Chapitre 05 : Analyse matricielle

1- Matrice :

1.1- Définitions :

Soient n et m deux entiers positifs. On appelle matrice à n lignes et m colonnes, ou matrice n*m, ou matrice (n, m), à coefficients dans k, un ensemble de nm scalaires $a_{ij} \in K$, avec *i=1,…,n* et *j=1,…,m*, représentés dans le tableau rectangulaire suivant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,m} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Quand $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, on écrit respectivement $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ou $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$, afin de mettre explicitement en évidence le corps auquel appartiennent les éléments de A. nous désignerons une matrice par une lettre majuscule, et les coefficients de cette matrice par la lettre minuscule correspondante.

Pour écrire (1), nous utiliserons l'abréviation $A = (a_{ij})$ avec *i=1,…,n* et *j=1,…,m*. l'entier *i* est appelé indice de ligne, et l'entier *j* indice de colonne. L'ensemble (a_{i1}, a_{i2},…,a_{im}) est la i-ième ligne de A ; de même, (a_{1j}, a_{2j},…,a_{nj}) est la j-ième colonne de A.

Si n=m on dit que la matrice est carré ou d'ordre n.

On appelle vecteur ligne (resp. vecteur colonne) une matrice n'ayant qu'une ligne (resp. colonne), c.-à-d. une matrice de type (1, m) (resp. de type (n, 1)).

Sous-matrice : soit A une matrice n*m. soient $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leq m$ deux ensemble d'indices. La matrice S(k*l) est appelée sous-matrice de A.

Parmi toutes les partitions possibles de A, mentionnons en particulier la partition en colonnes.

$$A=(a_1, a_2, \ldots, a_m)$$

a_i étant la i-ième vecteurs colonne de A. on définit de façon analogue la partition de A en lignes. Pour préciser les notations, si A une matrice n*m nous désignerons par

$$A(i_1{:}\,i_2, j_1{:}\,j_2) = \left(a_{ij}\right)\ \ i_1 \leq i \leq i_2, j_1 \leq j \leq j_2$$

La sous-matrice de A de taille (i_2-i_1+1)*(j_2-j_1+1) comprise entre les lignes i_1 et i_2 et les colonnes j_1 et j_2. Ces notations sont utiles pour l'implémentation des algorithmes dans MATLAB.

1.2- Opérations sur les matrices :

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices *n*m* sur *K*. on dit que A est égale à B, si $a_{ij} = b_{ij}$ pour i=1,…,n et j=1,…,m. on définit de plus les opérations suivantes :

1)- ***Somme de matrices*** : on appelle somme des matrices A et B (de même format) la matrice C(n*m) dont les coefficients sont $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ \ i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$. L'élément neutre pour la somme matricielle est la matrice nulle, notée $0_{n,m}$ ou plus simplement 0, constituée de coefficients tous nuls.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Propriétés Pour A, B, C de même format, et des scalaires λ,μ :

- A +(B + C)=(A + B)+ C. (la somme est associative)
- A + B = B + A. (la somme est commutative)
- A +0=0+ A = A. (la matrice 0 est élément neutre)
- Toute matrice admet une opposée, −A =(−1)A.
- λ(A+B)= λA+λB, et (λ+μ)A = λA+μA. (le produit par un scalaire est distributif par rapport à la somme des matrices et par rapport à la somme des scalaires)

2)- ***multiplication d'une matrice par un scalaire*** : la multiplication de A par $\lambda \epsilon K$, est la matrice C(n*m) dont les coefficients sont donnés par $c_{ij} = \lambda\, a_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice (-1) A est l'opposée de A et est notée -A. La différence A-B est définie par A+(-B).

3)- ***produit de deux matrices*** : Le produit de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde.

le produit d'une matrice A de taille (n, p) par une matrice B de taille (p, m) est la matrice C(n,m), dont les coefficients sont donnés par $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m.$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,k} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & b_{j,k} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,k} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & & \vdots & & c_{1,p} \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & c_{i,k} & & \\ & & & & \\ c_{m,1} & & & & c_{m,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -8 & -5 \\ 22 & 16 & 10 \\ -11 & -8 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriétés Pour A, B, C (telles que les produits existent), et des scalaires λ, μ :

- A(BC)=(AB)C. (le produit est associatif)
- AB ≠ BA en général. (Le produit n'est pas commutatif)
- A.0=0 et 0.A =0. (Chaque matrice nulle est élément absorbant)
- λ(AB) = (λA)B = A(λB). (Associativité généralisée)
- A(B + C)= AB + AC et (A + B)C = AC + BC. (Le produit est distributif à gauche et à droite par rapport à la somme)
- AB = 0 n'implique pas A= 0 ou B = 0.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- En particulier, dans le calcul matriciel, on ne peut pas simplifier :
  AB = AC n'implique pas nécessairement B = C

