



جامعة غليزان  
RELIZANE UNIVERSITY

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة غليزان  
Université de Relizane

# SYSTEMES LINEAIRES MULTIVARIABLES

## Chapitre II

### Représentation des systèmes multi-variables

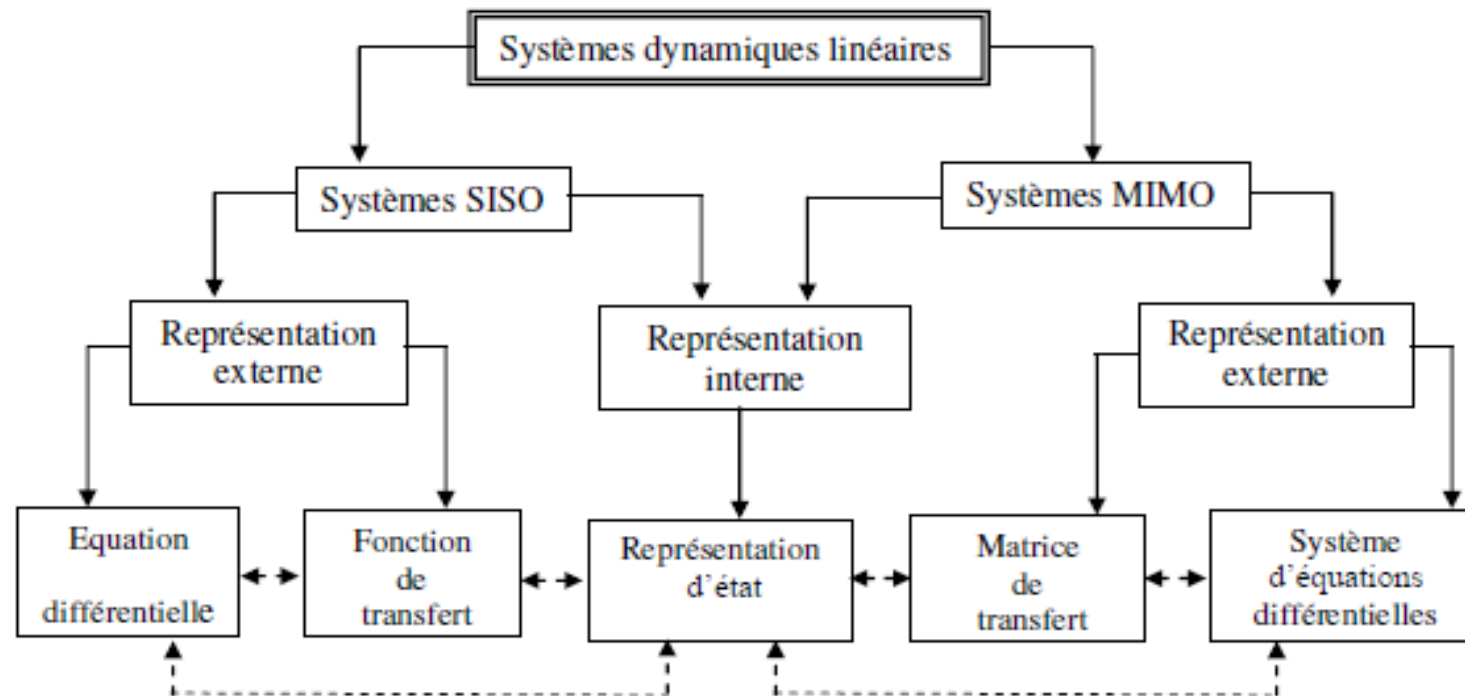
2021/2022

# Introduction

- Les procédés industriels au niveau des variables stratégiques sont très fréquemment multivariables. En effet, la quasi-totalité des systèmes industriels comprenant au moins deux variables de sortie.
- La commande de ces procédés constitue un objet fondamental dans le domaine de l'automatique, et demande une démarche rigoureuse pour aboutir aux résultats désirés ; plusieurs techniques de commande ont été développées dans ce sens, qui ont pour but de réduire le phénomène d'interaction existant entre les variables du système.
- Pour de telles raisons, les théories de commande avancée utilisent un type de modélisation moderne dite *représentation d'état* (ou *représentation interne*). Ce type de modèle fut popularisé dans les années 60 même si son origine est plus lointaine, il s'agit d'un modèle qui prend en compte la dynamique interne (état) du système et ne se limite pas à la description d'un comportement de type boîte noire (entrée/ sortie).

