

Chapitre 3 : Dynamique des fluides réels :

3.1 Écoulement unidirectionnels

Les écoulements unidirectionnels ne se produisent pas vraiment dans la nature, mais ils sont des modèles adaptés aux écoulements souvent rencontrés dans des applications dont l'extension dans le sens d'écoulement est beaucoup plus grande que leur extension latérale.

3.1.1 Écoulement de Couette

L'écoulement de cisaillement simple ou écoulement de Couette est un écoulement bidimensionnel dont le champ de vitesse est donné par les composantes de vitesse u , v , w dans un système de coordonnées cartésien avec les axes x , y , z .

$$u = \frac{U}{h}y, \quad v = 0 \quad \text{et} \quad w = 0$$

Par conséquent, le champ d'écoulement est identique dans tous les plans ($z = \text{Cst}$). La propriété commune à tous les écoulements unidirectionnels, est que la seule composante de vitesse non nulle (dans ce cas u) ne varie que perpendiculairement à la direction d'écoulement, est une conséquence de l'équation de continuité.

$$\nabla \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

À partir de là, parce que $v = w = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{avec} \quad u = f(y)$$

La composante suivant l'axe x des équations de Navier-Stokes est (nous négligeons la gravité) donné par :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (1)$$

Puisque nous avons un écoulement bidimensionnel, nous aurions pu fixer toutes les dérivées par rapport à z égales à zéro.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

Dans le cas des écoulements unidirectionnels, tous les termes convectifs du côté gauche disparaissent.

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[0 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad \text{avec} \quad \mu = \nu * \rho$$

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) y^2 + C_1 * y + C_2$$

Les deux constantes sont trouvées en appliquant la condition de non-glissement aux plaques supérieure et inférieure :

Lorsque $y = 0$ $u = 0$

$$C_2 = 0$$

Lorsque $y = h$ $u = U$

$$C_1 = \frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h$$

Par conséquent, la solution pour ce cas, écoulement entre deux plaques planes parallèles infinies entraînées par le mouvement d'une plaque, est :

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + \left(\frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} h \right) y$$

$$u = \frac{y}{h} U - \frac{h^2}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{y}{h} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \quad (2)$$

avec $0 \leq y \leq +h$

Ceci est l'écoulement de Couette dû à une paroi mobile : un profil de vitesse linéaire sans glissement au niveau de chaque paroi, comme prévu sur la figure 1.

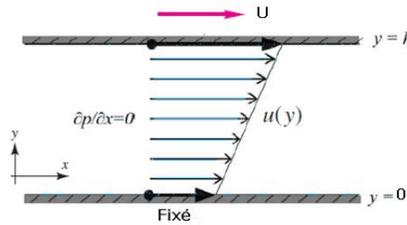


Fig. 1 : écoulement de Couette entre deux plaques parallèles infinies.

La vitesse maximale $U_{max} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$

Le débit volumique par unité de largeur est :

$$Q = \int_0^h u dy = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \frac{h^2}{2\mu * U} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right) U * h$$

Le type le plus simple d'écoulement de Couette est celui pour lequel le gradient de pression est nul ($\partial P / \partial x = 0$); c'est-à-dire que le mouvement du fluide est provoqué par le fluide entraîné par la limite mobile (la plaque supérieure). L'équation l'écoulement de Couette se réduit simplement à

$$u = U \frac{y}{h} \quad (2 *)$$

3.1.2 Écoulement de Poiseuille

L'écoulement de Poiseuille décrit l'écoulement résultant des gradients de pression dans un tube, et se réfère spécifiquement à l'écoulement entraîné par pression à travers un tube de section transversale circulaire. Ce type d'écoulement est caractéristique d'écoulement entraîné par la pression à travers des canaux.

Les coordonnées cylindriques sont adaptées à ce problème où elles décrivent la paroi de conduite circulaire par la surface de coordonnées $r = R$ (Fig. 2).

