République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Centre Universitaire de Relizane
Institut des Sciences et Technologies
Département d'Informatique

2ème année Informatique

Théorie des graphes
Cours 4: Plus court chemin

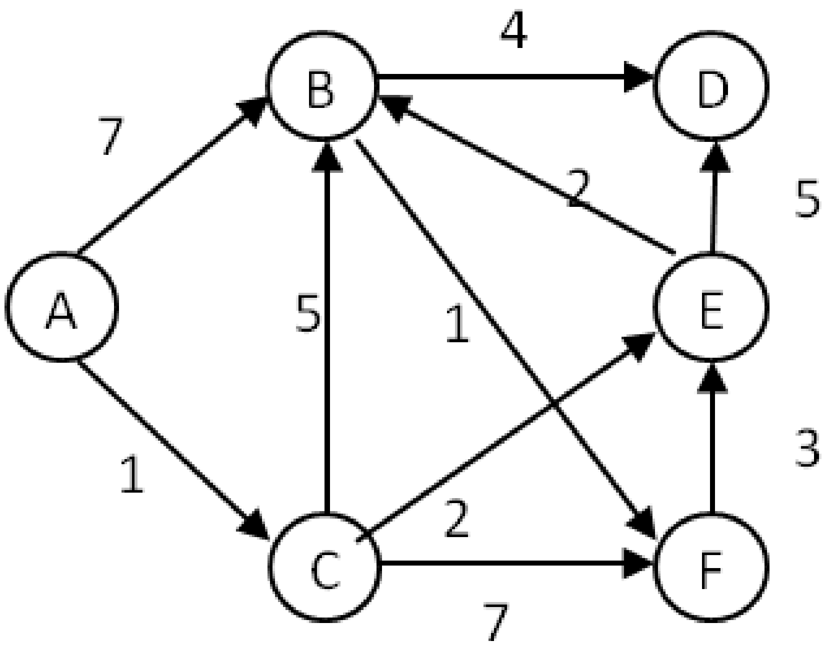
Présenté par: Dr. Benotmane.Z

Notion..

- Dans un graphe, il est naturel de se déplacer d'un point A vers un autre point B. Plusieurs chemins peuvent relier ces deux points.
- Le but est d'en trouver le plus court chemin en terme de distance, de temps, de coût,... En utilisant des algorithmes tels que l'Algorithme de Dijkstra et celui de Bellman Ford.

Algorithme de Dijkstra

Soit le graphe suivant:



Algorithm 4 Dijkstra

G un graphe.
X={1,2,...,N} ensemble des sommet du graphe.
S ensemble de sommets définitivement traités.
$\bar{S}$ ensemble des sommets provisoirement traités.
P liste des prédécesseurs.
Π liste des distances.
Hypothèse : Le sommet du départ est le sommet 1.
a) Initialisation :
$S = 1$
$\bar{S} = X - S$={2,3,...,N}
$\Pi(1) = 0$

$$\Pi(i) = \begin{cases} l_{ij} & \text{si } \{i\} \in \Gamma^{+}(1) \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$P(i) = 1$
b) Sélectionner $j \in \bar{S}$ tel que $\Pi(j) = min\Pi(i)$ avec $i \in \bar{S}$ faire
$\bar{S} \leftarrow \bar{S} - j$
$S \leftarrow S + j$
Si $S = \emptyset$ alors FIN
sinon aller à c)
Pour tout $i \in \Gamma^{+}(j)$ et $i \in \bar{S}$ Faire
$\Pi(i) \leftarrow min(\Pi(i), \Pi(j) + l_{ij})$
Si $\Pi(i)$ est modifié alors $P(i) = j$
Retourner à b)

Application de l'algorithme de Dijkstra

1. Initialisation :
   $S = A$, $\bar{S}$={B,C,D,E,F}

   $\Pi(A) = 0$, $\Pi(B) = l_{AB} = 7$, $\Pi(D) = \Pi(E) = \Pi(F) = \infty$, $\Pi(C) = l_{AC} = 1$
   $P(B) = P(C) = A$. A chaque calcul, nous remplissons le tableau 1.
2. Sélectionner $j \in \bar{S}$ tel que $\Pi(i)$ soit minimale : $j = C$.
   S={A,C}, $\bar{S}$={B,D,E,F}
   $\Pi(B) = min(\Pi(B), \Pi(C) + l_{CB}) = min(7, 6) = 6$
   $\Pi(E) = min(\Pi(E), \Pi(C) + l_{CE}) = min(\infty, 1 + 2) = 3$
   $\Pi(F) = min(\Pi(F), \Pi(C) + l_{CF}) = min(\infty, 7 + 1) = 8$