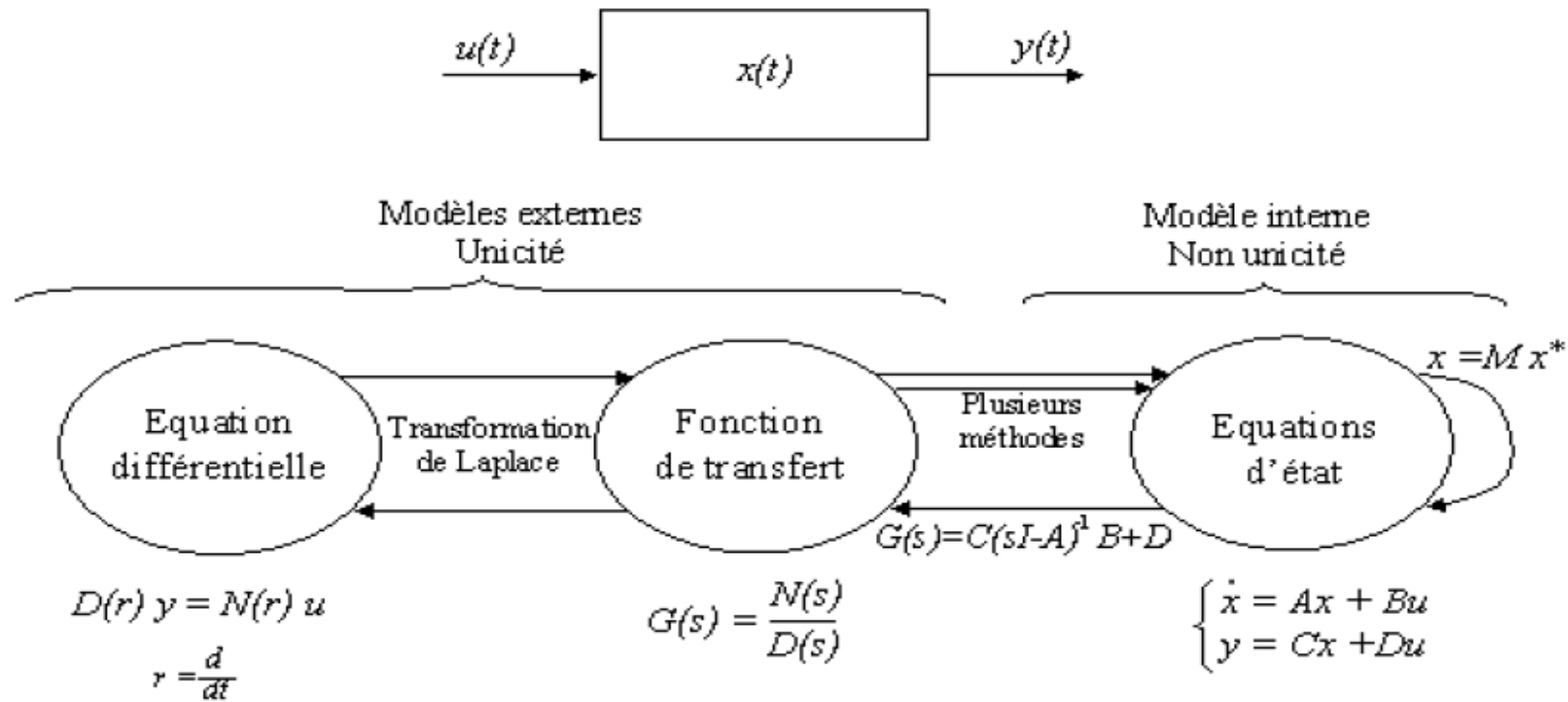
# Différentes représentations des systèmes

- Le schéma ci-dessous montre les différents types de représentations des systèmes dynamiques
- linéaires en considérant les deux cas monovariable et multivariable.



