end{aligned}$$

f est surjective$\Longleftrightarrow \forall\, y\ \in \mathbb{R},\ \exists x\ \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\},\ y = f(x)$.

Soit $y\ \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y = f(x) \Rightarrow y = 2 - \frac{8-x}{4x+6} &\Rightarrow y - 2 = -\frac{8-x}{4x+6} \\ &\Rightarrow 8 - x = (2-y)(4x+6) \Rightarrow 8 - x = 8x + 12 - 4xy - 6y \\ &\Rightarrow 8 - 9x + 4xy = 12 - 6y \\ &\Rightarrow 4xy - 9x = 4 - 6y \\ &\Rightarrow x = \frac{4-6y}{4y-9} \quad , \qquad \text{si } 4y - 9 \neq 0 \\ & y = \frac{9}{4} \text{ n'a pas d'antécédent, alors } f \text{ n'est pas surjective.} \end{aligned}$$

$$x = \frac{4-6y}{4y-9} \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} \text{ car } \frac{4-6y}{4y-9} = -\frac{3}{2} \Longleftrightarrow 27 = 8 \text{ ce qui est impossible.}$$

• Pour f soit bijective il faut que l'ensemble d'arrivée soit $\mathbb{R} - \left\{\frac{9}{4}\right\}$

• L'application réciproque de f est :

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{\tfrac{9}{4}\right\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{3}{2}\right\} \\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \frac{4-6x}{4x-9} \end{aligned}$$