



U.D.L Sidi Bel Abbès
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil



Annexe 1
Les Lignes d'Influence

Chargé du module
Mr. Z. LOUHIBI

ANNEXE 1

LES LIGNES D'INFLUENCE

1 INTRODUCTION

Dans les ouvrages en génie civil, les charges d'exploitation sont connues en valeurs, mais peuvent changer de positions. Cela entraînera dans une section choisie de l'ouvrage, des efforts et des déformations variables qui dépendent directement de la position de la charge d'exploitation. La représentation graphique de cette fonction est appelée ligne d'influence. Son grand intérêt est de fournir les effets extrêmes (maximaux et minimaux) dans une section donnée de la structure, sous des charges d'exploitation d'étendue variable comme c'est le cas des portiques de bâtiments et des tabliers ou appuis de ponts.

2 POURQUOI LES LIGNES D'INFLUENCE ?

Soit une poutre AB soumise à un chargement mobile P_i , soit S une section choisie de cette poutre d'abscisse fixe x_s . L'effet élastique dans la section S est soit les efforts (M, N, T), soit les déformations (δ , θ , ϵ ...). Cet effet E varie en fonction de la position du chargement P_i . On pourra ainsi connaître les effets E_{max} et E_{min} dans la section S, d'où l'intérêt de la méthode.

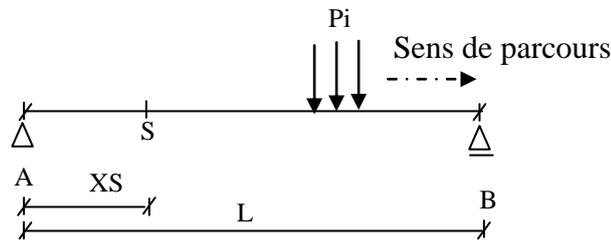


Fig. 1 Variation de l'effet élastique E en fonction de la position P_i .

La figure 2 représente un portique type d'un bâtiment scolaire qui abrite 2 classes pour chaque niveau. Les travées (1) et (3) reçoivent les charges des classes q_c tandis que la travée intermédiaire n° 2 supporte les charges d'escalier q_e .

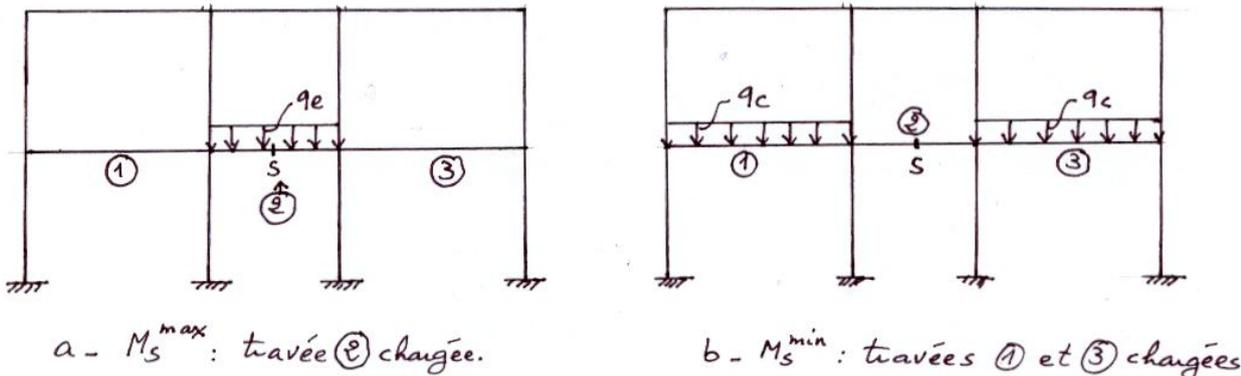


Fig. 2 Dispositions de charges dans un portique de bâtiment pour calculer M_S^{\max} et M_S^{\min} .

Le moment fléchissant maximal au milieu S de la travée (2) est obtenu en chargeant seulement cette même travée (fig. 2-a), tandis que le moment minimal dans la même section est déterminé en chargeant les travées (1) et (3) (fig. 2-b).

Pour calculer les réactions maximale et minimale de l'appui A d'un pont isostatique, la charge roulante q_r est disposée selon la figure 3.

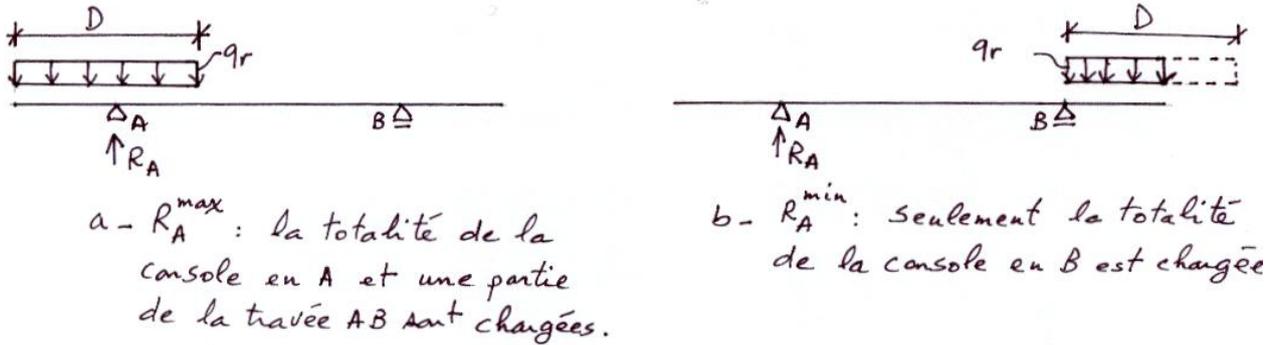


Fig. 3 Réactions extrêmes R_A^{\max} et R_A^{\min} d'un pont isostatique.

La disposition des charges dans les exemples des figures 2 et 3 est justifiée par le traçage des lignes d'influence qui seront traitées dans le paragraphe qui va suivre.

3 QU'EST CE QUE C'EST LA LIGNE D'INFLUENCE ?

Revenons à l'exemple de la figure 1, si on remplace le chargement mobile P_i par une force unitaire $P=1$ d'abscisse x variable, l'effet élastique E dans la section S variera donc en fonction de x .

$$E_S = f(x) \quad (1)$$

$f(x)$ est appelée fonction d'influence, le tracé de $f(x)$ est appelé ligne d'influence.

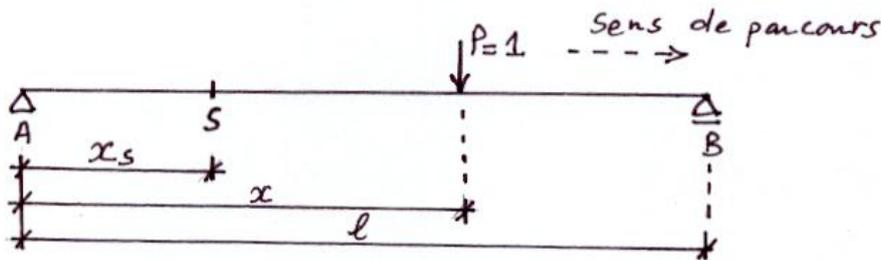


Fig. 4 Eléments de base d'une fonction d'influence $E_S = f(x)$.

Exemple

La ligne d'influence de l'effort tranchant en S est donnée sans démonstration par la figure 5, ce tracé est obtenu en faisant déplacer la force unitaire de A vers B .

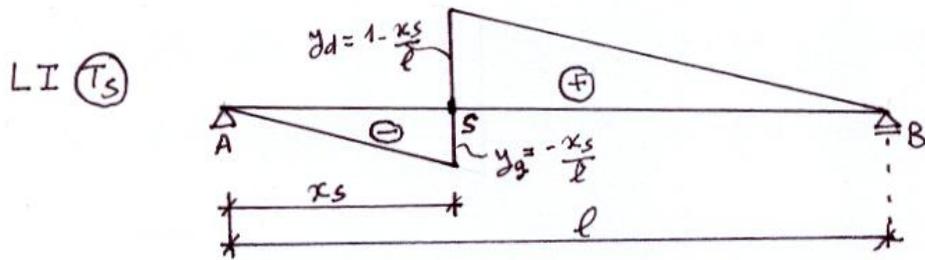


Fig. 5 Ligne d'influence de l'effort tranchant Ts..

L'effort tranchant max ou min est obtenu en chargeant la ligne d'influence de Ts par les charges Pi. D'après la figure 6, on a

$$T_S^{\max} = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots \quad (2)$$

Soit

$$T_S^{\max} = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (3)$$

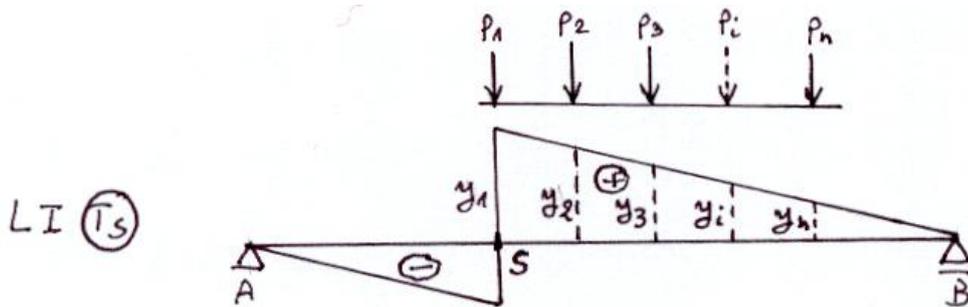


Fig. 6 Calcul de T_S^{\max} .

4 COMMENT CALCULER L'EFFET ELASTIQUE ?

L'effet élastique Es est obtenu en chargeant la ligne d'influence f(x) par les forces mobiles Pi.

Cas 1 : Charges concentrées.

$$E_S = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (4)$$

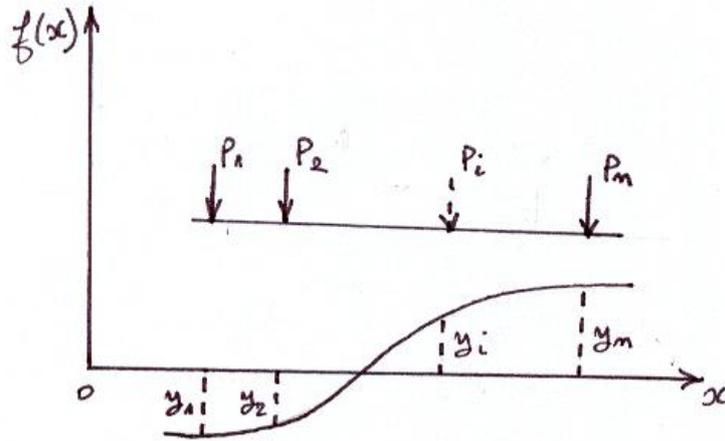


Fig. 7 L'effet élastique du aux charges concentrées P_i .

Cas 2 : Charge uniformément répartie.

$$E_s = q(\Omega^+ + \Omega^-) \quad (5)$$

Où q est la valeur de la charge uniforme.

Ω^+ et Ω^- sont respectivement les aires positive et négative délimitées par la ligne d'influence $f(x)$ et l'axe des x , sur la longueur d'étendue de la charge q . Les aires Ω^+ et Ω^- sont prises avec leurs signes.

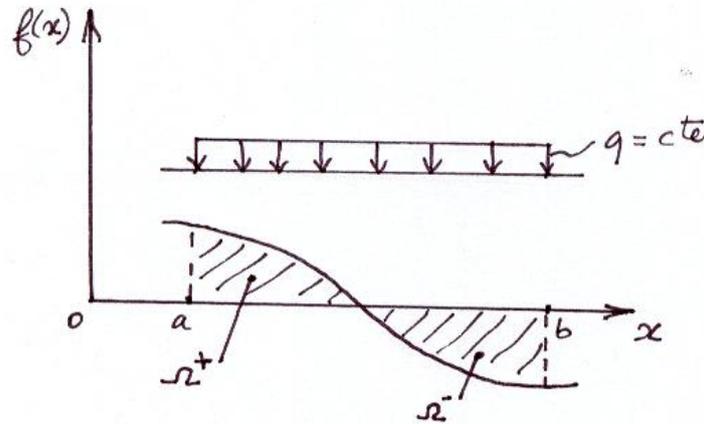


Fig. 8 L'effet élastique du à une charge uniformément répartie q .

Cas 3 : Charge répartie quelconque.

$$E_s = \int_a^b q(x) \cdot y \cdot dx \quad (6)$$

Où $q(x)$ est la charge répartie qui dépend de l'abscisse x .

L'ordonnée y est la fonction d'influence.

$$y = f(x) \quad (7)$$

a et b sont les bornes qui délimitent la zone d'application de la charge $q(x)$.