Différents types de représentations des systèmes.

# Représentation des systèmes mono-variables (SISO)



Equation différentielle

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u$$

$$D(r)y = N(r)u$$

$$m \leq n$$

Equation caractéristique :

$$a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Fonction de transfert

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$m \leq n$$

Equation caractéristique :

$$a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Equations d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Polynôme caractéristique de A :

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

## Représentation internes (ou d'état)

- ✓ **Etat** : L'état d'un système dynamique (régi par des équations différentielles) est le plus petit ensemble de variables (variables d'état) dont la connaissance à un instant donné  $t = t_0$ , en plus de l'entrée à  $t \geq t_0$ , permet de déterminer complètement l'évolution future ( $t \geq t_0$ ) du système.
- ✓ **Variables d'état** : l'ensemble de ces informations constitue les variables d'état du système à l'instant  $t_0$ :  $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ .
- ✓ **Vecteur d'état** : les variables d'état sont toujours rassemblées dans un vecteur  $x$  nommé vecteur d'état, ainsi à  $t = t_0$ , on aura  $x(t_0) = [x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)]^T$ , on peut dire que les variables d'état représentent l'évolution des conditions initiales, ou encore qu'elles résument tous le passé du système, les variables d'état sont la mémoire du passé.
- ✓ **Espace d'état** : Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état  $x$  est susceptible d'évoluer, à chaque instant le vecteur  $x$  étant associé à un point de cet espace. Cet espace est donc  $R^n$ .

## Représentation internes (ou d'état)

- Dans la plupart des cas, l'évolution en fonction du temps du système peut être décrite par les deux équations (équation d'état et équation de sortie) suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x, u, t) \\ y(t) &= g(x, u, t)\end{aligned}$$

- Dans le cas où le système considéré est linéaire, la représentation d'état se met sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

- Si le système est supposé, en outre invariant (stationnaire), il vient : (SISO)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- où :

- $x(t) \in R^n$  : Vecteur d'état
- $y(t) \in R$  : Vecteur de sortie (vecteur de mesure)
- $u(t) \in R$  : Vecteur d'entrée (vecteur de commande)
- $A \in R^{n \times n}$  : Matrice d'évolution ou dynamique
- $B \in R^{n \times 1}$  : Vecteur de commande (vecteur d'entrée)
- $C \in R^{1 \times n}$  : Vecteur d'observation (vecteur de sortie)
- $D \in R$  : Constante de transmission directe (souvent nul).

# Représentation des systèmes multivariables (MIMO)

- ✓ En général, la représentation des systèmes multi-variable se fait par extension des techniques du cas mono-variable.

## Représentation externes

### Système d'équations différentielles

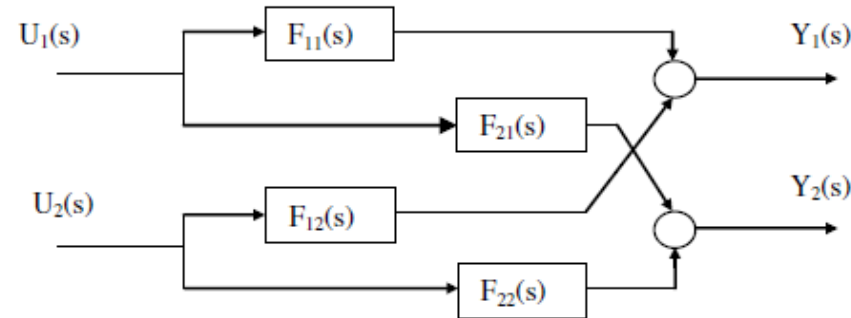
Un système linéaire invariant multi-variable d'ordre  $n$  possédant  $m$  entrées et  $p$  sorties peut être décrit par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Après application des lois de la physique, de nombreux systèmes multi-variables peuvent être décrits par des équations différentielles et algébriques de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ y_1(t) = h_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \\ \vdots \\ y_p(t) = h_p(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t) \end{cases}$$

- ✓ où  $u_i(t), i = 1 \dots m$  et  $y_j(t), j = 1 \dots p$  sont respectivement l'entrée et la sortie du système. Dans le cadre de notre cours les fonctions  $f_i$  et  $h_i$  sont linéaires.