Pour résoudre l'écoulement de Poiseuille, nous supposons que tout l'écoulement est dans la direction z ($u_r = 0, u_\theta = 0$) et que les gradients de vitesse dans les directions θ et z sont nuls. L'équation de continuité est donné par :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \text{où} \quad u_z = u_z(r)$$

La composante suivant l'axe z des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques en négligeant la gravité :

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \quad (4)$$

$$\rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (5)$$

Le terme d'accélération convective à gauche disparaît à cause de l'équation de continuité. Ainsi, l'équation de la vitesse peut être réorganisée comme suit :

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (6)$$

Pour résoudre cette équation, nous supposons que $(\partial P / \partial z)$ est uniforme, et intégrons les termes par rapport à r :

$$\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r^2 + C_1 = r \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (7)$$

Et intégrez à nouveau pour trouver :

$$u_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) r^2 + C_1 \ln(r) + C_2 \quad (8)$$

Pour éviter une singularité logarithmique, la condition de ligne centrale ($r = 0$) nécessite que $C_1 = 0$.

À la paroi ($r = R$), la vitesse doit être nulle ($u = 0$) de sorte que :

$$C_2 = - \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) R^2$$

La distribution de vitesse devient :

$$u_z(r) = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) (r^2 - R^2) \quad (9)$$

Quel que soit la section transversale, la distribution de la vitesse est parabolique.

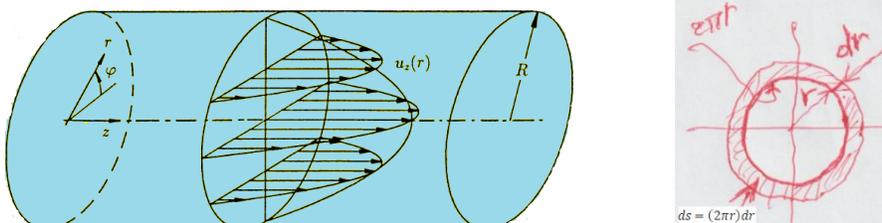


Fig. 2 : Écoulement dans une conduite circulaire droit

$$\begin{aligned}
dQ &= u_z(2\pi r)dr & ds &= (2\pi r)dr \\
Q &= \int_0^R \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) (r^2 - R^2) (2\pi r) dr = -\frac{\pi}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \int_0^R (R^2 - r^2)(r) dr \\
Q &= -\frac{\pi}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \left[\frac{R^2 * r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R \\
Q &= -\frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \tag{10}
\end{aligned}$$

Cette relation peut être exprimée en termes de perte de charge, qui se produit sur une longueur l , le long de la conduite :

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_2 - P_1}{z_2 - z_1} = \frac{\Delta P}{l}$$

Et donc :

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\mu l} \tag{11}$$

Cette équation (11) est appelée loi de Poiseuille.

En termes de vitesse moyenne, U , où $U = Q/\pi R^2$, l'Eq. (11) devient :

$$U_{moy} = \frac{R^2 \Delta P}{8\mu l}$$

La vitesse maximale U_{max} se produit au centre du tube, d'où l'Eq. 9

$$U_{max} = \frac{R^2 \Delta P}{4\mu l} \tag{12}$$

La distribution de vitesse, comme le montre la figure 2, peut être écrite en termes de U_{max}

$$\frac{u_z}{U_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \tag{13}$$

Le facteur de frottement de l'écoulement de Poiseuille est déterminé par :

$$f = \frac{64\mu U/D}{\rho U^2} = \frac{64}{Re}$$

3.1.3 Écoulement axial et laminaire dans un tube annulaire

L'équation différentielle (Eq. 6) utilisée pour l'écoulement dans une conduite s'applique également à l'écoulement axial annulaire entre deux cylindres concentriques fixes (Fig. 3).

$$u_z = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \left[r^2 - r_0^2 + \frac{r_i^2 - r_0^2}{\ln(r_0/r_i)} + \ln \frac{r}{r_0} \right] \tag{14}$$

Le débit volumique correspondant est

$$Q = \frac{\pi \Delta P}{8\mu l} \left[r_0^4 - r_i^4 - \frac{(r_0^2 - r_i^2)^2}{\ln(r_0/r_i)} \right] \quad (15)$$

La vitesse à n'importe quel emplacement radial dans l'espace annulaire peut être obtenue à partir de l'Eq.14. La vitesse maximale se produit au rayon $r = r_m$ où $(\partial u_z / \partial r) = 0$. Ainsi,

$$r_m = \left[\frac{r_0^2 - r_i^2}{2 \ln(r_0/r_i)} \right]^{1/2}$$

La vitesse maximale ne se produit pas au milieu de l'espace annulaire, mais plutôt plus près du cylindre intérieur. L'emplacement spécifique dépend de r_0 et r_i .

