

Corrigé de la fiche des travaux dirigés N°2

Exercice 01 :

1. les composantes de vitesse radiale et tangentielle

Les composantes de vitesse radiale et tangentielle peuvent être obtenues à partir de la fonction d'écoulement comme suit :

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 4r * \cos 2\theta$$

Et

$$u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -4r * \sin 2\theta$$

2. le potentiel de vitesse correspondant ϕ

Puisque :

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 4r * \cos 2\theta$$

Et donc par intégration

$$\Phi = 2r^2 \cos(2\theta) + C$$

Comme c'est le cas pour les fonctions d'écoulement, la valeur spécifique de C n'est pas importante, C = 0.

1. la pression au point (2) :

Nous avons un écoulement irrotationnel où la variation d'énergie potentielle peut être négligée, si l'on écrit l'équation de Bernoulli en deux points (1) et (2) le long d'une ligne de courant, on obtient :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho u_{r,1}^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho u_{r,2}^2$$

$$u_{r,1} = 4r_1 * \cos 2\theta_1 \quad \text{avec} \quad \theta_1 = 0$$

$$u_{r,2} = 4r_2 * \cos 2\theta_2 \quad \text{avec} \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$u_{r,1}^2 = 16(1)^2 = 16 \text{ m/s}$$

$$u_{r,2}^2 = 16(0.5)^2 = 4m/s$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(u_{r,1}^2 - u_{r,2}^2)$$

$$P_2 = 30 * 10^3 + \frac{10^3}{2} * (16 - 4)$$

$$P_2 = 36000 Pa$$

Exercice 02 :

1. les composantes de vitesse radiale et tangentielle :

$$\Psi = \Psi_{unif} + \Psi_{puits}$$

$$\Phi = \Phi_{unif} + \Phi_{puits}$$

$$\Phi = U * x - \frac{Q}{2\pi} \ln(r) \quad \text{avec } x = r \cos \theta$$

$$\Psi = U * y - \frac{Q}{2\pi} \theta \quad \text{avec } y = r \sin \theta$$

Les composantes de vitesse radiale et tangentielle peuvent être obtenues à partir de la fonction d'écoulement comme suit :

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = U * \cos \theta - \frac{Q}{2\pi r}$$

$$u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -U * \sin \theta = 0$$

2. le point de stagnation sur la paroi :

Le point de stagnation se produit où $u_r = 0$, de sorte que :

$$u_r = 0 \Leftrightarrow U * \cos \theta - \frac{Q}{2\pi r_{stag}} = 0$$

$$r_{stag} = \frac{Q}{2\pi U}$$

Pour $U = 1,524 m/s$ et $Q = 0.0185 m^2/s$

$$r_s = \frac{0.0185}{2 * \pi * 1,524}$$

$$r_s = 0.0019 m$$

Le point de stagnation sur la paroi est à : **0.0019 m**

Au point de stagnation ($r_s = 0.0019 m$ et $\theta = 0^\circ$), $\Psi_{stag} = 0$

3. La distance au-dessus de la surface, H

$$\Psi = U * y - \frac{Q}{2\pi} \theta$$

Au point de stagnation ($r_s = 0.0019 \text{ m}$ et $\theta = 0^\circ$), $\Psi_{\text{stag}} = 0$

à y_{max} , $\Psi_{\text{stag}} = 0$

$$U * y - \frac{Q}{2\pi} \theta = 0$$

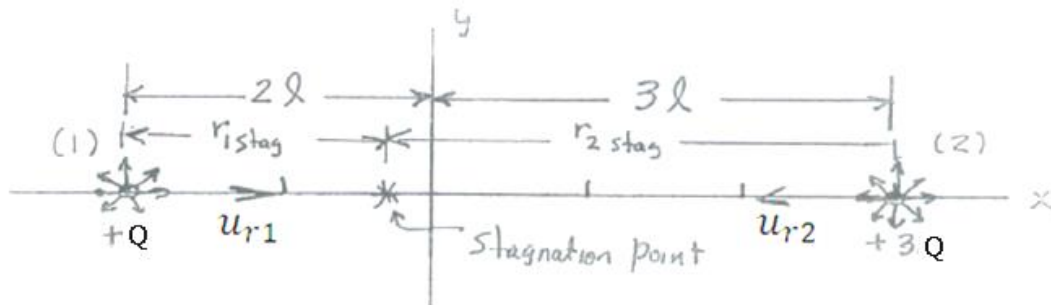
$$y = \frac{Q}{2\pi U} \theta$$

Le fluide au-dessus de la ligne de stagnation ne sera pas aspiré dans la fente. La distance maximale, H, pour la ligne de stagnation se produit lorsque $\theta = \pi$