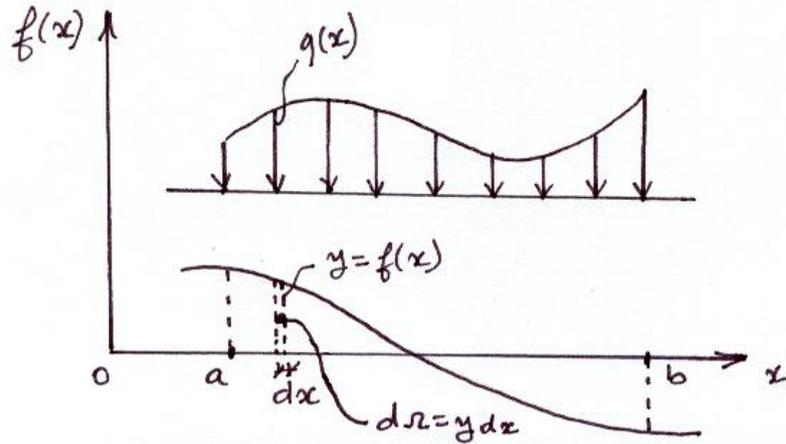


Fig. 9 L'effet élastique du à une charge répartie $q(x)$.

5 LES LIGNES D'INFLUENCE DANS UNE POUTRE ISOSTATIQUE

5-1 Les réactions d'appuis

5-1-1 La réaction R_A

Pour définir la fonction d'influence de la réaction R_A d'une poutre isostatique (fig. 10), on fait déplacer la charge unitaire $P = 1$. La section étudiée S se situe toujours en A .

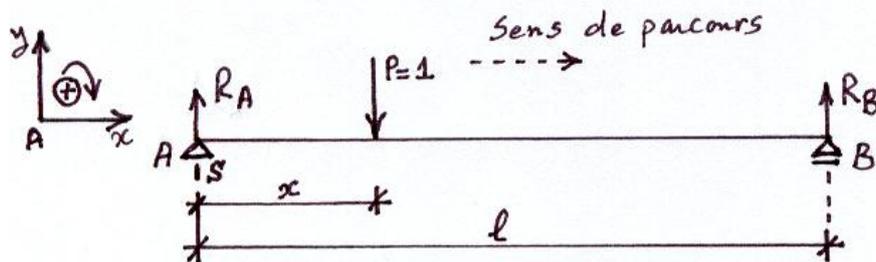


Fig. 10 Schéma statique d'une poutre à une seule travée.

D'après la figure 10, on a

$$\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow R_A \cdot l - 1 \cdot (l - x) = 0$$

D'où la fonction d'influence

$$R_A = \frac{l - x}{l} \quad (8)$$

Ou bien

$$R_A = 1 - \frac{x}{l} \quad (9)$$

$$x = 0 \Rightarrow R_A = 1$$

$$x = l \Rightarrow R_A = 0$$

Le traçage de cette fonction d'influence donnera la ligne d'influence de R_A (fig. 11).

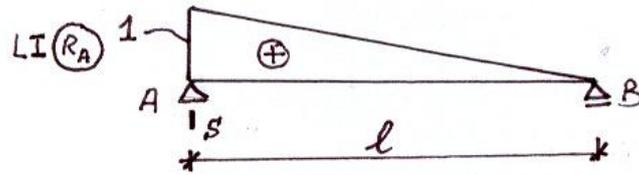


Fig. 11 Ligne d'influence de R_A .

5-1-2 La réaction R_B

En utilisant la figure 10, on a

$$\sum M'_{/A} = 0 \Rightarrow 1 \cdot x - R_B \cdot l = 0$$

D'où

$$R_B = \frac{x}{l} \quad (10)$$

$$x = 0 \Rightarrow R_B = 0$$

$$x = l \Rightarrow R_B = 1$$

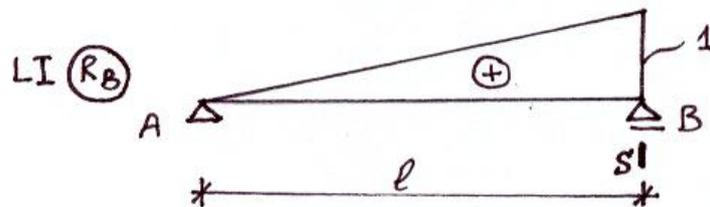


Fig. 12 Ligne d'influence de R_B .

Exercice 1

Le pont représenté dans la figure 13 est constitué de poutres longitudinales ayant 38 m de longueur. Selon une étude de répartition transversale des charges, chaque poutre doit supporter un camion complet QS-660.

- 1- Tracer la ligne d'influence de la réaction R_A .
- 2- En supposant que le camion circule de la gauche vers la droite, calculer R_A^{\max} et R_A^{\min}

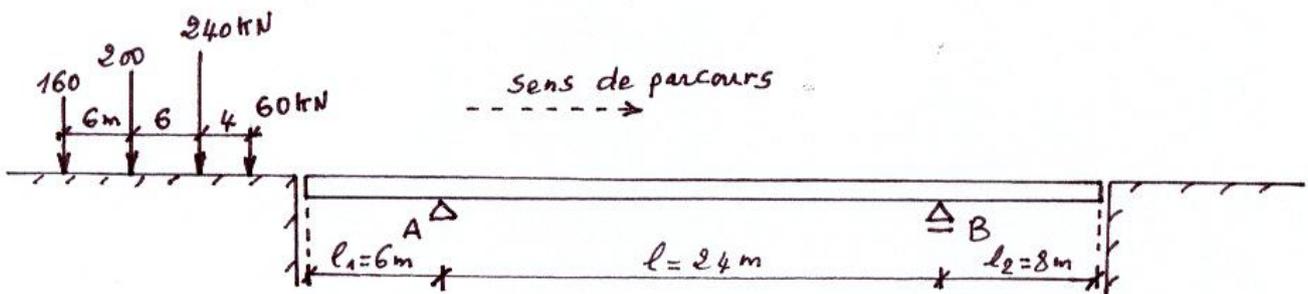
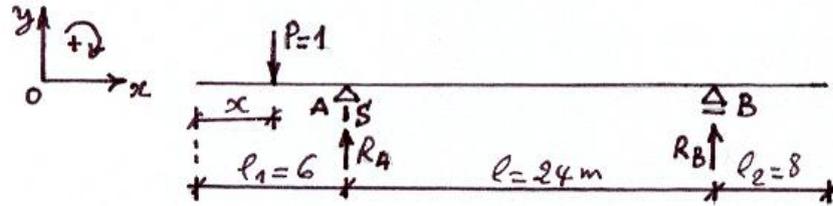


Fig. 13 Pont isostatique avec porte-à-faux

Solution

1- 1^{er} cas : $x \leq l_1$



$$\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow -1 \cdot (l + l_1 - x) + R_A \cdot l = 0$$

Soit

$$R_A = \frac{l + l_1 - x}{l}$$

Ou bien

$$R_A = 1 + \frac{(l_1 - x)}{l}$$

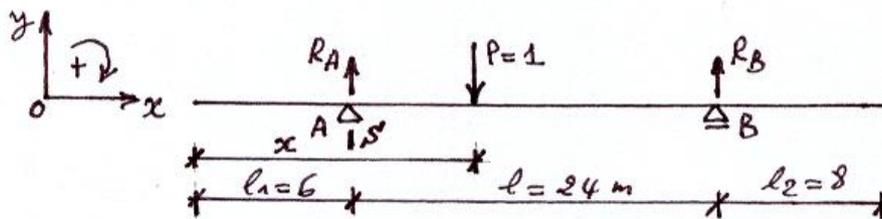
$$x = 0 \Rightarrow R_A = 1 + \frac{l_1}{l}$$

Soit

$$R_A = 1 + \frac{6}{24} = 1.25$$

$$x = l_1 \Rightarrow R_A = 1$$

2^e cas : $l_1 \leq x \leq l + l_1$



$$\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow R_A \cdot l - 1 \cdot (l + l_1 - x) = 0$$

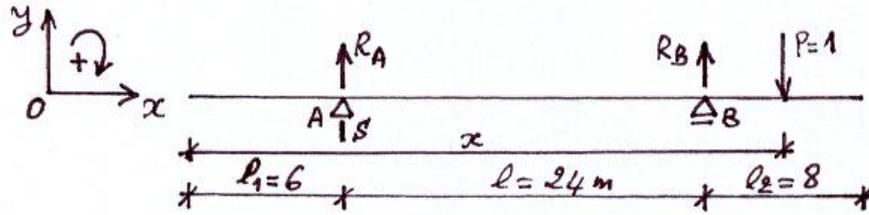
Soit

$$R_A = 1 + \frac{(l_1 - x)}{l}$$

$$x = l_1 \Rightarrow R_A = 1$$

$$x = l_1 + l \Rightarrow R_A = 0$$

3^e cas : $l_1 + l \leq x \leq l_1 + l + l_2$



$$\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow R_A \cdot l - 1 \cdot (x - l - l_1) = 0$$

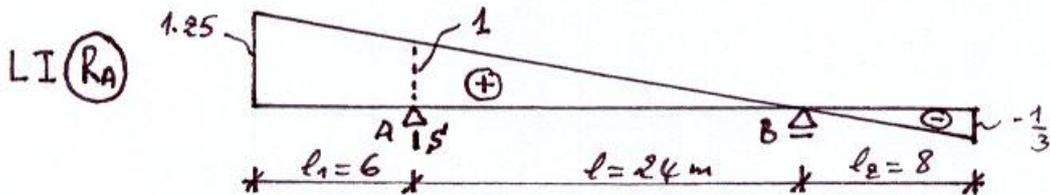
Soit

$$R_A = 1 + \frac{(l_1 - x)}{l}$$

$$x = l_1 + l \Rightarrow R_A = 0$$

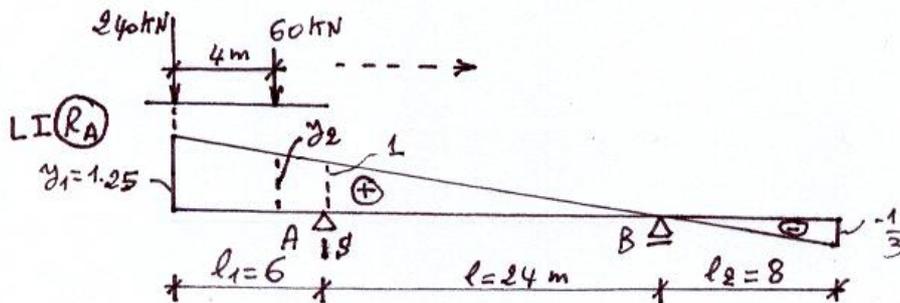
$$x = l_1 + l + l_2 \Rightarrow R_A = -\frac{l_2}{l}$$

$$R_A = -\frac{8}{24} = -\frac{1}{3}$$



2-a/ R_A^{\max} : On fait déplacer le camion dans la partie positive de la ligne d'influence de R_A selon les positions 1, 2 et 3.

Position 1 :

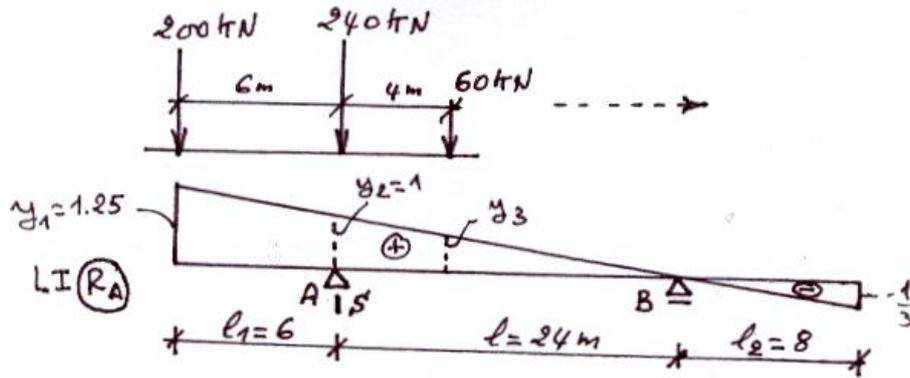


$$\frac{y_2}{26} = \frac{1}{24} \Rightarrow y_2 = \frac{13}{12}$$

$$R_A^{(1)} = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2$$

$$\text{Soit } R_A^{(1)} = 240 \times 1.25 + 60 \times \frac{13}{12} = 365 \text{ KN}$$

Position 2 :

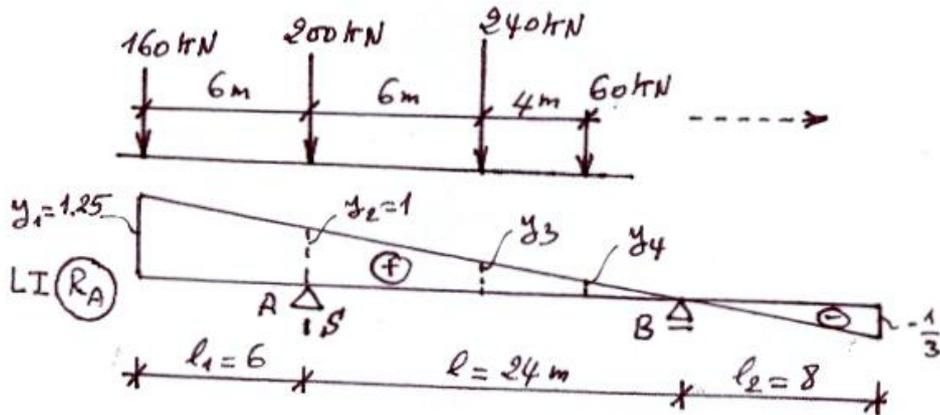


$$\frac{y_3}{20} = \frac{1}{24} \Rightarrow y_3 = \frac{5}{6}$$

$$R_A^{(2)} = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3$$

$$\text{Soit } R_A^{(2)} = 200 \times 1.25 + 240 \times 1 + 60 \times \frac{5}{6} = 540 \text{ KN}$$

