

I.2. Elément finis structure treillis

Dans la présente étude nous considérons la création d'un modèle par éléments finis d'un système mécanique composé de plusieurs éléments barres en plan est considéré. La discussion est limitée pour les structures treillis, que nous définissons comme structures composées de plusieurs barres élastiques sous aux forces axiales seulement.

Le système global est la référence dans laquelle les déplacements de la structure sont exprimés et habituellement choisis par convention dans la géométrie globale considérée, la liaison physique et la variation de l'orientation géométrique des éléments barres imposent les conditions suivantes :

1. Le déplacement nodal des éléments reliés doit être identique au déplacement du nœud de raccordement dans le système global,
2. Les caractéristiques physiques de chaque élément sous forme de matrice de rigidité et la force élémentaire doivent être transformées au repère global pour représenter les propriétés structurales dans le système global,
3. L'effort axial pour chaque élément est déterminé après la solution du problème dans le système global

L'élément structure treillis (figure I.3) est un élément barre en 2D, donc sa matrice de rigidité s'inspire de la matrice de rigidité de l'élément barre avec un changement d'axe.

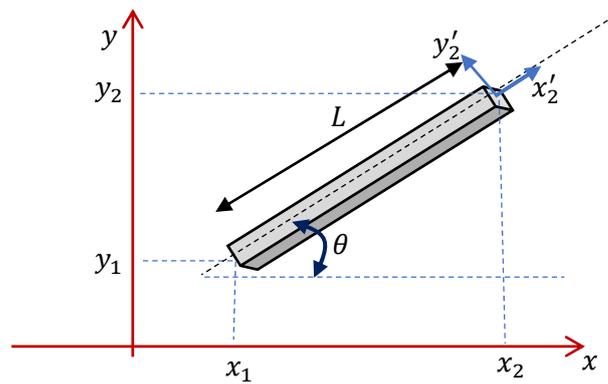


Figure I.3. Elément finis treillis.

La matrice de rigidité de cet élément est donnée par la transformation suivante

$$[k_e] = [T]^T [k_e^b] [T] = \begin{bmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix}$$

Avec, $[T]$ la matrice de passage ou de transformation des déplacements axiaux de l'élément barre aux déplacements globaux, $[k_e^b]$ est la matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre.

La matrice de rigidité élémentaire $[k_e]$ peut être réécrite de la façon suivante

$$[k_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} k'_e & -k'_e \\ -k'_e & k'_e \end{bmatrix} \quad (19)$$

avec

$$[k'_e] = \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

où $C = \cos \theta$ et $S = \sin \theta$

Les inconnus pour chaque nœud sont le déplacement vertical et horizontal.

Il sort que la dimension de la matrice de rigidité élémentaire est d'ordre 4×4 , tandis que pour la matrice de rigidité globale son dimension est d'ordre $(2n \times 2n)$, où n est le nombre des nœuds.

Les forces axiales pour chaque élément sont données par l'expression suivante

$$N = \frac{EA}{L} [C \ S] \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} \quad (21)$$

I.2.1 Exemple 01 d'application

Soit le système contenant trois barres de la figure I.4. Toutes les barres possèdent la même longueur L et la même rigidité axiale EA .

- Déterminer la matrice de rigidité du système.
- Calculer les déplacements nodaux
- Calculer les charges axiales dans les barres.

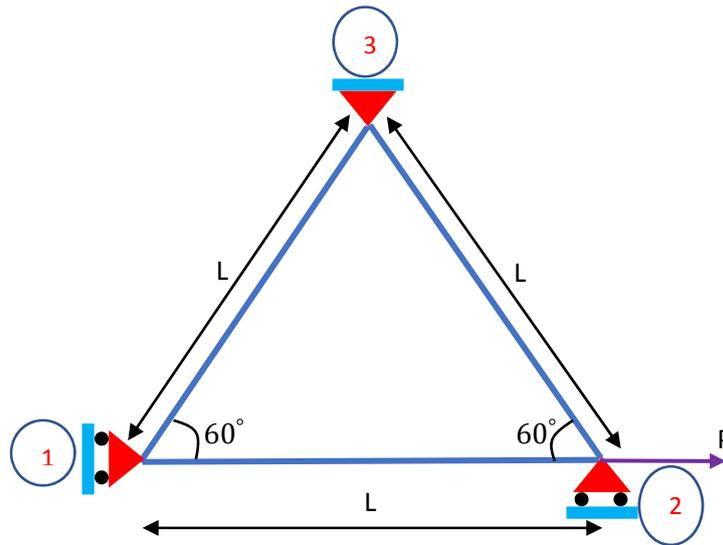
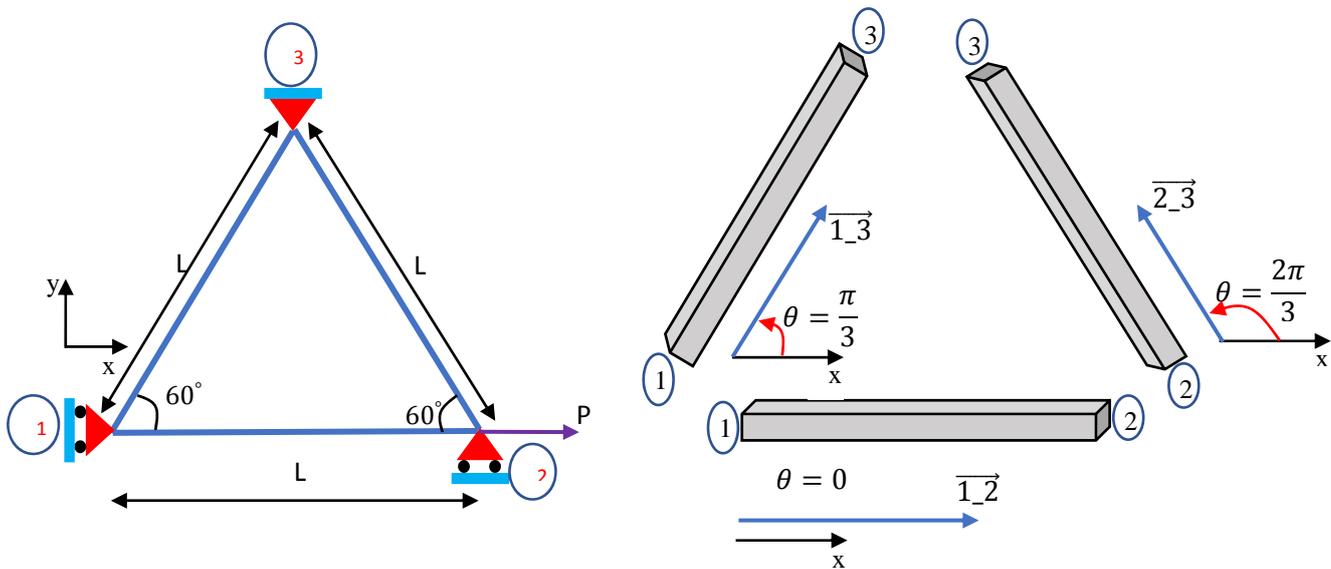