$$H = y_{\text{max}} = \frac{Q}{2\pi U} \pi$$

$$H = \frac{Q}{2U} = \frac{0.0185}{2 * 1,524} = 0.006 \text{ m}$$

Exercice 03 :



La vitesse tangentielle (circonférentielle) ($u_\theta = 0$), seulement une vitesse radiale u_r .

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}$$

Pour la source 1 :

$$u_{r1} = \frac{Q_1}{2\pi r_1} = \frac{Q}{2\pi r_1}$$

Pour la source 2 :

$$u_{r2} = \frac{Q_2}{2\pi r_2} = \frac{3Q}{2\pi r_2}$$

Le point de stagnation se produit là où

$$u_{r1,stag} = u_{r2,stag}$$

$$\frac{Q}{2\pi r_{1,stag}} = \frac{3Q}{2\pi r_{2,stag}}$$

$$r_{2,stag} = 3 * r_{1,stag}$$

On a aussi :

$$r_{1,stag} + r_{2,stag} = 2l + 3l = 5l$$

$$r_{1,stag} + 3 * r_{1,stag} = 5l$$

$$r_{1,stag} = \frac{5}{4}l$$

$$r_{2,stag} = \frac{15}{4}l$$

Donc $x_{sta} = ?$

$$x_{sta} = 2l - r_{1,stag} = 2l - \frac{5}{4}l$$

$$x_{sta} = -0.75l$$

Exercice 04 :

1. le débit volumique $Q=q$, si l'eau salée ne doit pas se rapprocher d'une distance L du coin

On a deux fonctions d'écoulement :

$$\Psi_1 = A * r^2 \sin 2\theta$$

$$u_{r1} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 2 * A * r * \cos 2\theta$$

$$\Psi_2 = \frac{Q}{2\pi} \theta$$

$$u_{r2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r}$$

Pour créer un point de stagnation à $r = L$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$u_{r1} = u_{r2}$$

$$2 * A * r * \cos 2\theta = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$2 * A * L * \cos \pi = \frac{q}{2\pi L}$$

$$q = 4\pi AL^2$$

La ligne de courant :

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

$$\Psi = A * r^2 \sin 2\theta + \frac{q}{2\pi} \theta$$

$$\Psi = A * r^2 \sin 2\theta + \frac{4\pi AL^2}{2\pi} \theta$$

$$\Psi = A * r^2 \sin 2\theta + 2AL^2 \theta$$

La valeur de Ψ au point de stagnation $r = L$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ est :

$$\Psi_{\text{stag}} = A * L^2 \sin \pi + 2AL^2 \frac{\pi}{2}$$

$$\Psi_{\text{stag}} = AL^2 \pi$$

Exercice 05 :

1. La hauteur de Tube capillaire :

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\gamma R}$$

pour l'eau à 20°C (Tableau), $\sigma = 0.0728 \text{ N/m}$ et $\gamma = 9.789 \text{ kN/m}^3$. $\theta = 0^\circ$

$$h = \frac{4 * 0.0728}{9.789 * D}$$

$$D = 2R$$

$$h = \frac{0.03}{D}$$

Erreur :

$$0.91 \text{ m} \rightarrow 100\%$$

$$h \rightarrow ?$$

$$\text{Erreur} = \frac{h * 100\%}{0.91} = \frac{0.03 * 100\%}{0.91 * D}$$

$$\text{Erreur} = \frac{0.033}{D} 100\%$$

D	Erreur
2.5	1.32
5	0.66
7.5	0.44
10	0.33
12.5	0.264
15	0.22
17.5	0.188571
20	0.165
22.5	0.146667
25	0.132