Position 3 :



$$\frac{y_3}{18} = \frac{1}{24} \Rightarrow y_3 = 0.75$$

$$\frac{y_4}{14} = \frac{1}{24} \Rightarrow y_4 = \frac{7}{12}$$

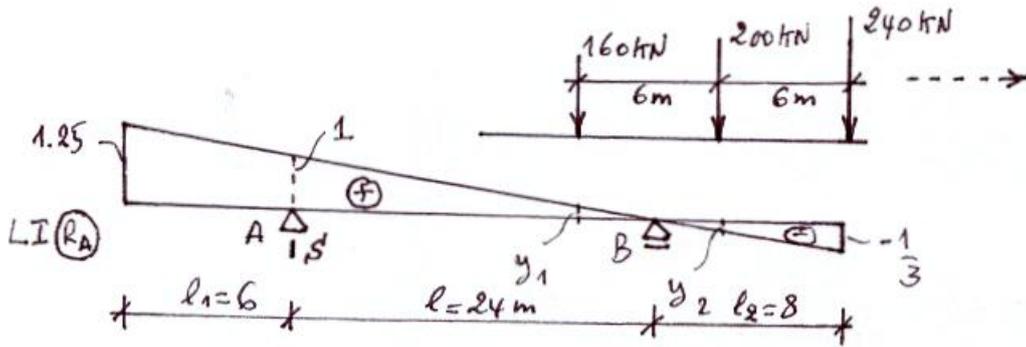
$$R_A^{(3)} = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + P_4 \cdot y_4$$

$$\text{Soit } R_A^{(3)} = 160 \times 1.25 + 200 \times 1 + 240 \times 0.75 + 60 \times \frac{7}{12} = 615 \text{ KN}$$

$$R_A^{\max} = \text{Sup}(R_A^{(1)}, R_A^{(2)}, R_A^{(3)}) = 615 \text{ KN}$$

2-b/ R_A^{\min} : On fait déplacer le camion dans la partie négative de la ligne d'influence de R_A selon les positions 1 et 2.

Position 1 :



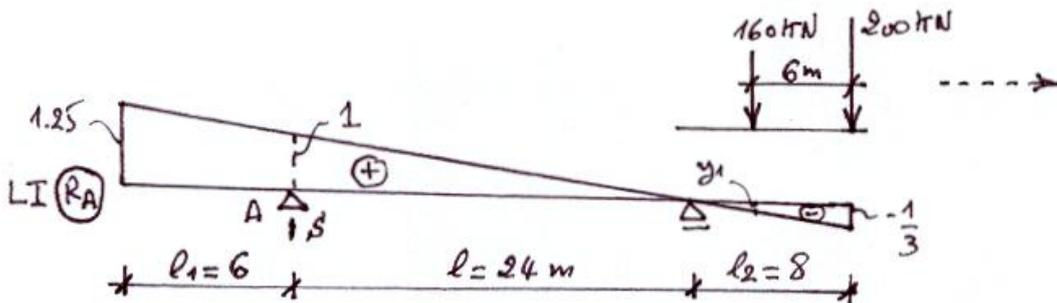
$$\frac{y_1}{4} = \frac{1}{24} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{6}$$

$$-\frac{y_2}{2} = \frac{1}{24} \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{12}$$

$$R_A^{(1)} = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3$$

$$\text{Soit } R_A^{(1)} = 160 \times \frac{1}{6} + 200 \times \left(-\frac{1}{12}\right) + 240 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -70 \text{ KN}$$

Position 2:



$$-\frac{y_1}{2} = \frac{1}{24} \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{12}$$

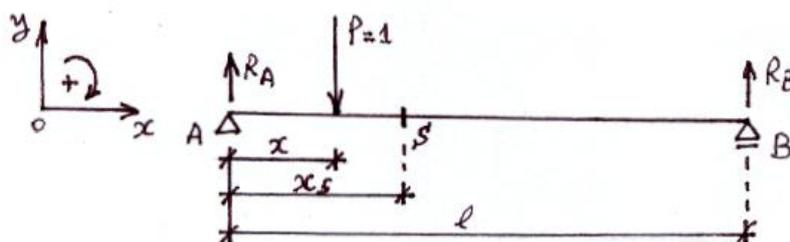
$$R_A^{(2)} = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2$$

$$\text{Soit } R_A^{(2)} = 160 \times \left(-\frac{1}{12}\right) + 200 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -80 \text{ KN}$$

$$R_A^{\min} = \text{Inf}(R_A^{(1)}, R_A^{(2)}) = -80 \text{ KN}$$

5-2 L'effort tranchant

1- 1^{er} cas : $x \leq x_s$



$$T_S = R_A - 1$$

$$T_S = 1 - \frac{x}{l} - 1$$

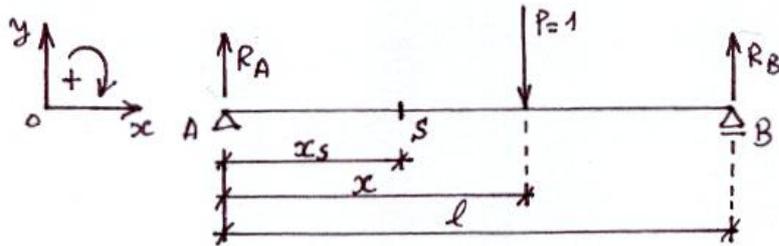
D'où

$$T_S = -\frac{x}{l} \quad (11)$$

$$x = 0 \Rightarrow T_S = 0$$

$$x = x_S \Rightarrow T_S = -\frac{x_S}{l}$$

2^e cas : $x_S \leq x \leq l$



$$T_S = R_A$$

$$T_S = 1 - \frac{x}{l} \quad (12)$$

$$x = x_S \Rightarrow T_S = 1 - \frac{x_S}{l}$$

$$x = l \Rightarrow T_S = 0$$

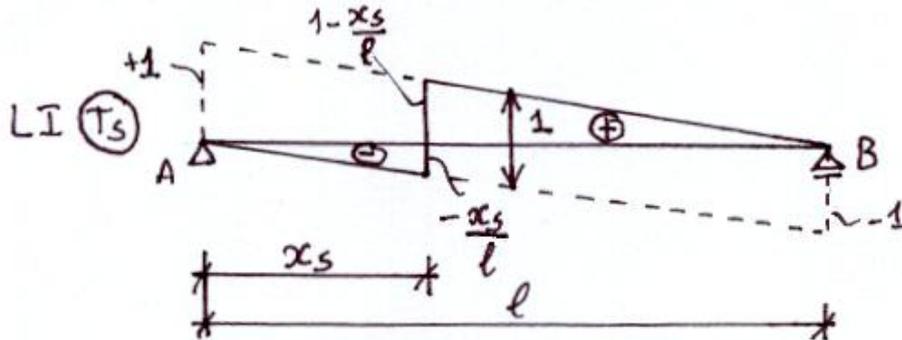


Fig. 14 La ligne d'influence de l'effort tranchant T dans la section S.

Exercice 2

Un pont route à une seule travée de longueur $l = 30$ m est constitué de poutres sous chaussée, chacune d'elles supporte une file de camions Bc.

1- Tracer la ligne d'influence de l'effort tranchant T dans la section S d'abscisse $x_S = \frac{l}{4}$.

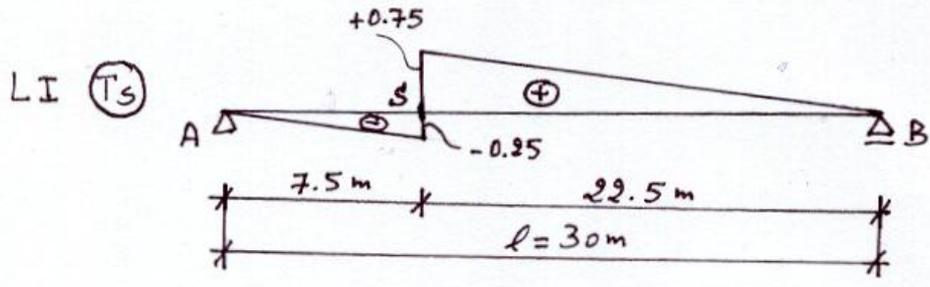
2- Calculer T_S^{\max} et T_S^{\min} .

$$b_c = 1.1 \text{ et } \delta_{Bc} = 1.139$$

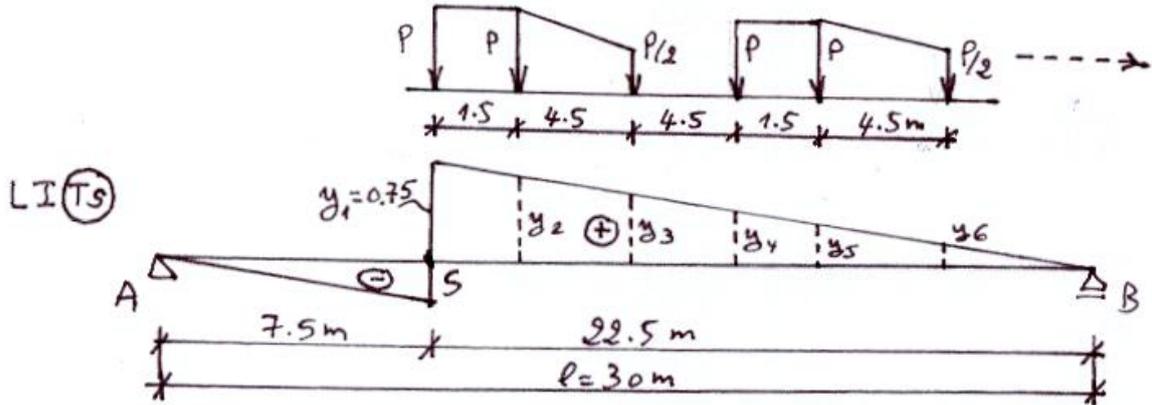
Solution

1- $x = x_s^g = \frac{l}{4} \Rightarrow T_s^g = -\frac{x_s}{l} = -0.25$

$x = x_s^d = \frac{l}{4} \Rightarrow T_s^d = 1 - \frac{x_s}{l} = 0.75$



a- T_s^{\max} :



$\frac{y_2}{21} = \frac{0.75}{22.5} \Rightarrow y_2 = 0.7$

$\frac{y_3}{16.5} = \frac{0.75}{22.5} \Rightarrow y_3 = 0.55$

$\frac{y_4}{12} = \frac{0.75}{22.5} \Rightarrow y_4 = 0.4$

$\frac{y_5}{10.5} = \frac{0.75}{22.5} \Rightarrow y_5 = 0.35$

$\frac{y_6}{6} = \frac{0.75}{22.5} \Rightarrow y_6 = 0.2$

$T_s^{\max} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} + y_4 + y_5 + \frac{y_6}{2} \right)$

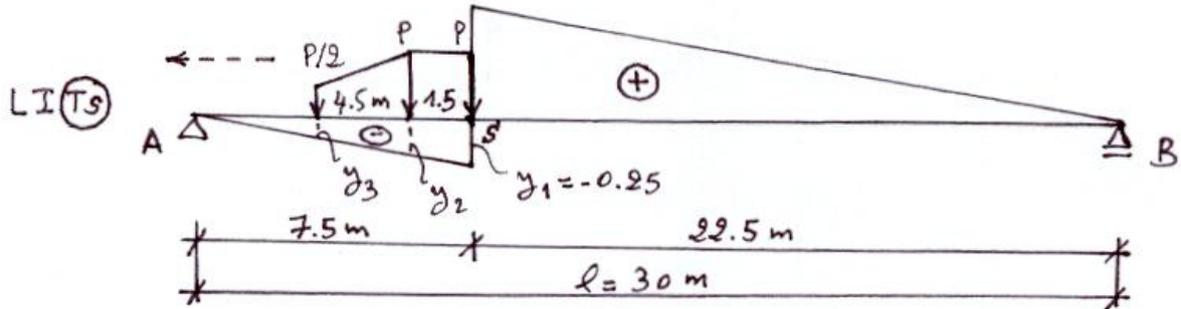
$T_s^{\max} = 120 \times \left(0.75 + 0.7 + \frac{0.55}{2} + 0.4 + 0.35 + \frac{0.2}{2} \right) = 309 \text{ KN}$