Figure I.4. Structure treillis à trois barres.

Réponse

Calcul des matrices de rigidité élémentaire des éléments I, II et III, pour cela le tableau suivant récapitule les données du problème.



Barre	Longueur	Angle θ	$C=\cos(\theta)$	$S=\sin(\theta)$	$C*C$	$S*S$	$C*S$
I: 1-2	L	0	1	0	1	0	0
II: 2-3	L	$2\pi/3$	-1/2	$\sqrt{3}/2$	1/4	3/4	$-\sqrt{3}/4$
III : 1-3	L	$\pi/3$	1/2	$\sqrt{3}/2$	1/4	3/4	$\sqrt{3}/4$

Elément I : 1-2 (N1-N2)

$$[k_{e_I}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) (2)

(1)
(2)

Elément II : 2-3 (N1-N2)

$$[k_{e_{II}}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

(2) (3)

(2)
(3)

Elément III : 1-3 (N1-N2)

$$[k_{e_{III}}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 & -1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1/4 & -\sqrt{3}/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

(1) (3)

(1)
(3)

L'assemblage des matrices élémentaires se fait comme suit

Elément I : 1-2 (N1-N2)

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) (2) (3)

(1)
(2)
(3)

Elément II : 2-3 (N1-N2)

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

(1) (2) (3)

(1)
(2)
(3)

Elément III : 1-3 (N1-N2)

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \boxed{1 + 1/4} & \boxed{\sqrt{3}/4} & -1 & 0 & \boxed{-1/4} & \boxed{-\sqrt{3}/4} \\ \boxed{\sqrt{3}/4} & \boxed{3/4} & 0 & 0 & \boxed{-\sqrt{3}/4} & \boxed{-3/4} \\ -1 & 0 & 1 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 \\ \boxed{-1/4} & \boxed{-\sqrt{3}/4} & -1/4 & \sqrt{3}/4 & \boxed{1/4 + 1/4} & \boxed{-\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4} \\ \boxed{-\sqrt{3}/4} & \boxed{-3/4} & \sqrt{3}/4 & -3/4 & \boxed{-\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4} & \boxed{3/4 + 3/4} \end{bmatrix}$$

L'équation d'équilibre donne

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \boxed{5/4} & \boxed{\sqrt{3}/4} & -1 & 0 & \boxed{-1/4} & \boxed{-\sqrt{3}/4} \\ \boxed{\sqrt{3}/4} & \boxed{3/4} & 0 & 0 & \boxed{-\sqrt{3}/4} & \boxed{-3/4} \\ -1 & 0 & \boxed{5/4} & \boxed{-\sqrt{3}/4} & \boxed{-1/4} & \boxed{\sqrt{3}/4} \\ 0 & 0 & \boxed{-\sqrt{3}/4} & \boxed{3/4} & \boxed{-\sqrt{3}/4} & \boxed{-3/4} \\ \boxed{-1/4} & \boxed{-\sqrt{3}/4} & \boxed{-1/4} & \boxed{\sqrt{3}/4} & \boxed{1/2} & \boxed{0} \\ \boxed{-\sqrt{3}/4} & \boxed{-3/4} & \boxed{\sqrt{3}/4} & \boxed{-3/4} & \boxed{0} & \boxed{2/3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ 0 \\ P \\ R_{y2} \\ R_{x3} \\ R_{y3} \end{Bmatrix}$$

L'équation réduite est donc

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}$$

Finalement

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{4L}{5EA} P \end{Bmatrix}$$

Les réactions aux niveaux des appuis obtenues sont

La résultante des forces est nulle (l'équilibre est satisfait)

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 5/4 & \sqrt{3}/4 & -1 & 0 & -1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1 & 0 & 5/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 \\ -1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = \frac{4L}{5EA} P \\ v_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{4}{5} P \\ 0 \\ P \\ -\frac{\sqrt{3}}{5} P \\ -\frac{1}{5} P \\ +\frac{\sqrt{3}}{5} P \end{Bmatrix}$$

Pour Les forces axiales qui sont données par l'expression suivante

$$\bullet \quad N = \frac{EA}{L} [C \ S] \begin{Bmatrix} u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix}$$

Il sort pour l'élément I :1-2 (N1-N2)

$$N_I = \frac{EA}{L} [1 \ 0] \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (u_2 - u_1) = \frac{EA}{L} \left(\frac{4L}{5EA} P - 0 \right) = \frac{4}{5} P$$

Donc c'est un effort de tension

Pour l'élément II : 2-3 (N1-N2)

$$N_{II} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} 0 - \frac{4L}{5EA} P \\ 0 - 0 \end{Bmatrix} = \frac{-EA}{2L} \left(\frac{-4L}{5EA} P \right) = \frac{2}{5} P$$

Aussi l'effort axial dans l'élément II est un effort de tension

Pour le dernier élément qui s'agit de l'élément III :1-3 (N1-N2)

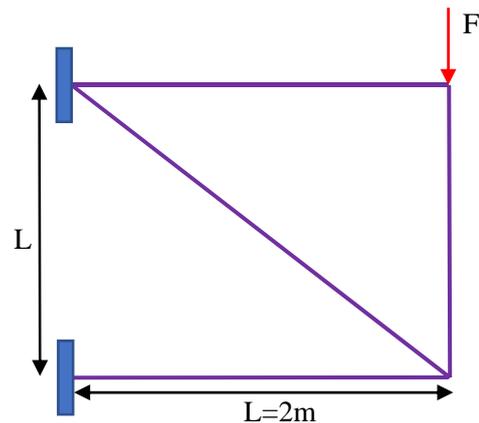
$$N_{III} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

I.2.2 Exemple 02 d'application

Soit la structure de la figure, composée d'un assemblage de 4 barres.

