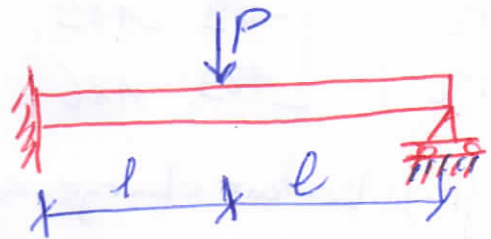


### Exercice 5

Considérons l'élasto pontre représentée par la figure ①,  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $I = 60 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ ,  $P = 20 \text{ kN}$ ,  $L = 2 \text{ m}$ . Déterminer :

- 1/ la matrice de rigidité de chaque élément
- 2/ " " " " globale
- 3/ les déplacements et les rotations dans les nœuds
- 4/ les réactions aux appuis.

fig ①



solution : (Rappel)

le principe de la EF c'est de trouver :

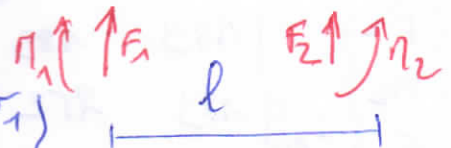
$$\{F\} = [K] \{\delta\} \rightarrow \text{vecteur déplacement}$$

Vecteur charge

Matrice de rigidité



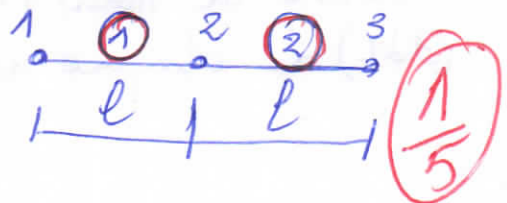
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



Il faut déterminer on premier la matrice de rigidité de chaque élément

1, 2, 3 : nombre de nœud

①, ② : nombre d'élément

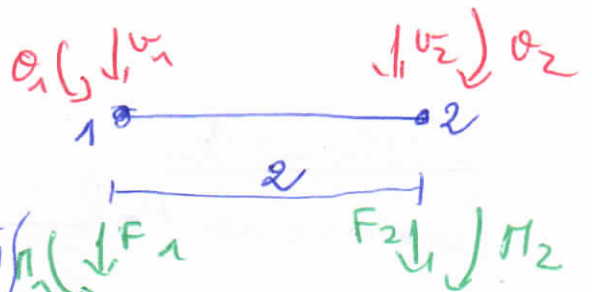


# Matrice de rigidité Elementaire

Elément ① L<sub>1-2</sub>

$l_1 = 2$ ,  $E_1 = 210 \times 10^6$

$I_1 = 60 \times 10^{-6}$



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{E_1 I_1}{l_1} \begin{bmatrix} 12 & 6(2) & -12 & 6(2) \\ 6(2) & 4(2)^2 & -6(2) & 2(2)^2 \\ -12 & -6(2) & 12 & -6(2) \\ 6(2) & 2(2)^2 & -6(2) & 4(2)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_1\} = [K_1] \{s_1\}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = 10^2 \begin{bmatrix} 189 & 189 & -189 & 189 \\ 189 & 252 & -189 & 126 \\ -189 & -189 & 189 & -189 \\ 189 & 126 & -189 & 252 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad \text{--- ①}$$

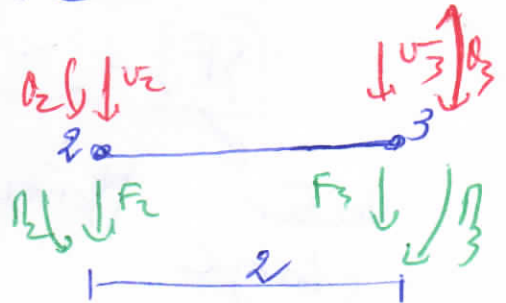
$\{F_1\}$ : Vecteur charge appliqué à l'élément ①

$[K_1]$ : Matrice de rigidité de l'élément ①

$\{s_1\}$ : Vecteur déplacement nodal à l'élément ①

Elément ② L<sub>2-3</sub>;  $l_2 = l_1 = 2$ ,  $I_2 = I_1$   $\Rightarrow K_2 = K_1$   
 $E_2 = E_1$

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = 10^2 \begin{bmatrix} 189 & 189 & -189 & 189 \\ 189 & 252 & -189 & 126 \\ -189 & -189 & 189 & -189 \\ 189 & 126 & -189 & 252 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$



$$\{F_2\} = [K_2] \{s_2\}$$

## 2/ Assemblage

maintenant on passe à l'assemblage  $K = K_1 + K_2$

les dimensions de K c'est déterminer en fonction du nombre de nœud (n) et le nombre de degré de liberté (ddl) de chaque nœud