En utilisant les coefficients $b_c = 1.1$ et $\delta_{Bc} = 1.139$, on aura

$$T_S^{\max} = 309 \times b_c \times \delta_{Bc}$$

$$T_S^{\max} = 309 \times 1.1 \times 1.139 = 387.146 \text{ KN}$$

b- T_S^{\min} :



$$-\frac{y_2}{6} = \frac{0.25}{7.5} \Rightarrow y_2 = -0.2$$

$$-\frac{y_3}{1.5} = \frac{0.25}{7.5} \Rightarrow y_3 = -0.05$$

$$T_S^{\min} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$$

$$T_S^{\min} = 120 \times \left((-0.25) + (-0.2) + \frac{(-0.05)}{2} \right) = -57 \text{ KN}$$

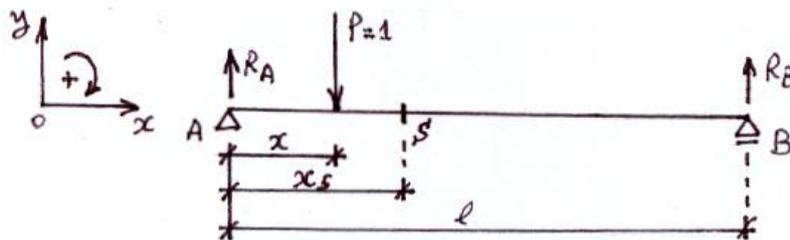
En introduisant les coefficients $b_c = 1.1$ et $\delta_{Bc} = 1.139$, on aura

$$T_S^{\min} = (-57) \times 1.1 \times 1.139 = -71.415 \text{ KN}$$

5-3 Le moment fléchissant

6-3.2 Le moment fléchissant dans une section S

1- 1^{er} cas : $x \leq x_s$



$$M_S = R_A \cdot x_s - 1 \cdot (x_s - x)$$

$$M_S = \left(1 - \frac{x}{l} \right) \cdot x_s - (x_s - x)$$

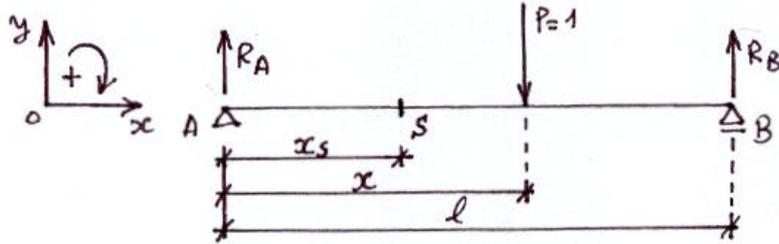
Soit

$$M_S = x \cdot \left(1 - \frac{x_s}{l} \right) \quad (13)$$

$$x=0 \Rightarrow M_S = 0$$

$$x = x_S \Rightarrow M_S = x_S \cdot \left(1 - \frac{x_S}{l}\right)$$

2^e cas : $x_S \leq x \leq l$



$$M_S = R_A \cdot x_S$$

Soit

$$M_S = x_S \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (13)$$

$$x = x_S \Rightarrow M_S = x_S \cdot \left(1 - \frac{x_S}{l}\right)$$

$$x = l \Rightarrow M_S = 0$$

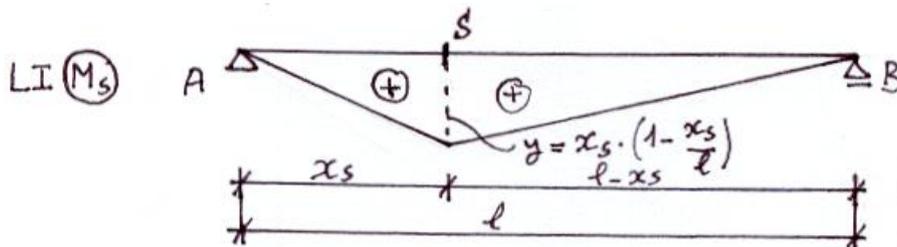


Fig. 15 La ligne d'influence du moment fléchissant M dans la section S.

Exercice 3

Un pont route à une seule travée de longueur $l = 18$ m. On suppose que chaque poutre supporte un tandem Bt.

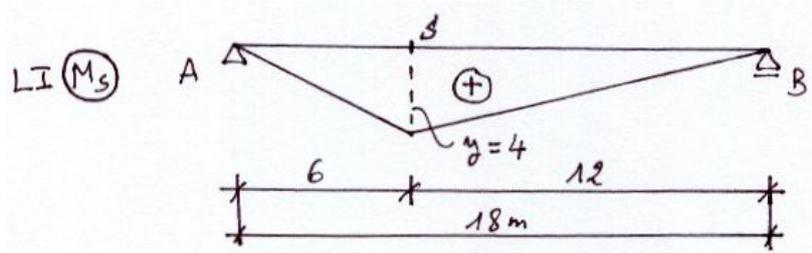
2- Tracer la ligne d'influence du moment fléchissant M dans la section S d'abscisse $x_S = \frac{l}{3}$.

2- Calculer M_S^{\max} et M_S^{\min} .

$$b_t = 1.0 \text{ et } \delta_{Bt} = 1.107$$

Solution

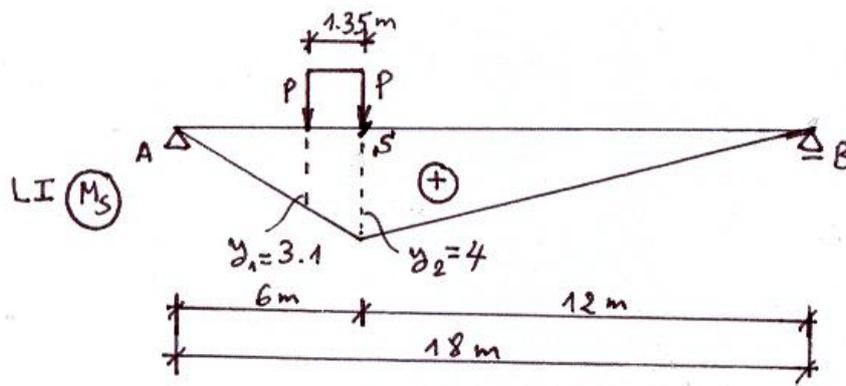
$$1- \quad x = x_S = \frac{l}{3} = 6 \text{ m} \Rightarrow M_S = x_S \cdot \left(1 - \frac{x_S}{l}\right) = 6 \times \left(1 - \frac{6}{18}\right) = 4$$



2- Puisque la ligne d'influence de M_s est toujours positive, le moment M_s^{\min} est égal à zéro, en considérant que la poutre n'est pas chargée.

Pour avoir le M_s^{\max} , on fait déplacer le tandem Bt dans la zone de la ligne d'influence de M_s qui a des valeurs y_i maximales.

Position 1 :

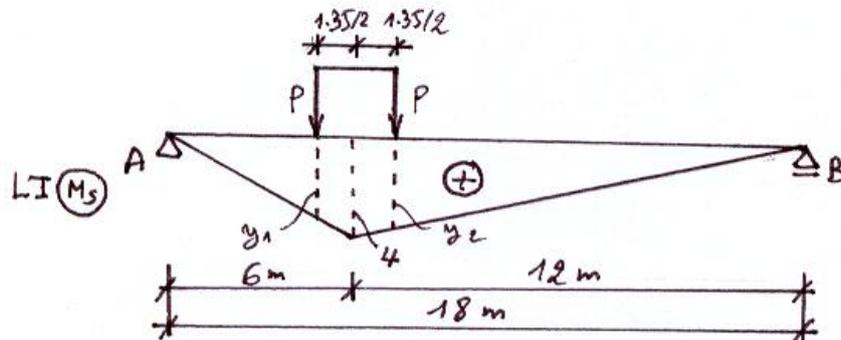


$$\frac{y_1}{4.65} = \frac{4}{6} \Rightarrow y_1 = 3.1$$

$$M_s^{(1)} = P \cdot (y_1 + y_2)$$

$$\text{Soit } M_s^{(1)} = 160 \times (3.1 + 4) = 1136 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Position 2 :



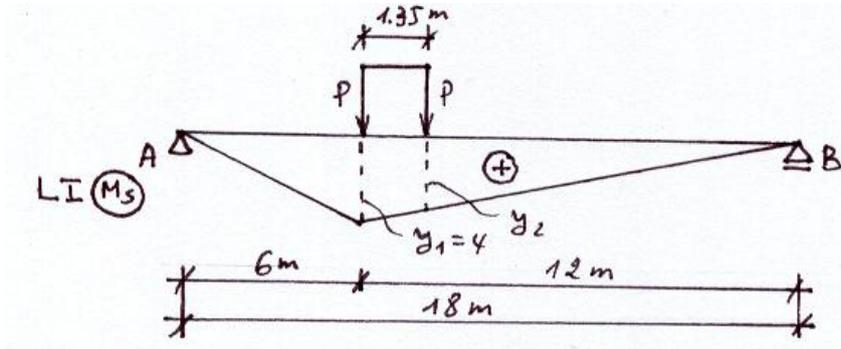
$$\frac{y_1}{5.325} = \frac{4}{6} \Rightarrow y_1 = 3.55$$

$$\frac{y_2}{11.325} = \frac{4}{12} \Rightarrow y_2 = 3.775$$

$$M_s^{(2)} = P \cdot (y_1 + y_2)$$

Soit $M_s^{(2)} = 160 \times (3.55 + 3.775) = 1172 \text{ KN} \cdot m$

Position 3 :



$$\frac{y_2}{12} = \frac{4}{12} \Rightarrow y_2 = 3.55$$

$$M_s^{(3)} = P \cdot (y_1 + y_2)$$

Soit $M_s^{(3)} = 160 \times (4 + 3.55) = 1208 \text{ KN} \cdot m$

$$M_s^{\max} = \text{Sup}(M_s^{(1)}, M_s^{(2)}, M_s^{(3)}) = 1208 \text{ KN} \cdot m$$

En introduisant les coefficients $b_t = 1.0$ et $\delta_{Bt} = 1.107$, on aura

$$M_s^{\max} = 1208 \times 1.0 \times 1.107 = 1292.560 \text{ KN} \cdot m$$

Résultat : Pour avoir le moment fléchissant maximal dans la section S, l'un des essieux doit se situer au droit de cette section. Pour un convoi contenant n essieux, on cherche le moment maximal en S à partir de n position du convoi.

6-3.2 Le moment fléchissant maximal dans une section S

a- Charges concentrées

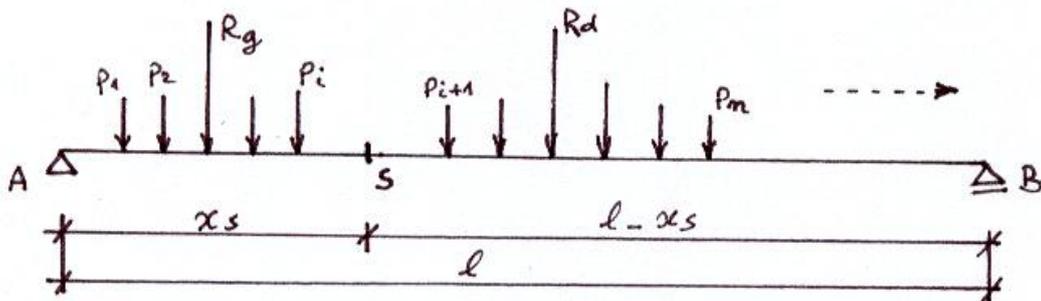
La poutre de la figure 16 est sollicitée par le passage d'un convoi composé de n charges concentrées P_i . La résultante de ces forces est

$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad (14)$$

Cette résultante peut s'écrire sous la forme

$$R = R_g + R_d \quad (15)$$

Où R_g et R_d sont respectivement les résultantes des forces se trouvant à gauche et à droite de la section S.



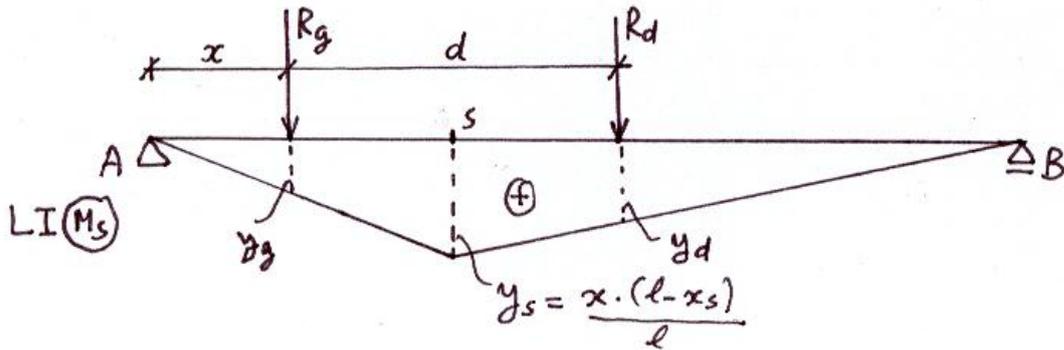


Fig. 16 Décomposition des forces P_i en résultantes R_g et R_d .