Toutes les barres sont de section $A = 0.01 \text{ m}^2$ et de module d'élasticité : $E = 10^5 \text{ N/m}^2$ sous l'action de la force $F = 50 \text{ N}$ Calculer en modélisant la structure avec des éléments finis de barre :

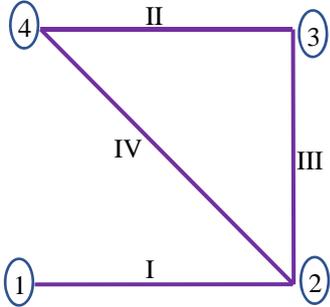
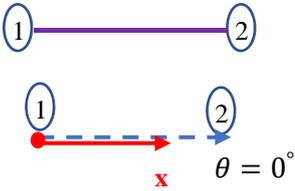
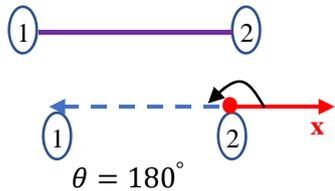
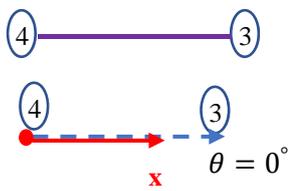
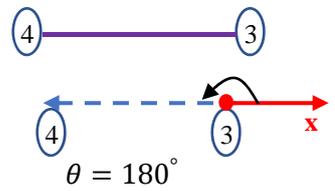
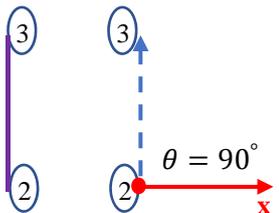
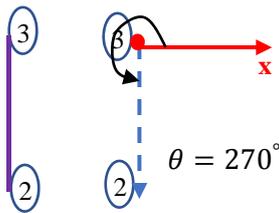
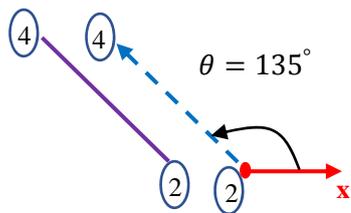
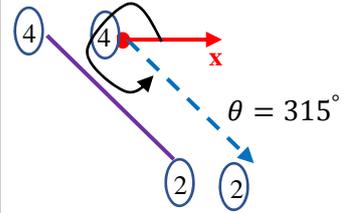
- Les déplacements aux nœuds
- L'effort normal dans la barre inclinée



Réponse

La structure est modélisée par 4 éléments finis barres et l'orientation d'angles entre le repère global et les repère local de la barre pour chaque élément est schématisée par la figure ci-contre.

Il est clair que la valeur de l'angle θ dépend de la numérotation des nœuds de chaque élément comme le montre le tableau suivant.

Structure	Elém	N_1-N_2	N_1-N_2
	I	$N_1-N_2 : 1-2$ 	$N_1-N_2 : 2-1$ 
	II	$N_1-N_2 : 4-3$ 	$N_1-N_2 : 3-4$ 
	III	$N_1-N_2 : 2-3$ 	$N_1-N_2 : 3-2$ 
	IV	$N_1-N_2 : 2-4$ 	$N_1-N_2 : 4-2$ 

Calcul des matrices de rigidité élémentaire des éléments I, II III et IV, pour cela le tableau suivant récapitule les données du problème

Barre: N_1-N_2	Longueur	θ°	$C=\cos(\theta)$	$S=\sin(\theta)$	$C*C$	$S*S$	$C*S$
I: 1-2	L	0	1	0	1	0	0
II: 4-3	L	0	1	0	1	0	0
III : 2-3	L	90	0	1	0	1	0
IV : 4-2	L	315	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1/2	1/2	-1/2

Elément I : 1-2 (N1-N2)

$$[k_{e_I}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \overset{\textcircled{1}}{1} & 0 & \overset{\textcircled{2}}{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underset{\textcircled{1}}{-1} & 0 & \underset{\textcircled{2}}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elément II : 4-3 (N1-N2)

$$[k_{e_{II}}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \overset{\textcircled{4}}{1} & 0 & \overset{\textcircled{3}}{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underset{\textcircled{4}}{-1} & 0 & \underset{\textcircled{3}}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elément III : 2-3 (N1-N2)

$$[k_{e_{III}}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \overset{\textcircled{2}}{0} & 0 & \overset{\textcircled{3}}{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \underset{\textcircled{2}}{0} & 0 & \underset{\textcircled{3}}{0} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elément IV : 4-2 (N1-N2)

$$[k_{e_{IV}}] = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} \overset{\textcircled{4}}{1/2} & \overset{\textcircled{2}}{-1/2} & \overset{\textcircled{4}}{-1/2} & \overset{\textcircled{2}}{1/2} \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Après le calcul de chaque matrice de rigidité élémentaire, l'étape suivante consiste à faire l'assemblage de ces derniers.

$$\begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ F \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 & 0 & -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 676.8 & -176.8 & 0 & 0 & -176.8 & 176.8 \\ 0 & 0 & -176.8 & 676.8 & 0 & -500 & 176.8 & -176.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & -500 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -500 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -176.8 & 176.8 & -500 & 0 & 676.8 & -176.8 \\ 0 & 0 & 176.8 & -176.8 & 0 & 0 & -176.8 & 176.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = -0.1 \\ v_2 = -0.383 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = -0.48 \\ u_4 = 0 \\ v_4 = 0 \end{Bmatrix}$$

Finalement le vecteur de force nodal est le suivant

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ F \\ f_{x4} \\ f_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \\ -481.5 \\ 0 \\ 431.5 \\ -50 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

La résultante des forces est nulle (l'équilibre est satisfait)

La dernière réponse à notre consiste à la détermination de l'effort normal dans la barre inclinée qui a pour nœud 4-2 (N1-N2).