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

Dans le cas des matrices carrées, l'élément neutre pour le produit matricielle est la matrice carrée d'ordre n, appelée matrice unité d'ordre ***n*** ou, plus fréquemment, matrice identité, définie par $I_n = (\delta_{ij})$. δ_{ij} est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

La matrice identité est la seule matrice n*n telle que $AI_n = I_nA = A$ pour toutes les matrices carrées A. La matrice identité est un cas particulier de matrice diagonale d'ordre n, c'est-à-dire une matrice n'a que des 1 sur la diagonale et des 0 par tout ailleurs.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, si A est une matrice carrée d'ordre n et p un entier, on définit A^p comme le produit de A par elle-même répété p fois. On pose A^0=I.

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{p\ facteurs}$$

4)- ***La transposition*** : soit A une matrice de taille m*n. On appelle matrice transposée de A la matrice A^T de taille n*m définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i, j) de A^T est a_{ji} . Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^T.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

Propriétés

- $(A+B)^T = A^T + B^T$.
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
- $(A^T)^T = A$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

1.3- Trace et déterminant d'une matrice :

1) ***Trace :*** Considérons une matrice carrée A d'ordre n. la trace de cette matrice est la somme des coefficients diagonaux de A : $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

2) ***déterminant :*** pour une matrice A de taille 2*2 le déterminant est :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}$$

Pour une matrice A de taille n*n avec, n>2, le déterminant est égal à la somme des produits obtenus en multipliant les éléments d'une ligne quelconque (ou d'une colonne) par leur cofacteurs respectifs.

Le cofacteur de a_{ij} est défini par $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$ où $M_{i\,j}$ est la sous-matrice carrée d'ordre (n-1) obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.

Le calcul effectif du déterminant de A peut être effectué en utilisant la relation de récurrence

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & si\ n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} a_{ij} & pour\ n > 1 \end{cases}$$

Ainsi $|A| = \Delta_{i1}a_{11} + \Delta_{i2}a_{22} + \cdots + \Delta_{i\,n}a_{n\,n}$.

Propriétés :

- Si A possède une ligne (ou colonne) de « 0 », alors |A| =0.
- Si A possède 2 lignes (colonnes) identiques, alors |A| =0.
- Si A est triangulaire, alors |A|= produit de ses éléments diagonaux. En particulier, $|I_n|=1$.

- Si B est obtenue de A en multipliant une seule de ses lignes (colonnes) par un scalaire k, alors |B| = k |A|.
- Si B est obtenu en permutant 2 lignes (ou colonnes) de A, alors|B|= −|A|.
- Si B est obtenu de A en additionnant le multiple d'une ligne (colonne) à une autre, alors |B|=|A|.
- $|A^T|=|A|$
- Si A et B sont 2 matrices carrées de même dimension, alors |AB|=|A||B|.
- A est inversible si |A|≠0.

1.4- Inverse d'une matrice :

1.4.1- Définition :

Soit A une matrice carrée de taille n*n. S'il existe une matrice carrée B de taille n*n telle que

$$AB = BA = I ,$$

On dit que A est inversible. On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

Une matrice qui n'est pas inversible est dite singulière.

Plus généralement, quand A est inversible, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note:

$$A^{-p} = (A^{-1})^p = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{p}$$

1.4.2- Propriétés :

- Si A est inversible, alors son inverse est unique.
- Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a: $(A^{-1})^{-1} = A$
- Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre!

1.4.3- Calcul

a- ***Cas de matrices 2*2 :*** soit une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si *det (A) ≠0* alors A admet une matrice inverse unique A^{-1} définie par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad si \det A \neq 0$$

b- ***cas de matrices d'ordre n > 2 :*** La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I. On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}.

Si l'inverse de A existe, on peut l'obtenir de la façon suivante :

- A côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau (A | I).

$$(\mathrm{A} \vdots \mathrm{I}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

- Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée jusqu'à ce qu'elle devienne (I | B). La matrice B est alors l'inverse de A i.e. B = A^{-1}.

Exemple : calculons l'inverse de A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Solution :

Etape 01 : Voici la matrice augmenté

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

Etape 02 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \; L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow[L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \; L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xRightarrow[L_3 \leftarrow 2L_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \; L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8} L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xRightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3} A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$