En déplaçant le convoi, l'abscisse x de R_g est supposée varier. Le moment fléchissant dans la section S s'écrit

$$M_S = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (16)$$

Ou bien

$$M_S = R_g \cdot y_g + R_d \cdot y_d \quad (17)$$

D'après la figure 16, on a

$$\left. \begin{aligned} y_g &= y_s \times \frac{x}{x_s} \\ y_d &= y_s \times \frac{(l-d-x)}{(l-x_s)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

En remplaçant les valeurs de y_g et y_d dans l'équation 17, on obtient

$$M_S = R_g \cdot y_s \cdot \frac{x}{x_s} + R_d \cdot y_s \cdot \frac{(l-d-x)}{(l-x_s)} \quad (19)$$

Pour que le moment fléchissant en S soit maximal, il faut que sa dérivée par rapport à x soit nulle.

$$M_S^{\max} \Rightarrow \frac{dM_S}{dx} = 0$$

$$\frac{dM_S}{dx} = R_g \cdot \frac{y_s}{x_s} - R_d \cdot \frac{y_s}{(l-x_s)} = 0 \Rightarrow y_s \left(\frac{R_g}{x_s} - \frac{R_d}{(l-x_s)} \right) = 0$$

D'où

$$\frac{R_g}{x_s} = \frac{R_d}{(l-x_s)} \quad (20)$$

On a

$$\frac{R_g}{x_s} = \frac{R_d}{(l-x_s)} = \frac{R_g + R_d}{x_s + l - x_s} = \frac{R}{l}$$

L'équation 20 peut donc s'écrire sous la forme

$$\frac{R_g}{x_s} = \frac{R}{l} \quad (21)$$

Si l'équation 20 ou 21 est satisfaite, le moment fléchissant en S est maximal. Mais puisqu'il s'agit de forces concentrées P_i , la dérivée dM_S/dx ne va pas s'annuler obligatoirement. Le problème sera résolu par les approximations successives, cette méthode va tester le signe de la dérivée dM_S/dx .

Dans le cas où il y a un changement de signes de cette dérivée cela veut dire que le moment fléchissant M_s est maximal.

D'après la figure 17-a , pour un essieu P_k situé en S, supposons que l'on a

$$\frac{R_{g1}}{x_s} \geq \frac{R}{l} \quad (22)$$

Où R_{g1} est la résultante des forces se trouvant à gauche de S y compris la force P_k .

$$R_{g1} = \sum_{i=1}^k P_i \quad (23)$$

La relation 22 peut aussi s'écrire sous la forme

$$R_{g1} \geq \frac{R \cdot x_s}{l} \quad (24)$$

D'après la relation 22, la dérivée dM_s/dx est positive.

En déplaçant le convoi vers la gauche d'une valeur infinitésimale dx , la charge P_k ne fait plus partie de R_g (fig. 17-b), on aura donc

$$R_{g2} = \sum_{i=1}^{k-1} P_i \quad (25)$$

Si l'on a

$$\frac{R_{g2}}{x_s} < \frac{R}{l} \quad (26)$$

La relation 26 peut s'écrire sous la forme

$$R_{g2} < \frac{R \cdot x_s}{l} \quad (27)$$

La dérivée dM_s/dx est donc négative. Cette dérivée a changer de signe en déplaçant P_k de part et d'autre de S, le moment fléchissant M_s est donc maximal si la force P_k est au droit de S.

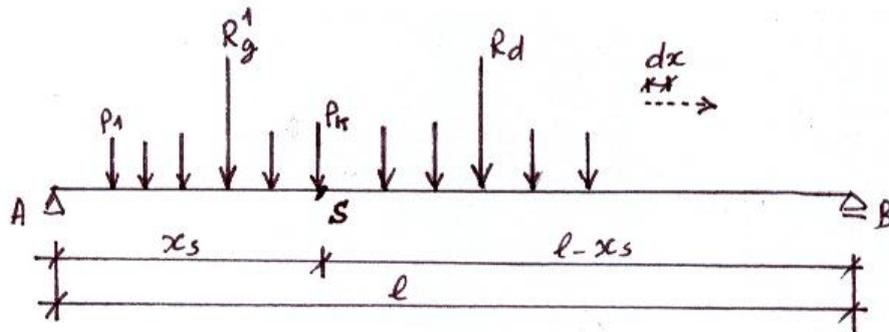


Fig. 17 Déplacement de la charge P_k au niveau de la section S.

En pratique, pour déterminer M_s^{\max} , on fait varier i de 1 jusqu'à n , pour chaque valeur de i on procède de la manière suivante :

- 1- Placer la charge P_i en S, et calculer la valeur $\frac{R \cdot x_s}{l}$.
- 2- Calculer les 2 valeurs : R_{g1} en tenant compte de la charge P_i et R_{g2} en omettant la charge P_i .
- 3- Vérifier les 2 conditions :

$$\left. \begin{aligned} R_{g1} &\geq \frac{R \cdot x_S}{l} \\ \text{et} \\ R_{g2} &< \frac{R \cdot x_S}{l} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

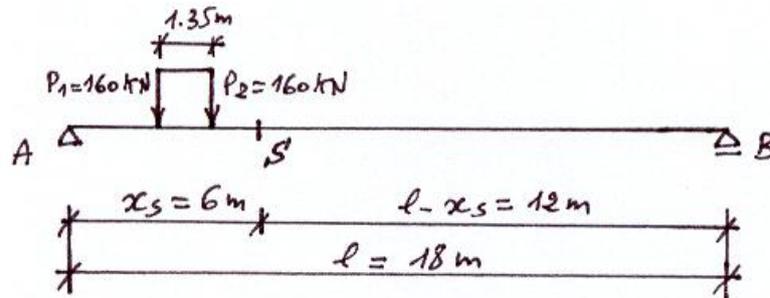
4- Si la condition 3 est vérifiée, le moment fléchissant en S est maximal si la charge P_i est au droit de S.

$$M_S^{\max} = \sum P_i y_i \quad (29)$$

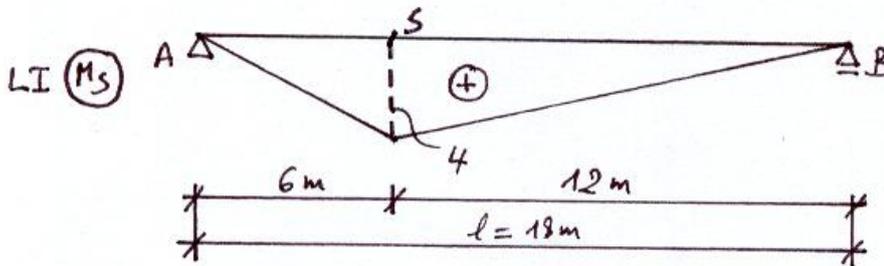
Sinon, on déplace le convoi en mettant la charge P_{i-1} au droit de S, on refait ensuite la procédure de 1 à 4 jusqu'à ce que l'on ait M_S^{\max} .

Exercice 4

En utilisant la méthode d'approximations successives, vérifier la valeur de M_S^{\max} du système Bt de l'exercice 3.



Solution



Quelle que soit la position de P_i en S, on aura

$$R = P_1 + P_2 = 320 \text{ KN}$$

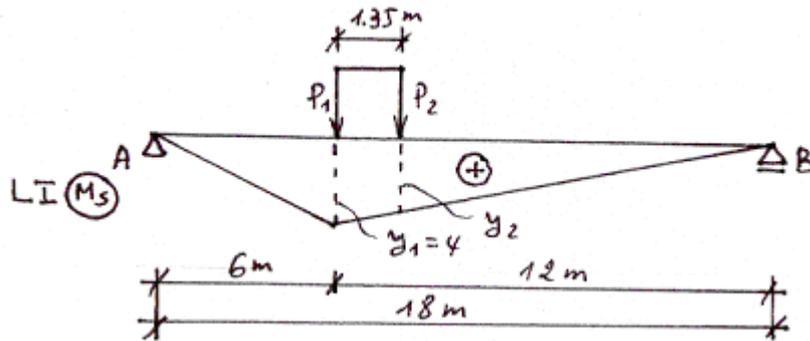
La valeur : $\frac{R \cdot x_S}{l} = \frac{320 \times 6}{18} = 106.667 \text{ KN}$.

FORCE EN S	R [KN]	R . X _S / L [KN]	RG ₁ [KN]	RG ₂ [KN]	RG ₁ ≥ R . X _S / L ET RG ₂ < R . X _S / L
P ₂	320	106.667	320	160	C.N.V
P ₁	320	106.667	160	0	C.V

N.B : C.N.V : Condition non vérifiée.

C.V : Condition vérifiée.

La position de P_1 en S donnera le moment M_S^{\max}



Soit $M_S^{\max} = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2$

$M_S^{\max} = 160 \times (4 + 3.55) = 1208 \text{ KN} \cdot \text{m}$

Cette valeur coïncide bien avec celle de l'exercice 3, elle correspond à la position 3.

Exercice 5

Une locomotive spéciale composée de 6 essieux se déplace de gauche vers la droite sur un pont-rail à une seule travée.

Calculer le moment fléchissant maximal dans la section S (fig. 18).

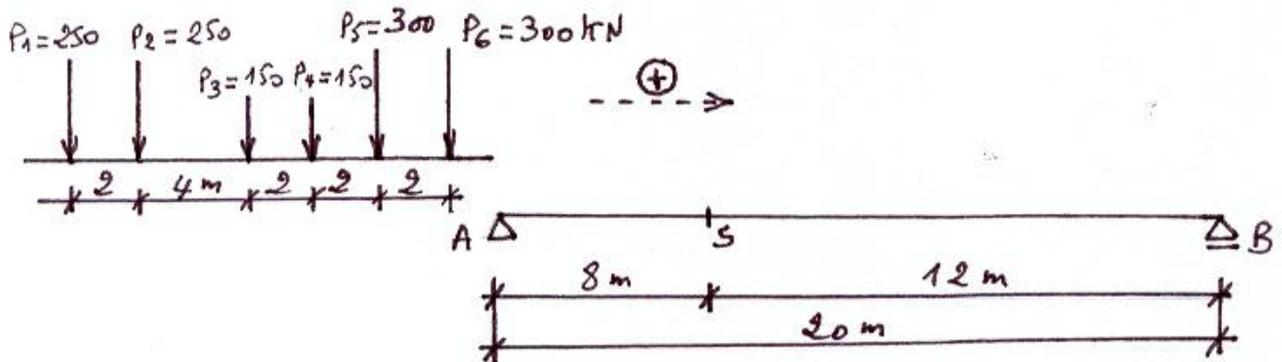


Fig. 18 Déplacement d'une locomotive dans un pont-rail.

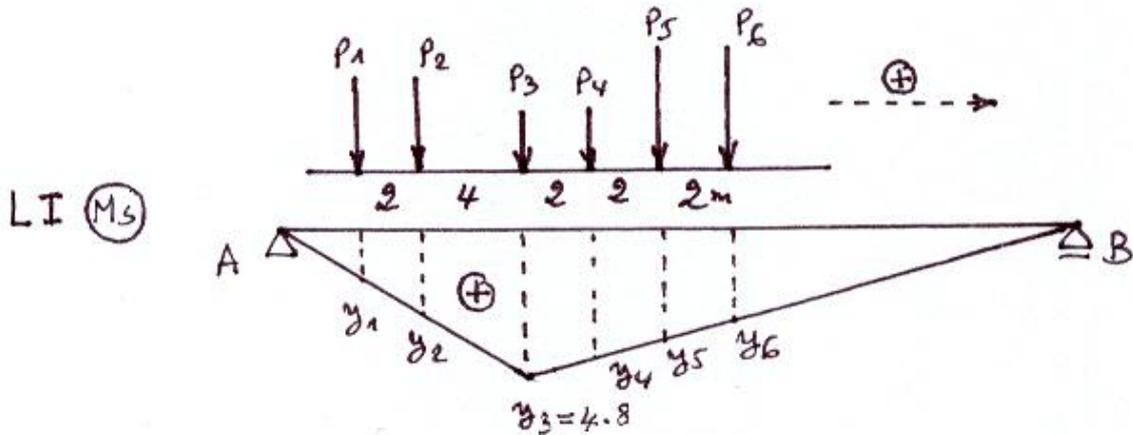
Solution

FORCE EN S	R [KN]	R . X _S /L [KN]	RG ₁ [KN]	RG ₂ [KN]	RG ₁ ≥ R . X _S /L ET RG ₂ < R . X _S /L
P ₆	900	360	900	600	C.N.V
P ₅	1150	460	850	550	C.N.V
P ₄	1400	560	800	650	C.N.V
P ₃	1400	560	650	500	C.V
P ₂	1400	560	500	250	C.N.V
P ₁	1400	560	250	0	C.N.V

L'essieu P₃ en S donnera le moment fléchissant maximal, soit

$$M_S^{\max} = \sum_{i=1}^6 P_i y_i$$

$$M_S^{\max} = 250 \times 1.2 + 250 \times 2.4 + 150 \times 4.8 + 150 \times 4 + 300 \times 3.2 + 300 \times 2.4 = 3900 \text{ KN.m}$$



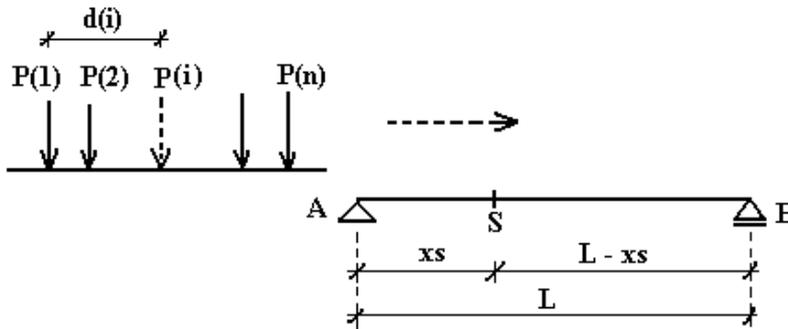
Remarque : Dans certains cas, la condition décrite par la relation 28 peut être vérifiée pour plusieurs cas, soit m cas tel que ($m < n$). Dans ces conditions, on calcule M_s pour chaque cas, le moment maximal sera

$$M_S^{\max} = \text{Sup}(M_S^{(1)}, M_S^{(2)}, \dots, M_S^{(m)}) \quad (30)$$

La procédure de calcul de M_S^{\max} et son essieu correspondant est illustrée dans l'organigramme suivant :

Calcul de M_s^{\max} du à un convoi P_1, \dots, P_n .