Ces résultats pour l'écoulement à travers un tube annulaire ne sont valables que si l'écoulement est laminaire.

Diamètre hydraulique :

$$D_h = \frac{4 * \text{section}}{\text{périmètre mouillé}} = \frac{4\pi(r_0^2 - r_i^2)}{r_0 + r_i}$$

$$D_h = 2(r_0 - r_i) \quad (16)$$

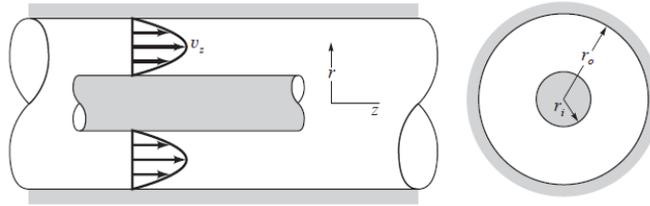


Fig. 3 : écoulement visqueux à travers un anneau

3.2 Écoulement de Stokes et écoulement à faible nombre de Reynolds

Les terminologies **écoulement rampant**, **écoulement de Stokes** ou **écoulement à faible nombre de Reynolds** sont utilisées comme synonymes pour désigner des écoulements dans lesquels l'inertie est négligeable par rapport aux forces visqueuses et de pression.

L'exigence formelle est que le nombre de Reynolds soit petit $Re \ll 1$, où les termes d'accélération dans les équations de Navier-Stokes (chapitre 1) sont négligeables. Un faible nombre de Reynolds peut signifier un fluide très visqueux.

Avec l'inertie négligée, la quantité de mouvement est transportée par diffusion visqueuse mais pas par convection.

Les équations de continuité et de la quantité de mouvement se réduisent à deux équations linéaires pour la vitesse et la pression :

$$Re \ll 1 \begin{cases} \nabla \cdot V = 0 \\ \nabla P = \mu \nabla^2 V \end{cases} \quad (17)$$

Applications de la théorie de l'écoulement rampant :

1. Écoulement de conduit entièrement développé : les termes d'inertie disparaissent également ;
2. Écoulement autour des corps immergés : généralement de petites particules ;

3. Écoulement dans des passages étroits mais variables : théorie de la lubrification ;
4. Écoulement à travers des milieux poreux : mouvement des eaux souterraines.

3.2.1 Écoulement de Stokes liés

Pour les écoulements limités (c'est-à-dire les écoulements dans des domaines finis), le nombre de Reynolds qui détermine l'applicabilité de l'approximation de Stokes utilise un débit moyen à travers un canal comme vitesse caractéristique et un diamètre ou profondeur du canal comme longueur caractéristique.

La géométrie de **Hele-Shaw** se compose d'un domaine avec une profondeur (d) petite et uniforme dans la direction z et des dimensions beaucoup plus grandes dans les directions x et y (figure 4).

La distribution de vitesse, vue du haut, apparaît comme un écoulement potentiel pour toutes les régions dans lesquelles, la distance des parois latérales est grande par rapport à la profondeur.

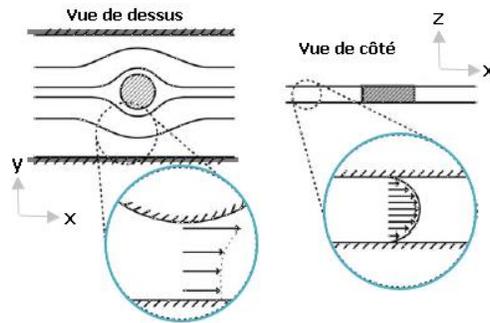


Fig. 4 : Ecoulement sur une entretoise circulaire

La distribution de vitesse dans une cellule Hele-Shaw est :

$$\vec{u} = -\frac{1}{2\mu}z(d-z)\nabla P \quad (19)$$

Le long de l'axe z , l'écoulement a la distribution parabolique typique d'un écoulement entraîné par pression entre des plaques planes.