## Matrice de transfert

- ✓ Dans le cas SISO, la fonction reliant l'entrée et la sortie du système est appelée fonction de transfert, dans le cas MIMO, on a plusieurs fonctions de transfert représentant l'effet de chaque entrée sur chaque sortie. L'ensemble de ces fonctions rangées en tableau constitue la matrice de transfert du système.



- Cas des systèmes SISO:  $F(S) = \frac{Y(s)}{U(s)}$
- Cas des systèmes MIMO: 
$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & F_{12}(s) \\ F_{21}(s) & F_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

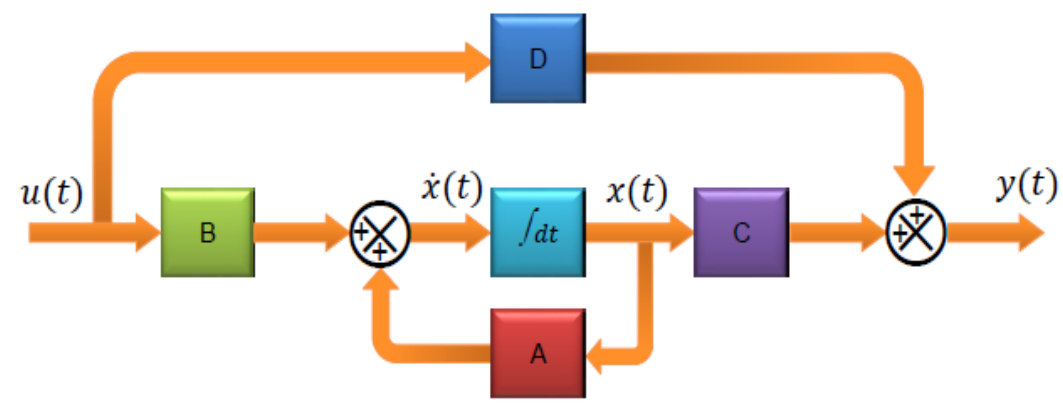
## Représentation internes (ou d'état)

- ✓ La représentation d'état étant particulièrement adaptés aux systèmes multi-variables, elle est obtenue à partir des autres représentations (particulièrement à partir de la matrice de transfert). Un système linéaire multi-variable et invariant possédant  $m$  entrées et  $p$  sorties, peut être représenté par:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- ✓ où :

- $x(t) \in R^n$  : Vecteur d'état
- $y(t) \in R^m$  : Vecteur de sortie (vecteur de mesure)
- $u(t) \in R^p$  : Vecteur d'entrée (vecteur de commande)
- $A \in R^{n \times n}$  : Matrice d'évolution ou dynamique
- $B \in R^{n \times m}$  : Vecteur de commande (vecteur d'entrée)
- $C \in R^{p \times n}$  : Vecteur d'observation (vecteur de sortie)
- $D \in R^{p \times m}$  : Constante de transmission directe.



# Résolution de l'équation d'état

- Considérons un système d'ordre  $n$  représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (2.1)$$

- ✓ Il s'agit de trouver l'expression de la sortie  $y(t)$  à une entrée  $u(t)$

- **Cas d'une équation scalaire**

- ✓ Dans un premier temps, pour fixer les idées, on se place dans le cas scalaire c.-à-d., le système est d'ordre  $n = 1$  et a une seule variable d'état  $x(t)$ . Dans ce cas, les équation (2.1) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \quad \text{avec: } x(t_0 = 0) = x_0 \\ y(t) &= cx(t) + du(t)\end{aligned}$$

- ✓ où  $a, b, c$  et  $d$  sont des constantes.
- **Réponse libre:** Il s'agit ici de voir comment le système réagit librement à la seule condition initiale et en absence de l'entrée. C'est la réponse du système autonome.