Le vecteur de déplacement pour les nœuds 4 et 2 de l'élément fini barre IV est le suivant

$$\{U_{4-2}\} = \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1 \\ -0.383 \end{Bmatrix}$$

Les forces axiales pour chaque élément sont données par la relation (21).

$$N_{IV} = (EA/L_{IV})[C \ S] \begin{Bmatrix} u_2 - u_4 \\ v_2 - v_4 \end{Bmatrix} = (500/2\sqrt{2}) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.1 \\ -0.383 \end{Bmatrix} = 70.71N$$

L'effort axial dans la barre incliné est un effort de tension d'intensité 70.71 N.

Pour les autres éléments il sort

Pour l'élément I :1-2 (N1-N2)

$$N_I = \frac{EA}{L_I} [1 \ 0] \begin{Bmatrix} u_2 - u_1 \\ v_2 - v_1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (u_2 - u_1) = 500(-0.1 - 0) = -50 N$$

Donc c'est un effort de compression

Pour l'élément II : 4-3 (N1-N2)

$$N_{II} = \frac{EA}{L_{II}} [1 \quad 0] \begin{Bmatrix} u_4 - u_3 \\ v_4 - v_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (u_4 - u_3) = 500(0 - 0) = 0$$

Il n'y a aucun effort axial dans cette barre.

Pour l'élément III :2-3 (N1-N2)

$$N_{III} = \frac{EA}{L_{III}} [1 \quad 0] \begin{Bmatrix} u_3 - u_2 \\ v_3 - v_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} (u_3 - u_2) = 500(0 - (-0.1)) = 50 \text{ N}$$

Donc c'est un effort de tension.

La figure I.5 récapitule les résultats obtenus sous forme de déformées et d'efforts internes.

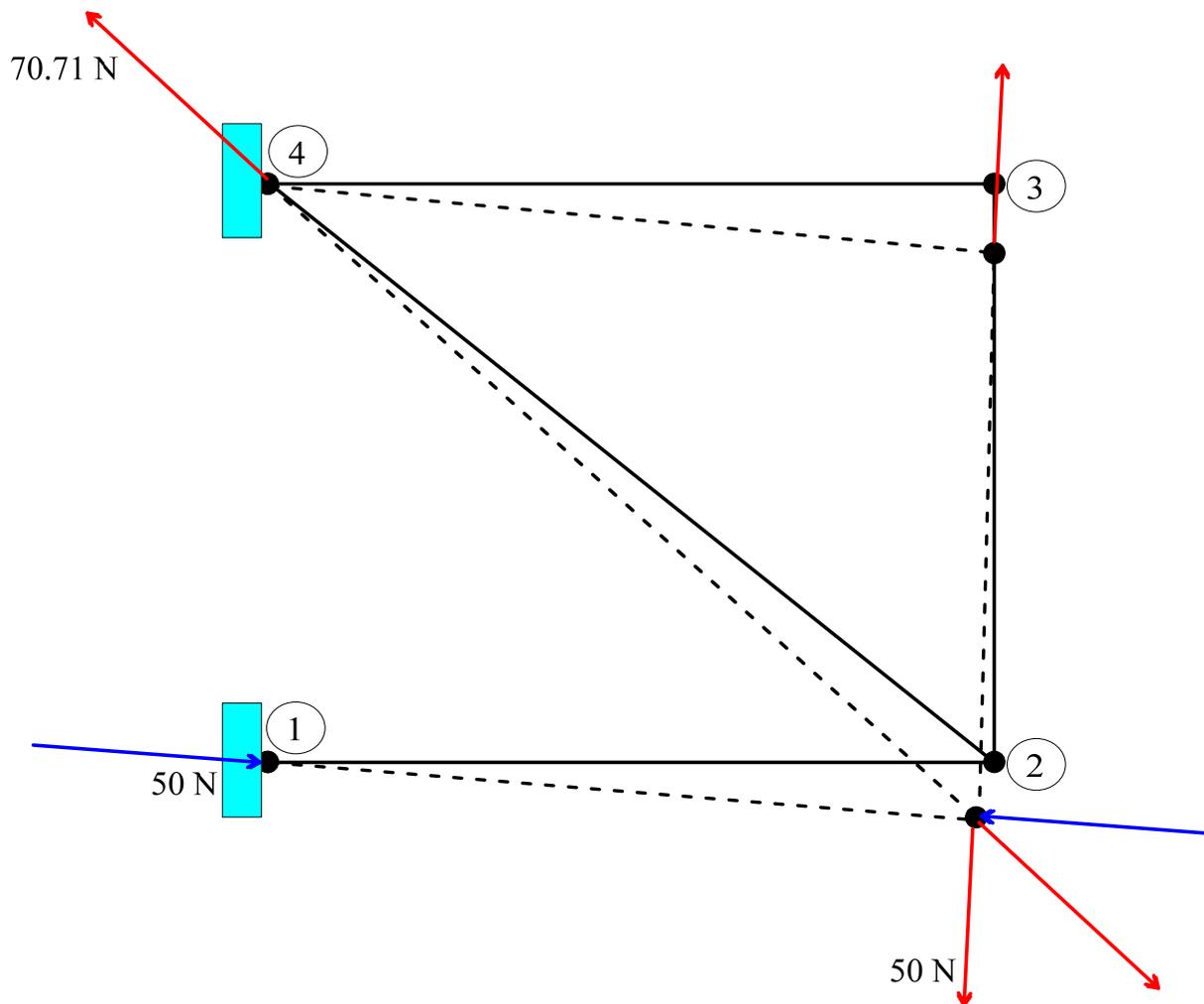


Figure I.5. Allure de la déformée et efforts axiaux dans les barres.