ORGANIGRAMME



SYSTEME DE CHARGES

Début

Lire :
 $L, xs, n,$
 $P(1), P(2), \dots, P(n),$
 $d(1), d(2), \dots, d(n).$ (1)

$m = 0$ (2)

$i = n$ (3)

Calculer :
 k, i_1 (4)

$R = P(i_1) + \dots + P(i_1+k-1)$
 $Rg_1 = P(i_1) + \dots + P(i)$
 $Rg_2 = Rg_1 - P(i)$

Decision diamond:
 $Rg_1 \geq R \cdot \frac{xs}{L}$
 (et)
 $Rg_2 < R \cdot \frac{xs}{L}$

Oui
 $m = m + 1$

Non
 $i = i - 1$

Decision diamond:
 $i \geq 1$

Non

Calculer :
 $M_s^{\max} = \text{Sup}(Ms(1), \dots, Ms(m))$
 Num correspondant à M_s^{\max}

Afficher :
 M_s^{\max}
 et Num

Fin

(5)
 $P(i)$ se trouve en S. Calculer :
 $\text{Num}(m) = i$
 $y(i_1), \dots, y(i_1+k-1)$
 $M_s(m) = P(i_1) \cdot y(i_1) + \dots + P(i_1+k-1) \cdot y(i_1+k-1)$

OBSERVATIONS

- (1) : $d(i)$ est l'abscisse de l'essieu $P(i)$ par rapport à l'essieu $P(1)$. Donc $d(1) = 0$.
- (2) : m est le nombre de cas de M_s^{\max} .
- (3) : On va poser $P(n)$ au droit de S.
- (4) : k est le nombre d'essieux qui se trouvent sur la travée AB quand $P(i)$ est au droit de S. i_1 est le numéro de l'essieu se trouvant à l'extrême gauche de la travée AB, c'ad l'essieu le plus proche de A. On a toujours $(i_1 \leq i)$.
- (5) : $\text{Num}(m)$ est le numéro de l'essieu se trouvant en S et qui vérifie M_s^{\max} .

Exercice 6

Soit un pont en béton précontraint à poutres sous chaussée de portée $L = 32.4$ m. On se propose de calculer le moment fléchissant maximal dans le tablier de ce pont du au système Bc au $\frac{1}{4}$ de la travée. Les camions Bc peuvent être disposés selon 2 files, leurs charges sont multipliées par les coefficients $bc = 1.1$ et $\delta_{Bc} = 1.082$.

Solution

$$x_s = \frac{L}{4} = \frac{32.4}{4} = 8.1 \text{ m}$$

$$y_s = x_s \cdot \frac{(L - x_s)}{L} = 8.1 \times \frac{24.3}{32.4} = 6.075$$

Traçons la ligne d'influence de M_s , et faisons passer le convoi Bc au droit de S.

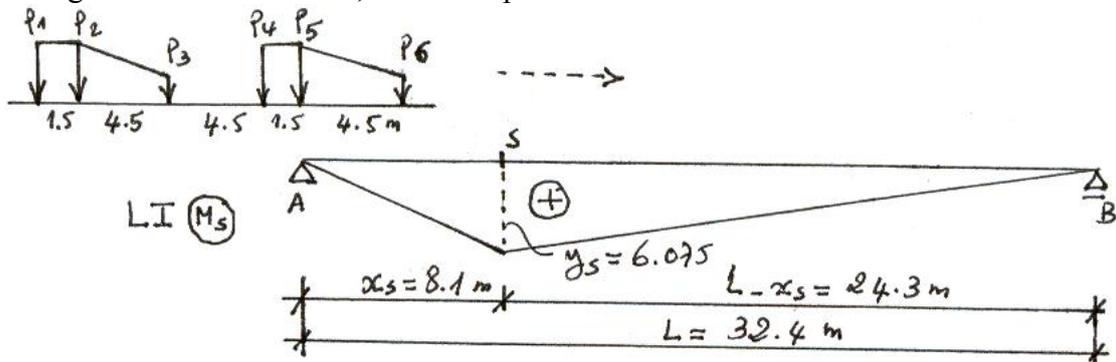


Fig. 19 Déplacement d'une file de camion Bc dans un pont à une seule travée.

FORCE EN S	R [KN]	$R \cdot X_s / L$ [KN]	RG_1 [KN]	RG_2 [KN]	$RG_1 \geq R \cdot X_s / L$ ET $RG_2 < R \cdot X_s / L$
P ₆	300	75	300	240	C.N.V
P ₅	360	90	300	180	C.N.V
P ₄	360	90	180	60	C.V
P ₃	600	150	300	240	C.N.V
P ₂	600	150	240	120	C.V
P ₁	600	150	120	0	C.N.V

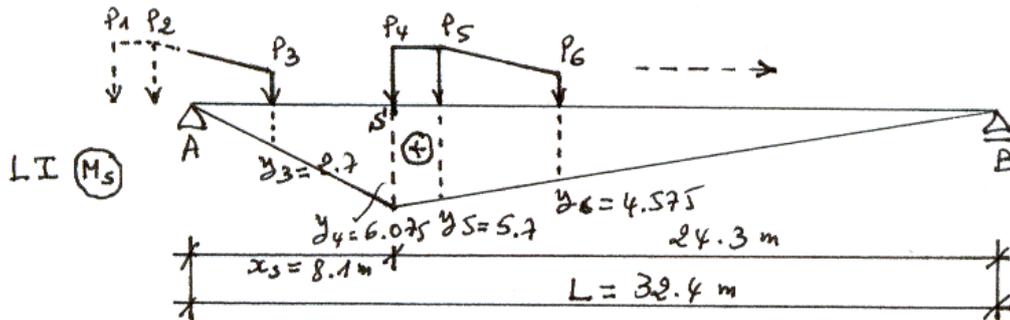
Quand les essieux P₄ et P₂ sont au droit de S la condition de Ms maximal est vérifiée. On calculera ce moment pour ces 2 positions et on choisira le maximum entre les deux.

Position 1 : (P₄ au droit de S):

$$M_s^{(1)} = \sum_{i=3}^6 P_i y_i$$

$$M_s^{(1)} = P \cdot \left(\frac{y_3}{2} + y_4 + y_5 + \frac{y_6}{2} \right)$$

$$M_s^{(1)} = 120 \times \left(\frac{2.700}{2} + 6.075 + 5.700 + \frac{4.575}{2} \right) = 1849.500 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

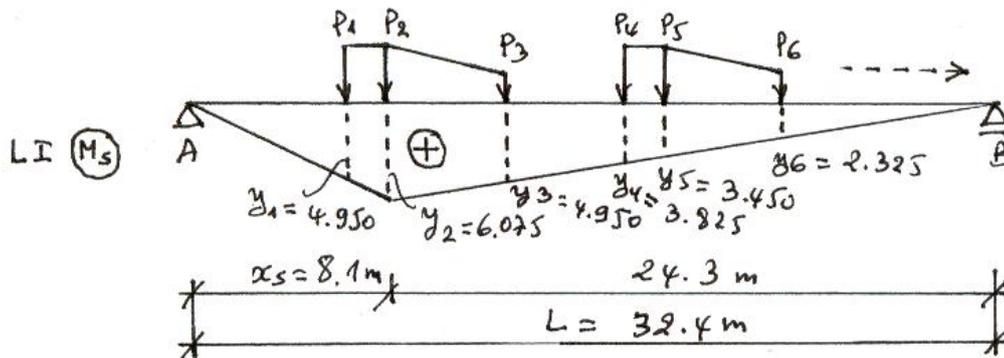


Position 2 : (P_2 au droit de S):

$$M_S^{(2)} = \sum_{i=1}^6 P_i y_i$$

$$M_S^{(2)} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} + y_4 + y_5 + \frac{y_6}{2} \right)$$

$$M_S^{(2)} = 120 \times \left(4.950 + 6.075 + \frac{4.950}{2} + 3.825 + 3.450 + \frac{2.325}{2} \right) = 2632.500 \text{ KN} \cdot \text{m}$$



$$M_S^{\max} = \text{Sup}(M_S^{(1)}, M_S^{(2)}) = 2632.500 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

Le nombre de files est $n = 2$, on aura

$$M_S^{\max} = 2632.500 \times n \times b_c \times \delta_{Bc}$$

$$M_S^{\max} = 2632.500 \times 1.1 \times 1.082 = 3133.202 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

b- Charge uniformément répartie

La charge constante q est répartie sur une longueur D inférieure à la portée L de la poutre. On suppose que l'emplacement de la figure 20 nous donne un moment fléchissant maximal en S. D'après l'équation 20, on a

$$M_S^{\max} \Rightarrow \frac{R_g}{x_s} = \frac{R_d}{(l - x_s)} \quad (31)$$

R_g est la résultante de la charge se trouvant à gauche de S et qui s'étend sur une longueur L_g inférieure à D .

$$L_g = \alpha \cdot D \quad (32)$$

Où α est un coefficient de proportion de L_g par rapport à D . Il vient

$$0 < \alpha < 1 \quad (33)$$

Donc

$$R_g = \alpha \cdot D \cdot q \quad (34)$$

De même R_d est la résultante de la charge se trouvant à droite de S sur une longueur

$$L_g = (1 - \alpha) \cdot D \quad (35)$$

D'où

$$R_g = (1 - \alpha) \cdot D \cdot q \quad (36)$$

Pour résoudre le problème il suffit de calculer le coefficient α . En remplaçant les valeurs de R_g et R_d dans l'équation 31, on obtient

$$\frac{\alpha \cdot D \cdot q}{x_s} = \frac{(1 - \alpha) \cdot D \cdot q}{(l - x_s)}$$

D'où après simplification

$$\frac{\alpha}{x_s} = \frac{(1 - \alpha)}{(l - x_s)} \quad (37)$$

En développant la relation 37, il vient

$$\alpha = \frac{x_s}{l} \quad (38)$$

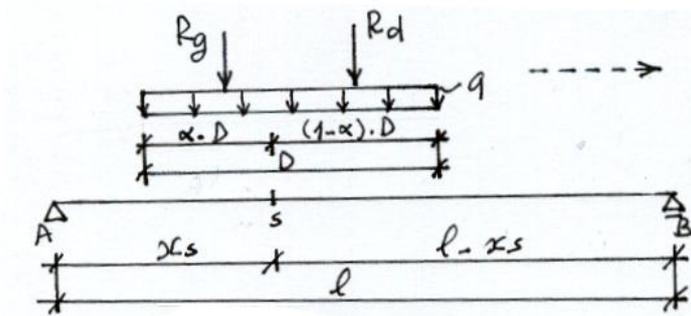


Fig. 20 Poutre soumise à une charge uniformément répartie.

Exercice 7

Un pont dalle de portée 15 m est parcouru par un convoi Mc120. Calculer le moment maximal dans une section située à 6m de l'appui A. Le coefficient de majoration dynamique $\delta_{Mc120} = 1.125$.

Solution

$$y_s = x_s \cdot \frac{(L - x_s)}{L} = 6 \times \frac{9}{15} = 3.60$$

$$\alpha = \frac{x_s}{L} = \frac{6}{15} = 0.4$$

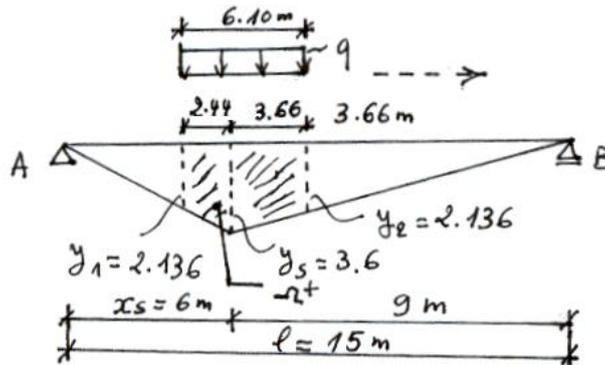
$$\alpha \cdot D = 0.4 \times 6.1 = 2.44 \text{ m}$$

$$\Omega^+ = \frac{(2.136 + 3.6)}{2} \times (2.44 + 3.66) = 17.4948$$

$$q = \frac{1100}{6.1} \text{ KN/ml}$$

$$M_s^{\max} = q \times \Omega^+ \times \delta_{Mc120}$$

$$M_s^{\max} = \frac{1100}{6.1} \times 17.4948 \times 1.125 = 3549.150 \text{ KN} \cdot \text{m}$$



Résultat : Pour donner le moment fléchissant M_s^{\max} , on a toujours $y_1 = y_2$.