Après une suite d'itération, nous obtenons les résultats représentés dans le ta-
bleau 1. A partir du tableau, le plus court chemin de A à D est : A-C-E-D, sa

TABLE 1 – Tableau de Dijkstra

S	$\bar{S}$	$\Pi(A)$	$\Pi(B)$	$\Pi(C)$	$\Pi(D)$	$\Pi(E)$	$\Pi(F)$	$P(A)$	$P(B)$	$P(C)$	$P(D)$	$P(E)$	$P(F)$
A	B, C, D, E, F	0	7	1	∞	∞	∞	/	A	A	/	/	/
A, C	B, D, E, F	0	6	1	∞	3	8	/	C	A	/	C	C
A, C, E	B, D, F	0	5	1	8	3	8	/	E	A	E	C	C
A, C, E, B	D, F	0	5	1	8	3	6	/	E	A	E	C	B
A, C, E, B, F	D	0	5	1	8	3	6	/	E	A	E	C	B
A, C, E, B, F, D	$\emptyset$	0	5	1	8	3	6	/	E	A	E	C	B

Algorithme de Belman Ford

G un graphe
$X = 1, 2, ..N$ ensemble des sommets du graphe
P liste des prédécesseurs.
Π liste des distances.
Hypothèse : Le sommet du départ est le sommet 1.
$a)$ Initialisation :
$\Pi(1) = 0$
Pour $i = 2$ à N Faire
$\Pi(i) = \infty$
$b)$ Calculer
Pour $i = 2$ à N Faire
$\Pi(i) \leftarrow min(\Pi(i), min(\Pi(j) + l_{ji}))$ avec $j \in \Gamma^{-}(i)$
Si $\Pi(i)$ est modifié alors $P(i) = j$
Retourner à $b)$
L'algorithme s'arrête lorsque le système se stabilise.

Application de Bellman Ford

- Soit le même graphe de la figure précédant:
- L’application de l’algorithme donne le résultat suivant:

Initialisation :
$\Pi(A) = 0 \ \Pi(B) = \Pi(C) = \Pi(D) = \Pi(E) = \Pi(F) = \infty.$

1. Itération 1 :
   Sommet B : $\Gamma^{-}(B)$= {A,C,E}

$\Pi(B) = min(\Pi(B), min(\Pi(A)+l_{AB}, \Pi(C)+l_{CB}, \Pi(E)+l_{EB})) = min(\infty, min(7, \infty, \infty)) = 7.$

Sommet C : $\Gamma^{-}(C)$={A}
$\Pi(C) = min(\Pi(C), \Pi(A) + l_{AC} = min(\infty, 1) = 1.$
Sommet D : $\Gamma^{-}(D)$={B,E}
$\Pi(D) = min(\Pi(D), min(\Pi(B) + l_{BD}, \Pi(E) + l_{ED} = min(\infty, 7+4, \infty)) = 11.$
Sommet E : $\Gamma^{-}(E)$={F,C}
$\Pi(E) = min(\Pi(E), min(\Pi(C)+l_{CE}, \Pi(F)+l_{FE} = min(\infty, 1+2, \infty)) = 3.$
Sommet F : $\Gamma^{-}(F)$={B,C}
$\Pi(F) = min(\Pi(F), min(\Pi(B) + l_{BF}, \Pi(C) + l_{CF} = min(\infty, 8, 8)) = 8.$

2. Itération 2 :
$\Pi(B) = min(7,7,6,5) = 5, \Pi(C) = min(1,1) = 1, \Pi(D) = min(11,9,8), \Pi(E) = min(3,3,11) = 3, \Pi(F) = min(8,6,8) = 8.$

3. Itération 3 :
$\Pi(B) = min(5,7,6,5) = 5, \Pi(C) = min(1,1) = 1, \Pi(F) = 6.$

TABLE 2 – Tableau de Bellman Ford

	$\Pi(A)$	$\Pi(B)$	$\Pi(C)$	$\Pi(D)$	$\Pi(E)$	$\Pi(F)$	$P(A)$	$P(B)$	$P(C)$	$P(D)$	$P(E)$	$P(F)$
Initial	0	∞	∞	∞	∞	∞	/	/	/	/	/	/
itérat1	0	7	1	11	3	8	/	A	A	B	C	B
itérat2	0	5	1	8	3	6	/	E	A	E	C	B
itérat3	0	5	1	8	3	6	/	E	A	E	C	B

- Le système s'est stabilisé, et à partir du tableau, le plus court chemin de A à D est : A-C-E-D, sa valeur étant de 8.

Merci