$\frac{2}{5}$

dans notre Cas :

- le nombre de nœud  $n=3$  (1, 2, 3)
- chaque nœud a 2 ddl  $\Rightarrow$ 
  - (1  $\rightarrow$   $v_1$  et  $\theta_1$ )
  - (2  $\rightarrow$   $v_2$  et  $\theta_2$ )
  - (3  $\rightarrow$   $v_3$  et  $\theta_3$ )

$$\Rightarrow 3 \times 2 = 6 \Rightarrow K = [6 \times 6]$$

$$K = K_1 + K_2, \quad F = F_1 + F_2, \quad \delta = \delta_1 + \delta_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 189 & 189 & -189 & 189 & & \\ 189 & 252 & -189 & 126 & & \\ -189 & -189 & 189 & -189 & & \\ 189 & 126 & -189 & 252 & & \\ & & -189 & -189 & 189 & -189 \\ & & 189 & 126 & -189 & 252 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$\downarrow$  V (Vert) R (Rouge)

V: Vert ①  
R: Rouge ②

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 189 & 189 & -189 & 189 & & \\ 189 & 252 & -189 & 126 & & \\ -189 & -189 & 378 & 0 & -189 & 189 \\ 189 & 126 & 0 & 504 & -189 & 126 \\ & & -189 & -189 & 189 & -189 \\ & & 189 & 126 & -189 & 252 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (**)$$

$$\{F\} = [K]$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ + \\ F_2 \end{Bmatrix} [K_1 + K_2]$$

$$\{\delta\}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ + \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

### 3/ Application des conditions aux limites (CL)

les nœuds: ①  $\begin{cases} \rightarrow v_1 = 0 \\ \rightarrow \theta_1 = 0 \end{cases} \begin{cases} F_1 \neq 0 \\ M_1 \neq 0 \end{cases}$

②  $\begin{cases} \rightarrow v_2 \neq 0 \\ \rightarrow \theta_2 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} F_2 = -20 \\ M_2 = 0 \end{cases}$

③  $\begin{cases} \rightarrow v_3 = 0 \\ \rightarrow \theta_3 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} F_3 \neq 0 \\ M_3 = 0 \end{cases}$

On Introduisant les CL dans le système (\*\*\*)

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ -20 \\ 0 \\ F_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^2 \begin{bmatrix} 189 & 189 & -189 & 189 & 0 & 0 \\ 189 & 252 & -189 & 126 & 0 & 0 \\ -189 & -189 & 378 & 0 & -189 & 189 \\ 189 & 126 & 0 & 504 & -189 & 126 \\ 0 & 0 & -189 & -189 & 189 & -189 \\ 0 & 0 & 189 & 126 & -189 & 252 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow ① \\ \leftarrow ② \\ \\ \\ \leftarrow ⑤ \end{matrix}$$

(\*\*\*)

N.B: Élimination des lignes et des colonnes à un ddl = 0

- Élimination de ligne ① et la Colonne ①

- " " " ② " " " ②

- " " " ⑤ " " " ⑤

le système (\*\*\*) devient

$$\begin{Bmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^2 \begin{bmatrix} 378 & 0 & 189 \\ 0 & 504 & 126 \\ 189 & 126 & 252 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Après la résolution de ce système on obtient les déplacements et les rotations

$$\begin{cases} v_2 = -0,9259 \text{ mm} \\ \theta_2 = -0,1984 \text{ mm} \\ \theta_3 = 0,7937 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{d'après les} \\ \text{conditions aux limites} \end{matrix}$$

4/5

4/ pour déterminer les réactions il suffit de revenir au système précédent (\*\*\* ) et on substitue les déplacements ( $\delta$ ) dans le <sup>page (4)</sup> 4e <sup>(5)</sup> terme ( $S$ )

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = 10^2 \begin{bmatrix} 189 & 189 & -189 & 189 & 0 & 0 \\ 189 & 252 & -189 & 126 & 0 & 0 \\ -189 & -189 & 378 & 0 & -189 & 189 \\ 189 & 126 & 0 & 504 & -189 & 126 \\ 0 & 0 & -189 & -189 & 189 & -189 \\ 0 & 0 & 189 & 126 & -189 & 252 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,9259 \\ -0,1984 \\ 0 \\ 0,7937 \end{pmatrix} 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,75 \\ 15 \\ -20 \\ 0 \\ 6,25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= 13,75 \text{ kN} \\ M_1 &= 15 \text{ kNm} \\ F_2 &= -20 \text{ kN} \\ M_2 &= 0 \\ F_3 &= 6,25 \text{ kN} \\ M_3 &= 0 \end{aligned}$$

(5/5)