6-3.2 Les courbes enveloppes

En chaque point de la poutre, il est possible de calculer T et M extrêmes (min et max) dus à un convoi quelconque constitué de charges localisées dont les distances partielles entre elles sont supposées constantes. L'ensemble de ces points est appelé courbe enveloppe.

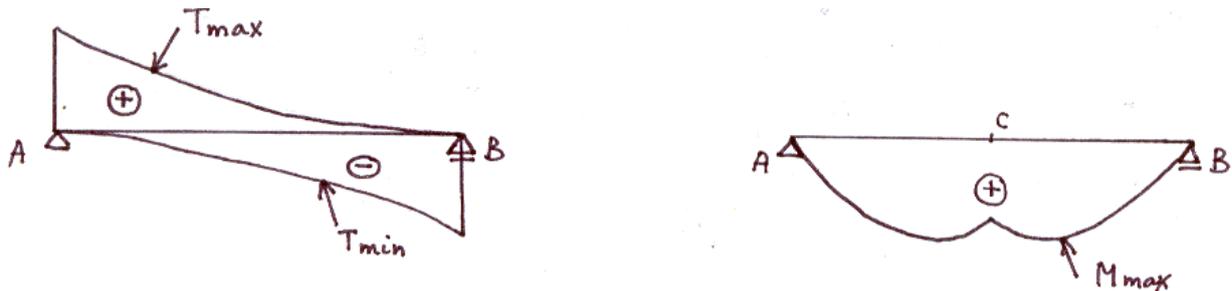


Fig. 21 Courbes enveloppes T et M dans une poutre à une seule travée dus au déplacement d'un convoi quelconque de charges localisées.

D'après la figure 21, on constate que le moment fléchissant maximal dans une poutre n'est pas obligatoirement obtenu au milieu c de la poutre mais dans une section s critique proche de c.

6-3.2 Le moment fléchissant maximal dans une poutre

Pour un convoi donné, le problème qui se pose est de connaître la position exacte de la section où se produit le moment fléchissant maximal, on l'appelle section critique. Cet effet se produit lorsque le milieu c se situe entre la résultante R des charges se trouvant sur la travée et l'essieu Pi le plus rapproché de R. La section critique se trouve au droit de cet essieu. Pour démontrer ce fait, on utilise la figure 22 où di est la distance entre l'essieu Pi et la résultante R, δ est la distance entre la résultante R et le milieu c de la poutre.

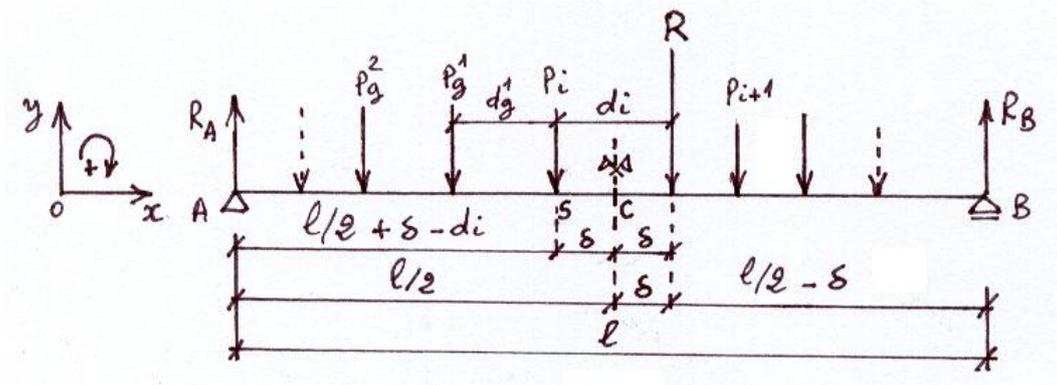


Fig. 22 Section critique S d'un convoi quelconque.

$$\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow R_A \cdot l - R \cdot \left(\frac{l}{2} - \delta\right) = 0$$

D'où

$$R_A = R \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{l}\right) \quad (39)$$

Le moment fléchissant au droit de Pi

$$M_i = R_A \cdot \left(\frac{l}{2} + \delta - d_i\right) - \sum P_g \cdot d_g$$

En remplaçant la valeur de R_A dans l'équation de M_i , il vient

$$M_i = R \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{l}\right) \cdot \left(\frac{l}{2} + \delta - d_i\right) - \sum P_g \cdot d_g \quad (40)$$

Dans l'expression 40 seul δ est variable.

$$M_i^{\max} \Rightarrow \frac{dM_i}{d\delta} = 0$$

$$\frac{dM_i}{d\delta} = -\frac{R}{l} \cdot \left(\frac{l}{2} + \delta - d_i\right) + R \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{l}\right) = 0$$

D'où

$$\delta = \frac{d_i}{2} \quad (41)$$

En remplaçant la valeur de δ dans l'équation 40, on obtient

$$M_i = \frac{Rl}{4} \cdot \left(1 - \frac{d_i}{l}\right)^2 - \sum P_g \cdot d_g \quad (42)$$

L'essieu P_i et la résultante R sont donc symétriques par rapport au milieu c de la poutre, cela confirme ce qui a été énoncé précédemment et se traduit par le théorème suivant :

Théorème de Barrés : Le moment fléchissant est maximal au droit d'un essieu lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi occupent des positions symétriques par rapport au milieu de la poutre.

Exercice 8

Déterminer la section critique et le moment fléchissant maximal de la poutre représentée dans la figure 23.

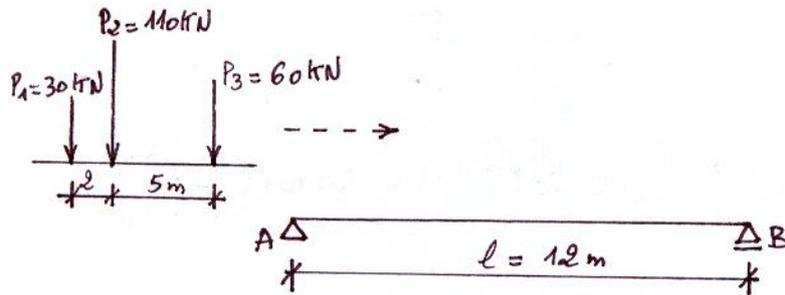


Fig. 23 Poutre soumise à un convoi composé de 3 essieux.

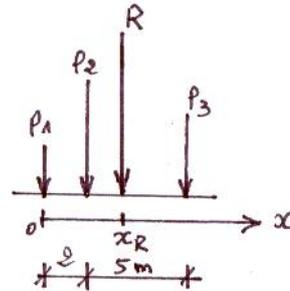
Solution

On calcule la résultante R et on détermine sa position par rapport au 1^{er} essieu ($P_1 = 30 \text{ KN}$).

$$R = 30 + 110 + 60 = 200 \text{ KN}$$

$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^3 P_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^3 P_i} = \frac{\sum_{i=1}^3 P_i \cdot x_i}{R}$$

$$x_R = \frac{30 \times 0 + 110 \times 2 + 60 \times 7}{200} = 3.20 \text{ m}$$



1^{er} cas : Le convoi circule de gauche vers la droite.

La distance entre la résultante R et l'essieu P_2 est

$$d_i = x_R - x_2$$

$$d_i = 3.2 - 2 = 1.20 \text{ m}$$

Le convoi doit se positionner sur la poutre de telle façon que P_2 et R soient symétriques par rapport au milieu c de la poutre. La section critique S se trouve à gauche de c d'une distance δ (fig. 24).

$$\delta = \frac{d_i}{2} = \frac{1.20}{2} = 0.60 \text{ m}$$

$$x_S = \frac{l}{2} - \delta$$

$$x_S = 6 - 0.6 = 5.4 \text{ m}$$

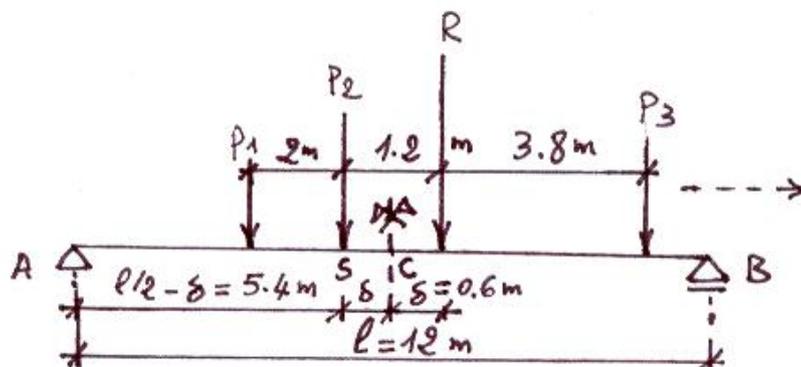


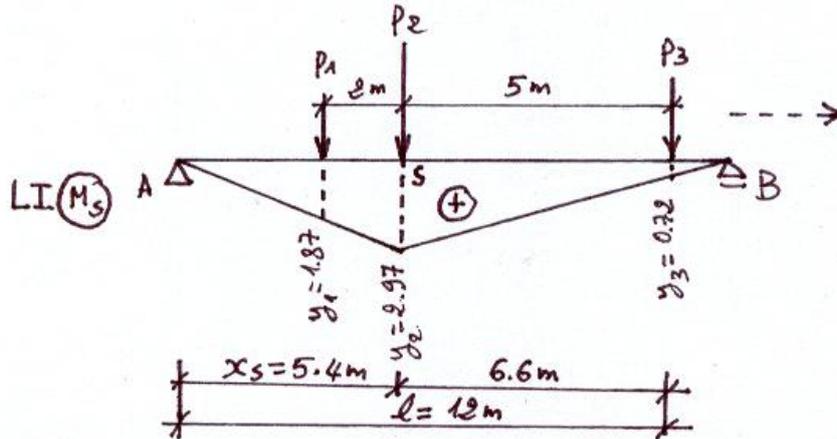
Fig. 24 Position de la section critique pour un déplacement du convoi de gauche vers la droite.

En utilisant l'équation 42, on a

$$M_S^{(1)} = \frac{Rl}{4} \cdot \left(1 - \frac{d_i}{l}\right)^2 - \sum P_g \cdot d_g$$

$$M_S^{(1)} = \frac{200 \times 12}{4} \times \left(1 - \frac{1.2}{12}\right)^2 - 30 \times 2 = 426.00 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

On peut vérifier la valeur de $M_S^{(1)}$ en utilisant les lignes d'influence.



$$M_S^{(1)} = \sum_{i=1}^3 P_i \cdot y_i$$

$$M_S^{(1)} = 30 \times 1.87 + 110 \times 2.97 + 60 \times 0.72 = 426.00 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

2^e cas : Le convoi circule de droite vers la gauche.

La distance entre la résultante R et l'essieu P₃ est

$$d_i = x_3 - x_R$$

$$d_i = 7 - 3.2 = 3.80 \text{ m}$$

La position du convoi est telle que P₃ et R soient symétriques par rapport au milieu c de la poutre. La section critique S se trouve à gauche de c d'une distance δ (fig. 25).

$$\delta = \frac{d_i}{2} = \frac{3.80}{2} = 1.90 \text{ m}$$

$$x_S = \frac{l}{2} - \delta$$

$$x_S = 6 - 1.9 = 4.1 \text{ m}$$

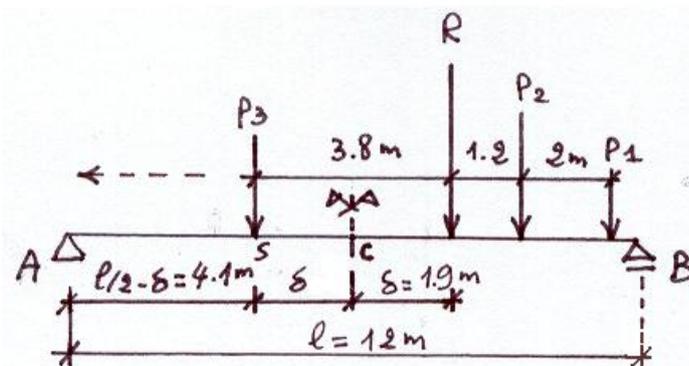


Fig. 25 Position de la section critique pour un déplacement du convoi de droite vers la gauche.

$$M_S^{(2)} = \frac{Rl}{4} \cdot \left(1 - \frac{d_i}{l}\right)^2 - \sum P_g \cdot d_g$$

$$M_S^{(2)} = \frac{200 \times 12}{4} \times \left(1 - \frac{3.8}{12}\right)^2 - 0 = 280.167 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$M_S^{(2)}$ peut être calculée en utilisant la ligne d'influence du moment fléchissant en S.

$$M_S^{\max} = \text{Sup}(M_S^{(1)}, M_S^{(2)}) = 426.00 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

La section critique correspond au 1^{er} cas, elle se situe à une distance $\delta = 1.90 \text{ m}$ par rapport au milieu c de la poutre. Son abscisse par rapport à l'appui A est $x_s = 5.4 \text{ m}$.