II.1. Introduction

La poutre est un élément de structure dont les dimensions transversales sont généralement petites par rapport à la longueur et qui est soumis à un système de sollicitation qui le fait fléchir. Nous allons successivement étudier les problèmes de flexion simple d'une poutre dans un plan. Nous nous limitons dans ce paragraphe au cas des structures formées par des poutres droites dont les lignes moyennes sont contenues dans un même plan et chargées par des forces normales ou transversales appartenant à ce plan, ou par des moments perpendiculaires à ce plan. Dans ces conditions, les lignes moyennes restent dans le plan après déformation. Nous utilisons le plan (Oxy) comme plan moyen. Les nœuds associés à l'élément de poutre sont les 2 points de la ligne moyenne situés aux extrémités du tronçon de poutre considéré. Dans un premier temps, nous travaillons dans la base locale de l'élément. Nous donnons ensuite les règles pour passer dans la base globale.

II.2. Matrice de rigidité élémentaire

Soit l'élément fini poutre représenté sur la figure II.1 avec l'orientation du sens positif des déplacements et rotations verticales (ainsi que l'effort tranchant et moment fléchissant).



Figure II.1. Elément poutre et signe conventionnel de l'effort tranchant et moment fléchissant

La déformée est reliée au moment fléchissant par

$$M(x) = -EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{II.1})$$

La contrainte est donnée par la relation suivante

$$\sigma = \frac{M(x)}{I_z} y = -yE \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{II.2})$$

La déformation déduite de l'équation (II.2) est donnée par l'expression (II.3).

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{II.3})$$

Pour la détermination de la matrice de rigidité élémentaire de poutre en suit les étapes suivantes :

Etape 01 : Identifier le problème

Cette étape consiste à choisir un système de coordonnées et une numérotation des nœuds appropriés pour l'élément. Les vecteurs des déplacements nodaux et des charges nodales pour la poutre $i-j$ prennent la forme

$$\{U^e\} = \begin{Bmatrix} \{U_i^e\} \\ \{U_j^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}, \quad \{f^e\} = \begin{Bmatrix} \{f_i^e\} \\ \{f_j^e\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

Etape 02 : Choisir des fonctions de déplacement convenables et relier les déplacements généraux de l'élément à ses déplacements nodaux

Cette étape consiste à choisir fonction de déplacement qui définit de façon unique l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (\text{II.5})$$

où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des coefficients à déterminer.

Sachant que $\theta = \frac{\partial v}{\partial x}$, il sort

$$\theta(x) = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2 \quad (\text{II.6})$$

Au nœud (i), $x=0$ et donc d'après l'équation (II,5) et (II,6)

- $v(x = 0) = a_1 = v_i$
- $\theta(x = 0) = a_2 = \theta_i$

Au nœud (j), $x=L$ et donc d'après l'équation (II,5) et (II,6)

- $v(x = L) = a_1 + a_2L + a_3L^2 + a_4L^3 = v_j$
- $\theta(x = L) = a_2 + 2a_3L + 3a_4L^2 = \theta_j$

Cela donne sous forme matricielle

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

D'après l'équation (II.7), les coefficients a_1 , a_2 , a_3 et a_4 sont déterminés par

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & -1 \\ -\frac{3}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & \frac{-2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

D'après la relation (II.8), le relation (II.5) se réécrit de la façon suivante

$$\begin{aligned} v(x) = & \underbrace{\left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_1(x)} v_i + \underbrace{\left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)}_{N_2(x)} \theta_i + \underbrace{\left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)}_{N_3(x)} v_j \\ & + \underbrace{\left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right)}_{N_4(x)} \theta_j \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Etape 03 : Relations entre déplacements et déformations

Les déformations aux différents points de l'élément peuvent être obtenues à partir de la fonction de déplacement par une différentiation dont la forme exacte dépend du type de problème traité. Dans notre cas de problème il s'agit des problèmes de flexion, les déformations sont associées à la courbure de de l'élément et correspondent aux dérivées secondes (Eq. II.3).

D'après l'équation (II.9), l'équation (II.3) devient

$$\{\varepsilon(x, y)\} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -y \begin{Bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

La matrice $[B]$ est déduite du vecteur de déformation

$$\begin{aligned} [B] &= -y \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \\ &= -y \left[\left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \quad \left(-\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}\right) \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \quad \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

La déformation est donnée par l'expression suivante (pour chaque élément)

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

Etape 04 : Relier les charges nodales aux déplacements nodaux

La matrice de rigidité pour l'élément finis poutre est donnée par

$$\begin{aligned} [k_e] &= \int_V [B]^T E [B] dV \\ &= \int_V y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} dV \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Le développement de l'équation (II.13) nous donne

$$\begin{aligned} [k_e] &= \int_V y^2 \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E y \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} dV \\ &= \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_z} \int_L^L \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \\ \frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \end{bmatrix} dx \end{aligned}$$

Finalement la matrice de rigidité de l'élément barre est donnée par l'expression (II.14).

$$[k_e] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

Le vecteur des forces élémentaires (effort tranchant et moment fléchissant) à la forme suivante

$$\bullet [k_e]\{v\} = \{f\}$$

Donc pour chaque élément on à

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ M_i \\ f_j \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

La matrice de rigidité élémentaire est construite, il reste de faire l'assemblage de ces matrices en une matrice de rigidité globale.

II.2.1. Exemple 01

Choisissez (en justifiant votre choix) un élément fini pour modéliser la structure bi-articulée de la figure II.2 de longueur totale L.

Calculer en utilisant une modélisation minimale

- les déplacements aux nœuds,
- les réactions aux appuis

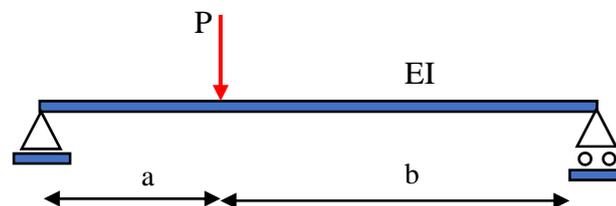


Figure II.2. Poutre bi-articulée.