3.2.2 Écoulement de Stokes non limités

Les écoulements non limités (c'est-à-dire les écoulements de fluide autour d'objets solides immergés) sont également caractérisés par le nombre de Reynolds, mais dans ce cas, la vitesse caractéristique U et l'échelle de longueur proviennent maintenant de la vitesse et de la taille de l'objet. Contrairement aux écoulements limités, pour lesquels les approches numériques sont la norme, les écoulements illimités sont généralement traités de manière analytique, et la solution des problèmes de modèle conduit à des résultats d'une immense valeur dans les systèmes communs.

3.2.3 Écoulement de Stokes autour d'une sphère dans un domaine infini

Considérons l'écoulement axisymétrique à la vitesse U sur une sphère de rayon a à faible Reynolds (figure 5). Le nombre de Reynolds est défini comme :

$$Re = \frac{\rho U D}{\mu}$$

Où D diamètre de la sphère $D = 2a$

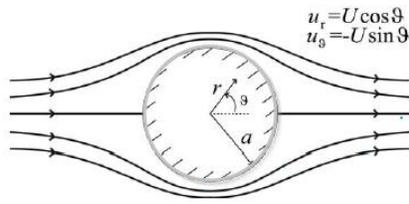


Fig. 5 : Écoulement de Stokes autour d'une sphère

Les équations gouvernantes sont les équations de Stokes, et les conditions aux limites sont de telle sorte que la vitesse est nulle à $r = a$ et la vitesse est égale à U lorsque $r \rightarrow \infty$.

La solution de cet écoulement :

- Vitesse radiale :

$$u_r = U \cos \theta \left(1 - \frac{3a}{2r} + \frac{1a^3}{2r^3} \right) \quad (20)$$

- Vitesse tangentielle :

$$u_\theta = -U \sin \theta \left(1 - \frac{3a}{4r} - \frac{1a^3}{4r^3} \right) \quad (21)$$

- La variation de la pression par rapport à la direction d'écoulement principale est donnée par :

$$\Delta P = -\mu U \frac{3a}{2r^2} \cos \theta \quad (22)$$

Les forces de surface sur la sphère peuvent être intégrées pour obtenir la force de traînée totale sur la sphère :

$$F_{trainée} = 6\pi\mu a U \quad (23)$$

Coefficient de traînée

$$C_D = \frac{F_{trainée}}{\frac{\pi}{8} \rho U^2 D} \quad (24)$$

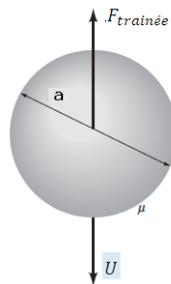


Fig. 6 : Sphère tombante

Étant donné un système avec un nombre de Reynolds petit mais fini, nous pouvons quantifier l'instantanéité de la réponse de la particule en calculant le nombre de Stokes Sk , qui est le rapport du temps de latence des particules au temps caractéristique sur lequel l'écoulement change.

$$Sk = \frac{2aU\rho_s}{9a\mu} \quad (25)$$

ρ_s : La masse volumique de la sphère ;

On peut supposer que les particules avec le nombre de Stokes $Sk \ll 1$ sont toujours en régime permanent avec un champ de vitesse local.

- **Sphère tombante**

Bien que la loi de Stokes ait été dérivée dans le système de repos de la sphère, elle est également valable dans le système de repos du fluide. La vitesse terminale d'un objet en chute libre est atteinte lorsque la force de traînée est égale au poids de l'objet solide moins la force de flottabilité appliquée par le fluide environnant.

$$\frac{4}{3}(\rho_s - \rho_f)\pi * g * a^3 = 6\pi\mu a U$$

$$U = \frac{\frac{4}{3}(\rho_{sphere} - \rho_{fluide})\pi * g * a^3}{6\pi\mu a} \quad (26)$$

Référence :

White_2011_7ed_Fluid-Mechanics

M. Rahman, M. Rahman - Mechanics of Real Fluids-WIT Press _ Computational Mechanics (2011)

Brian Kirby - Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics_ Transport in Microfluidic Devices-Cambridge University Press (2010)