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a \Rightarrow \frac{d[\ln(x(t))]}{dt} = a$$

- ✓ Intégrons le dernier terme entre  $t_0 = 0$  et  $t$ , on aura :

$$[\ln(x(t))]_{t_0}^t = a[t]_0^t$$

$$\ln(x(t)) - \ln(x(t_0)) = a t \Rightarrow \ln\left(\frac{x(t)}{x(t_0)}\right) = a t \Rightarrow \frac{x(t)}{x(t_0)} = e^{a t}$$

# Résolution de l'équation d'état

- Finalement, la réponse libre est:

$$x(t) = x_0 e^{a t}$$

- **Réponse complète (totale):** Il s'agit ici de voir comment le système réagit en présence de l'entrée. On utilise la méthode de variation des constantes :

$$\begin{aligned}x(t) &= k(t) e^{a t} \\ \dot{x}(t) &= a \underbrace{k(t) e^{a t}}_{x(t)} + \dot{k}(t) e^{a t} = a x(t) + \dot{k}(t) e^{a t} \\ \dot{x}(t) &= a x(t) + \dot{k}(t) e^{a t} = a x(t) + b u(t) \\ \Rightarrow \dot{k}(t) &= e^{-a t} b u(t) \\ \Rightarrow k(t) &= k(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a \tau} b u(\tau) d\tau\end{aligned}$$

- En remplaçant l'expression  $k(t)$  dans  $x(t) = k(t) e^{a t}$ , on obtient :

$$x(t) = k(t) e^{a t} = \left[ k(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a \tau} b u(\tau) d\tau \right] e^{a t} \quad (2,2)$$

- Finalement, on obtient la réponse totale du système :

$$y(t) = \underbrace{c x_0 e^{a t}}_{\text{Réponse libre}} + \underbrace{c \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)} b u(\tau) d\tau}_{\text{Réponse forcée}} + d u(t) \quad (2,3)$$

## Cas d'une équation matricielle

- Dans le cas où le système est d'ordre  $n > 1$ , donc possède  $n$  variables d'état  $x_i(t)$ .

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

- La solution d'un tel système matriciel est analogue à celle obtenue dans le cas scalaire, donc, en remplaçant les scalaires  $a, b, c$  et  $d$  dans (2.2) et (2.3) par les matrices  $A, B, C$  et  $D$  respectivement, il vient :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x_0}_{\text{Réponse libre}} + \underbrace{C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{Réponse forcée}}$$

- Cependant cela nous amène à considérer une fonction matricielle de type nouveau,  $e^{At}$  où  $A$  est une *matrice*.

Posons :  $\Phi(t) = e^{At}$        $x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$

- ✓  $\Phi(t)$  est une matrice dite *matrice de transition d'état*.
- Le problème de la résolution des équations d'état se ramène au problème de calcul de la matrice de transition. Avant de décrire différentes méthodes pour l'obtention de la matrice de transition, nous montrons quelques propriétés de cette matrice.

# Propriétés de la matrice de transition d'état

*Propriété 1* :  $\Phi(0) = e^{A \times 0} = I$  (où  $I$  matrice identité).

*Propriété 2* :  $\Phi(t) = e^{At} = [e^{-At}]^{-1} = [\Phi(-t)]^{-1}$  ,  $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$ .

*Propriété 3* :  $\Phi(t_1 + t_2) = e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2} = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$ .

*Propriété 4* :  $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$ .

*Propriété 5* :  $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)\Phi(t_2 - t_1)$ .

## ✓ *Calcul de la matrice de transition d'état*

Il s'agit de calculer  $e^{At}$ , et bon nombre de possibilités sont offertes :

## ❖ *Méthode de transformée de Laplace*

Soit l'équation d'état  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , avec :  $x(t_0 = 0) = x_0$ .

En posant  $u(t) = 0$ .

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$TL[\dot{x}(t)] = TL[Ax(t)]$$

$$sX(s) - X_0 = AX(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 \Rightarrow TL^{-1}[X(s)] = x(t) = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0$$

$$x(t) = e^{At}x_0$$

$$e^{At} = TL^{-1}[(sI - A)^{-1}]$$