Réponse

Le nombre minimal des éléments finis pour modéliser une structure est justifié par le nombre obligatoire des nœuds à maitre à savoir :

- nœuds d'appuis,
- nœuds d'application des forces

Pour cette raison le nombre minimal des nœuds est trois qui donne trois éléments finis type poutre comme le montre la figure II.3.

Il faut commencer par le calcul des matrices de rigidités élémentaires (dans notre cas deux éléments).

La matrice de rigidité pour l'élément I est donnée par

$$[k_{e_I}] = \frac{EI_z}{a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -12 & -6a & 12 & -6a \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix}$$

Tandis que la matrice de rigidité pour l'élément II aura cette expression

$$[k_{e_{II}}] = \frac{EI_z}{b^3} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix}$$

La technique d'assemblage des matrices élémentaires, nous permet d'avoir la matrice de rigidité globale.

Elément I : 1-2 (N1-N2)

$$[K] = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & \frac{-12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{4a^2}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{-12}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & \frac{12}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & \frac{4a^2}{a^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elément II : 2-3 (N1-N2)

$$[K] = EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & \frac{-12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{4a^2}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{-12}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} & \frac{12}{a^3} + \frac{12}{b^3} & \frac{-6a}{a^3} + \frac{6b}{b^3} & 0 - \frac{12}{b^3} & 0 + \frac{6b}{b^3} \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & \frac{-6a}{a^3} + \frac{6b}{b^3} & \frac{4a^2}{a^3} + \frac{4b^2}{b^3} & 0 - \frac{6b}{b^3} & 0 + \frac{2b^2}{b^3} \\ 0 & 0 & 0 - \frac{12}{b^3} & 0 - \frac{6b}{b^3} & 0 + \frac{12}{b^3} & 0 - \frac{6b}{b^3} \\ 0 & 0 & 0 + \frac{6b}{b^3} & 0 + \frac{2b^2}{b^3} & 0 - \frac{6b}{b^3} & 0 + \frac{4b^2}{b^3} \end{bmatrix}$$

Les conditions aux limites sont : $v_1 = 0$ et $v_3 = 0$.

L'équation d'équilibre statique avec la technique de réduction de l'équation globale est montrée comme suit

1 2 3

Elimination des lignes et colonnes des nœuds bloqués

$$EI_z \begin{bmatrix} \frac{12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & -\frac{12}{a^3} & \frac{6a}{a^3} & 0 & 0 \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{4a^2}{a^3} & -\frac{6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{a^3} & -\frac{6a}{a^3} & \frac{12}{a^3} + \frac{12}{b^3} & -\frac{6a}{a^3} + \frac{6b}{b^3} & -\frac{12}{b^3} & \frac{6b}{b^3} \\ \frac{6a}{a^3} & \frac{2a^2}{a^3} & -\frac{6a}{a^3} + \frac{6b}{b^3} & \frac{4a^2}{a^3} + \frac{4b^2}{b^3} & -\frac{6b}{b^3} & \frac{2b^2}{b^3} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{b^3} & -\frac{6b}{b^3} & \frac{12}{b^3} & -\frac{6b}{b^3} \\ 0 & 0 & \frac{6b}{b^3} & \frac{2b^2}{b^3} & -\frac{6b}{b^3} & \frac{4b^2}{b^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 = 0 \\ -P \\ M_2 = 0 \\ F_3 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} \dots (*)$$

Force et moment appliqués aux nœuds

L'équation réduite est donc

$$EI_z \begin{bmatrix} \frac{4}{a} & -\frac{6}{a^2} & \frac{2}{a} & 0 \\ -\frac{6}{a^2} & \frac{12}{a^3} + \frac{12}{b^3} & -\frac{6}{a^2} + \frac{6}{b^2} & \frac{6}{b^2} \\ \frac{2}{a} & -\frac{6}{a^2} + \frac{6}{b^2} & \frac{4}{a} + \frac{4}{b} & \frac{2}{b} \\ 0 & \frac{6}{b^2} & \frac{2}{b} & \frac{4}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La résolution du system d'équation réduite donne

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{P}{6EIL} \begin{Bmatrix} -ab(2b + a) \\ -2a^2b^2 \\ 2ab(a - b) \\ ab(2a + b) \end{Bmatrix}$$

L'avant dernière étape est le calcul du vecteur de force nodal (Eq. (*)) qui comprend les réactions par le biais du vecteur de déplacement (déplacement vertical et rotation) et la matrice de rigidité globale.

$$\begin{Bmatrix} F_1 = R_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 = R_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{b}{L}P \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ \frac{a}{L}P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La dernière étape et le calcul des forces internes pour chaque élément.

Elément I : 1-2 (N1-N2)

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{a^3} \begin{bmatrix} 12 & 6a & -12 & 6a \\ 6a & 4a^2 & -6a & 2a^2 \\ -12 & -6a & 12 & -6a \\ 6a & 2a^2 & -6a & 4a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = \frac{-Pab(a+2b)}{6EIL} \\ v_2 = \frac{-2a^2b^2}{6EIL} \\ \theta_2 = \frac{P2ab(a-b)}{6EIL} \end{Bmatrix}$$

donc

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{Pb}{L} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ a \end{Bmatrix}$$

Tandis que la matrice de rigidité pour l'élément II aura cette expression

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ M_2 \\ f_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{b^3} \begin{bmatrix} 12 & 6b & -12 & 6b \\ 6b & 4b^2 & -6b & 2b^2 \\ -12 & -6b & 12 & -6b \\ 6b & 2b^2 & -6b & 4b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 = \frac{-2a^2b^2}{6EIL} \\ \theta_2 = \frac{P2ab(a-b)}{6EIL} \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = \frac{Pab(2a+b)}{6EIL} \end{Bmatrix}$$

Finalement, il sort pour l'élément II que

$$\begin{Bmatrix} f_2 \\ M_2 \\ f_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ -b \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Les efforts internes sont schématisés dans la figure suivante.

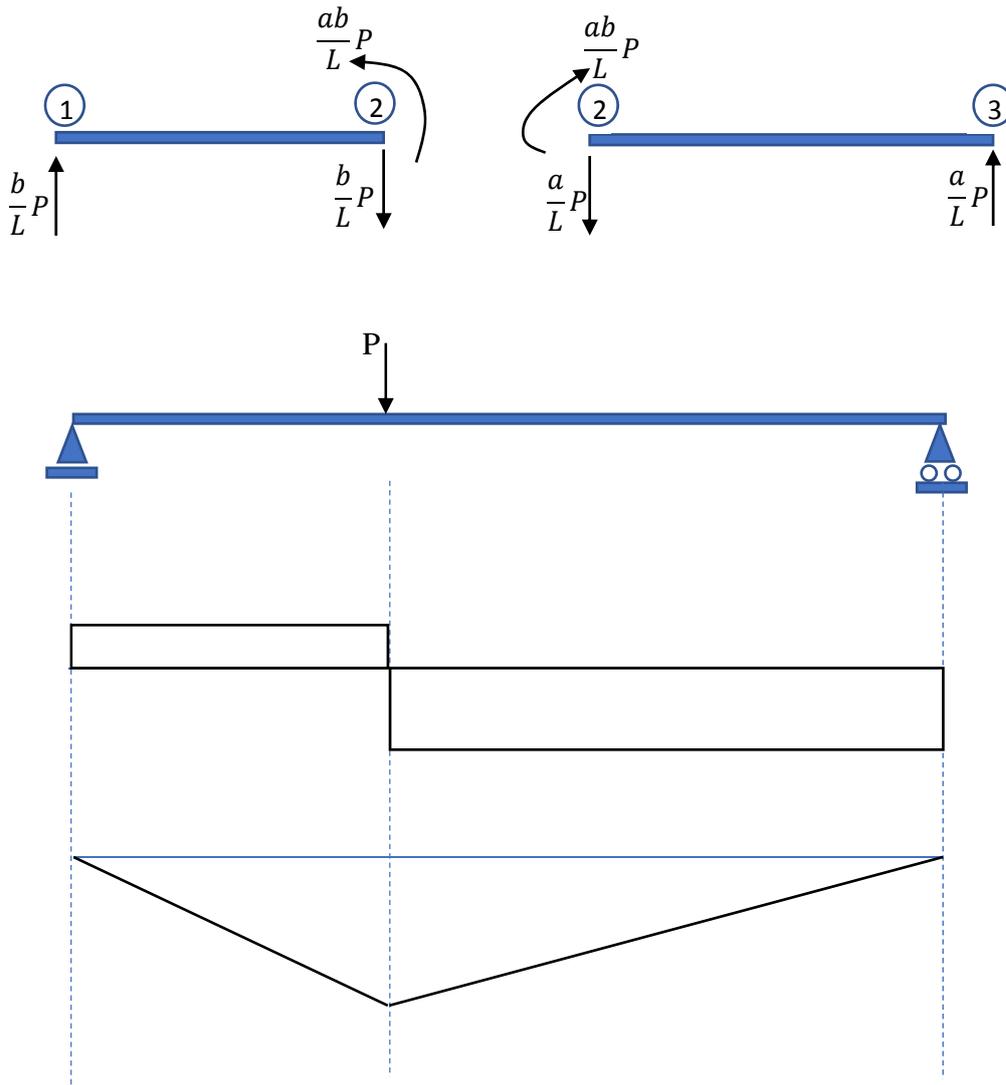


Figure II.4. Diagramme de l'effort tranchant et le moment fléchissant dans la poutre bi-articulée composée de deux éléments.

II.2.2. Exemple 02

Soit la poutre continue, formée de trois éléments et quatre nœuds sollicitée à une charge concentrée localisée à une distance L par rapport à l'appui 3 (figure II.3), (E et I sont constants).

- 1- Déterminer la matrice de rigidité globale du système,
- 2- Calculer les déplacements nodaux et les rotations nodales,
- 3- Déterminer les efforts tranchants, les moments fléchissant et tracer leurs diagrammes,
- 4- Calculer les réactions d'appuis.

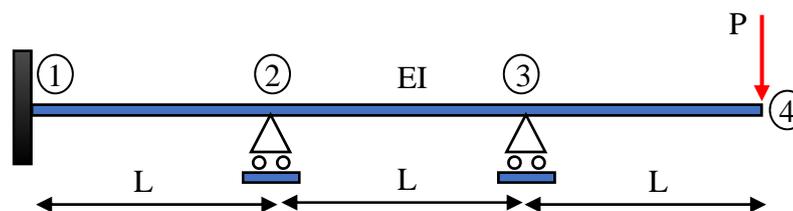


Figure II.2. Poutre continue avec trois éléments.

Solution

Il faut commencer par le calcul des matrices de rigidités élémentaires (dans notre cas trois éléments). Etant donné que les caractéristiques géométriques et mécaniques sont les mêmes pour les trois (03) éléments, la matrice de rigidité élémentaire est identique.

$$[k_{e_I}] = [k_{e_{II}}] = [k_{e_{III}}] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

La technique d'assemblage des matrices élémentaires, nous permet d'avoir la matrice de rigidité globale.

$$[K] = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

exemple on a : $v_1 = \theta_1 = v_2 = v_3 = 0$.

L'équation d'équilibre donne

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ 0 \\ R_3 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Elimination des lignes et colonnes des nœuds bloqués

L'équation réduite est donc

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 & 0 & 0 \\ 2L^2 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La résolution du système d'équation nous donne

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{EI_z} \begin{Bmatrix} \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{13L}{21} \\ \frac{-11}{14} \end{Bmatrix}$$

Après détermination du vecteur $\{u\}$ qui comprend les déplacements et les rotations à chaque nœud de l'élément, l'étape suivante est de déterminer l'effort tranchant et le moment fléchissant à chaque élément et donc de tracer ces derniers pour chaque élément.

Elément I : 1-2 (N1-N2)

Dans ce cas, $\{u_I\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$, l'effort tranchant et le moment tranchant au niveau des nœuds 1 et

2 pour l'élément I est donné par la relation suivante

$$[k_{e_I}]\{u_I\} = \{F_I\}$$

donc

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 = \frac{PL^2}{14EI_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Il sort

$$\{F_I\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{7}P \\ \frac{1}{7}PL \\ -\frac{3}{7}P \\ \frac{2}{7}PL \end{Bmatrix}$$

Elément II : 2-3 (N1-N2)

Dans ce cas, $\{u_{II}\} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$, l'effort tranchant et le moment tranchant au niveau des nœuds 2 et

3 pour l'élément II est donné par la relation suivante

$$[k_{e_{II}}]\{u_{II}\} = \{F_{II}\}$$

donc

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 = 0 \\ \theta_2 = \frac{PL^2}{14EI_z} \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = \frac{-4PL^2}{14EI_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_2 \\ M_2 \\ R_3 \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

Il sort

$$\begin{Bmatrix} R_2 \\ M_2 \\ R_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-9}{7}P \\ \frac{-2}{7}PL \\ \frac{9}{7}P \\ \frac{-7}{7}PL \end{Bmatrix}$$

Elément III : 3-4 (N1-N2)

Dans ce cas, $\{u_{III}\} = \begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$, l'effort tranchant et le moment tranchant au niveau des nœuds 3

et 4 pour l'élément III est donné par la relation suivante

$$[k_{e_{III}}]\{u_{III}\} = \{F_{III}\}$$

donc

$$\frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 = 0 \\ \theta_3 = \frac{-4PL^2}{14EI_z} \\ v_4 = \frac{-13PL^3}{21EI_z} \\ \theta_4 = \frac{-11PL^2}{14EI_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_3 \\ M_3 \\ R_4 \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

Il vient

$$\begin{Bmatrix} R_3 \\ M_3 \\ R_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{7}{7}P \\ \frac{7}{7}PL \\ \frac{-7}{7}P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La dernière étape consiste à implanter graphiquement le moment fléchissant et l'effort tranchant pour chaque élément et donc pour la poutre continue (figure II. 3).

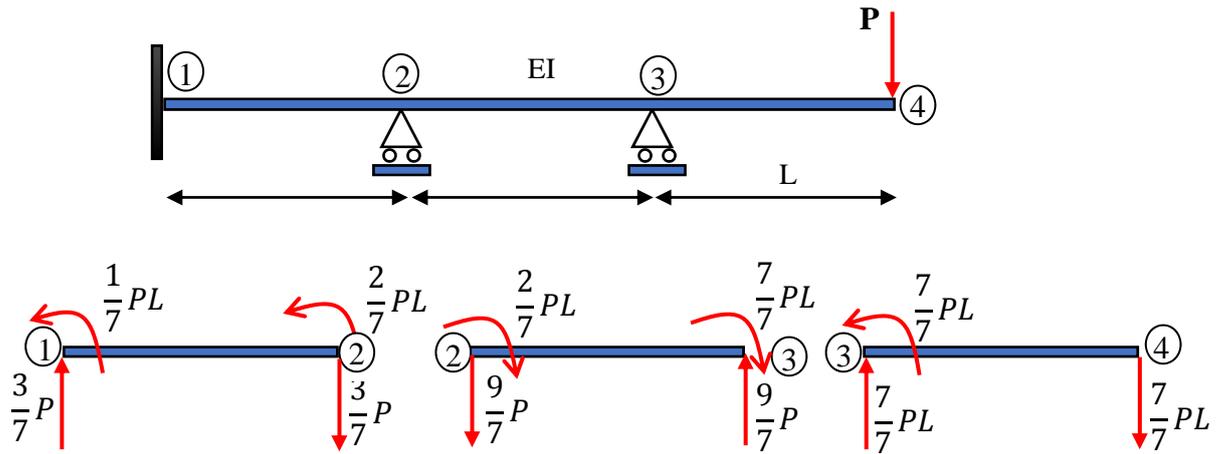


Figure II.3. Forces nodales pour chaque élément.

Le digramme de l'effort tranchant et le moment fléchissant sont schématisés dans la figure II.4.

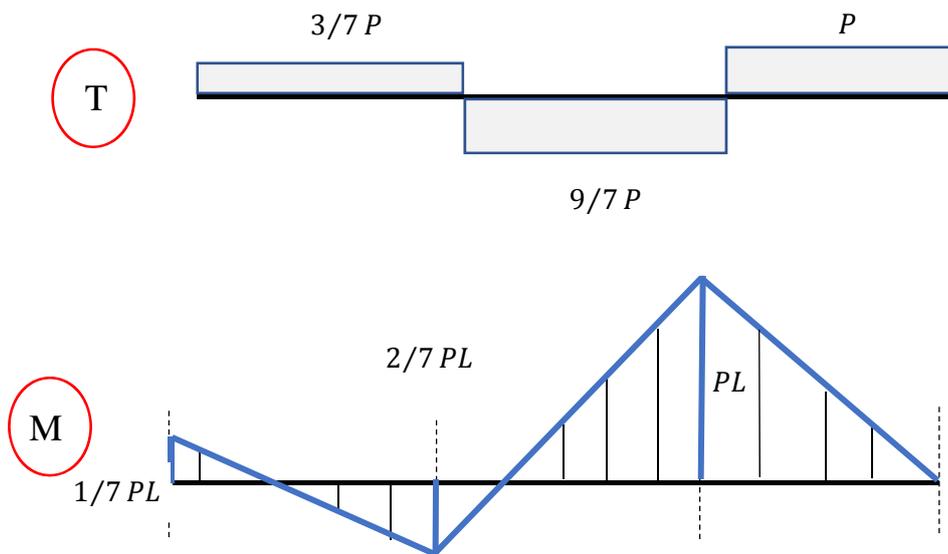


Figure II.4. Diagramme de l'effort tranchant et le moment fléchissant dans la poutre continue composée de trois éléments.