Exercice 9

Un pont à une travée de longueur l est constitué d'un tablier à poutres sous chaussée dont chacune est supposée supporter une file complète de camions Bc.

Calculer :

- 1- La position de la section critique S.
- 2- Le moment fléchissant maximal en fonction de la portée l de la poutre et la charge P de l'essieu arrière du camion Bc.
- 3- La portée minimale de la poutre qui assure les conditions décrites dans les questions 1 et 2.

Solution

1 et 2-

1^{er} cas : Le convoi circule de gauche vers la droite.

Calculons la résultante R et sa position par rapport au 1^{er} essieu ($P_1 = P = 120 \text{ KN}$).

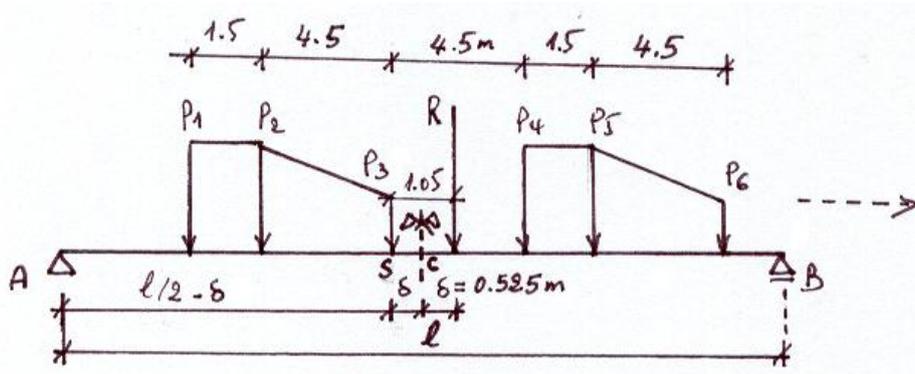


Fig. 26 Position de la section critique pour un déplacement du convoi Bc de gauche vers la droite.

$$R = 5P = 600 \text{ KN}$$

$$x_R = \frac{\sum_{i=1}^6 P_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^6 P_i}$$

$$x_R = \frac{P \times \left(0 + 1.5 + \frac{6}{2} + 10.5 + 12 + \frac{16.5}{2}\right)}{5P} = 7.05 \text{ m}$$

La distance entre la résultante R et l'essieu P_3 est

$$d_i = x_R - x_3$$

$$d_i = 7.05 - 6 = 1.05 \text{ m}$$

Le convoi doit se positionner sur la poutre de telle façon que P_3 et R soient symétriques par rapport au milieu c de la poutre. La section critique S se trouve à gauche de c d'une distance δ (fig. 26).

$$\delta = \frac{d_i}{2} = \frac{1.05}{2} = 0.525 \text{ m.}$$

$$x_s = \frac{l}{2} - \delta$$

$$x_s = \frac{l}{2} - 0.525$$

$$M_s^{(1)} = \frac{Rl}{4} \cdot \left(1 - \frac{d_i}{l}\right)^2 - \sum P_g \cdot d_g$$

$$M_s^{(1)} = \frac{5Pl}{4} \times \left(1 - \frac{1.05}{l}\right)^2 - P \times (6 + 4.5)$$

$$M_s^{(1)} = 1.25Pl \times \left(1 - \frac{2.1}{l} + \frac{1.1025}{l^2}\right) - 10.5P$$

$$\text{Soit } M_s^{(1)} = P \left(1.25l + \frac{1.378125}{l} - 13.125 \right)$$

La valeur de $M_s^{(1)}$ peut être vérifiée à l'aide des lignes d'influence puisqu'on connaît la position de la section critique.

2^e cas : Le convoi circule de droite vers la gauche.

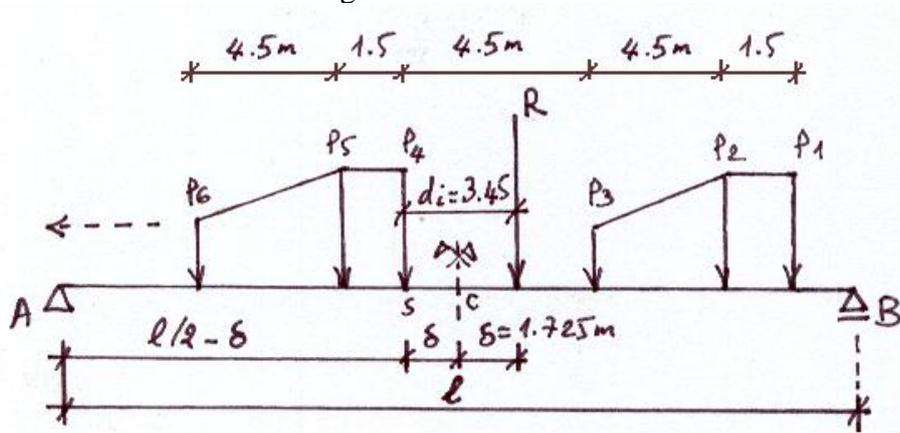


Fig. 27 Position de la section critique pour un déplacement du convoi Bc de droite vers la gauche.

La distance entre la résultante R et l'essieu P_4 est

$$d_i = x_4 - x_R$$

$$d_i = 10.5 - 7.05 = 3.45 \text{ m}$$

Le convoi doit se positionner sur la poutre de telle façon que P_4 et R soient symétriques par rapport au milieu c de la poutre. La section critique S se trouve à gauche de c d'une distance δ (fig. 27).

$$\delta = \frac{d_i}{2} = \frac{3.45}{2} = 1.725 \text{ m.}$$

$$x_s = \frac{l}{2} - \delta$$

$$x_s = \frac{l}{2} - 1.725$$

$$M_s^{(2)} = \frac{Rl}{4} \cdot \left(1 - \frac{d_i}{l}\right)^2 - \sum P_g \cdot d_g$$

$$M_s^{(2)} = \frac{5Pl}{4} \times \left(1 - \frac{3.45}{l}\right)^2 - P \times \left(1.5 + \frac{6}{2}\right)$$

$$M_s^{(2)} = 1.25Pl \times \left(1 - \frac{6.9}{l} + \frac{11.9025}{l^2}\right) - 4.5P$$

$$\text{Soit } M_s^{(2)} = P \left(1.25l + \frac{14.878125}{l} - 13.125\right)$$

La valeur de $M_s^{(2)}$ peut être vérifiée à l'aide des lignes d'influence du fait que la position de la section critique est connue.

$$M_s^{\max} = \text{Sup}(M_s^{(1)}, M_s^{(2)}) = M_s^{(2)}$$

La section critique correspond au 2^e cas, elle se situe à une distance $\delta = 1.725$ m par rapport au milieu c de la poutre. Son abscisse par rapport à l'appui A est $x_s = \frac{l}{2} - 1.725$

3- d'après la figure 27, la partie du convoi Bc se trouvant à droite du milieu c de la poutre a une longueur

$$l_d = 4.5 + 4.5 + 1.5 - 1.725 = 8.775 \text{ m.}$$

On doit avoir

$$l_d \leq \frac{l}{2} \Rightarrow l \geq 2l_d$$

$$l \geq 2 \times 8.775$$

$$\text{Soit } l \geq 17.55 \text{ m.}$$

La valeur de M_s^{\max} qui est vérifiée pour $M_s^{(2)}$ peut être appliquée pour une longueur de travée $l \geq 17.55$ m.

6 LES LIGNES D'INFLUENCE DANS UNE POUTRE CANTILEVER

6-1 Définition

C'est une poutre continue divisée en plusieurs tronçons par des articulations.

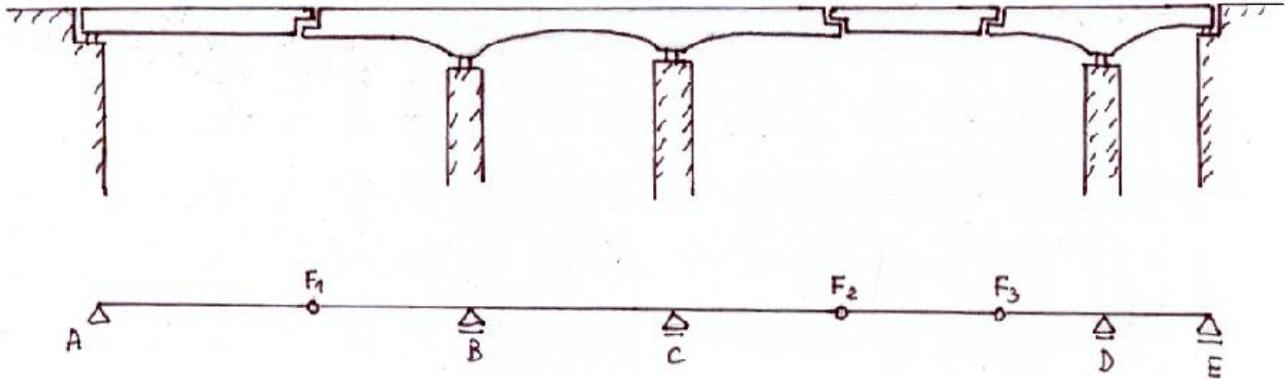


Fig. 28 Exemple d'un pont cantilever.

Le degré d'hyperstaticité n d'une poutre cantilever est donné par la relation

$$n = 3b + r - (3j + k) \quad (43)$$

Où b est le nombre de barres.

r est le nombre de réactions des appuis.

j est le nombre de noeuds.

k est le nombre de conditions supplémentaires.

Dans l'exemple de la figure 28, on a

$$n = 3 \times 7 + 6 - (3 \times 8 + 3) = 0$$

Le système est donc isostatique, il contient 3 articulations supplémentaires F_1 , F_2 et F_3 , pour lesquelles on a des équations supplémentaires.

$$\sum M_g(F_i) = \sum M_d(F_i) = 0 \quad (44)$$

Où M_g et M_d sont respectivement les moments fléchissants à gauche et à droite du foyer ou de l'articulation F_i .

6-2 Conditions d'emplacement des articulations

L'emplacement et le nombre d'articulations supplémentaires ne doivent pas compromettre la stabilité de la poutre qui risque d'avoir un nombre excessif de degrés de libertés, ce qui causera des mécanismes dans la poutre. Pour cela, on doit éviter les 4 dispositions montrées dans la figure 29. Selon ces dispositions, il est interdit d'avoir :

- 1- 2 articulations dans la travée de rive, sauf dans le cas d'encastrement (fig. 29-a).
- 2- Plus de 2 articulations dans les travées intermédiaires (fig. 29-b).
- 3- 2 articulations dans 2 travées intermédiaires successives (fig. 29-c).
- 4- 1 articulation dans la travée de rive si la travée d'à côté a 2 articulations (fig. 29-d).

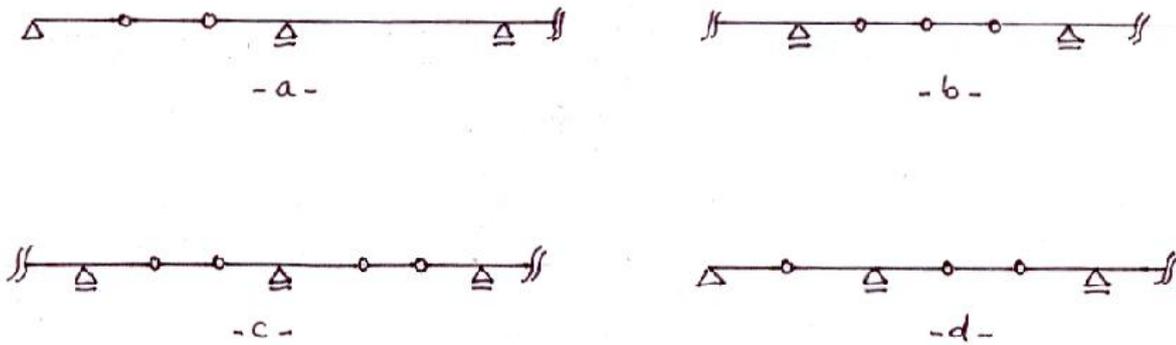


Fig. 29 Dispositions prohibées des articulations supplémentaires.

6-3 Application des travaux virtuels dans les lignes d'influences

Théorème : Lorsqu'un système en équilibre subit une déformation virtuelle, la somme des travaux virtuels établis par les charges externes est égale à la somme des travaux virtuels établis par les efforts internes.

6-3.1 La réaction d'appui

Considérons l'exemple d'une poutre isostatique à 1 seule travée soumise à une charge verticale unitaire $P = 1$ (fig. 30-a). Exerçons à l'appui A un déplacement virtuel $\delta = 1$, la poutre aura la forme représentée dans la figure 30-b, elle se déplace verticalement à l'endroit de l'application de la force unitaire $P = 1$ d'une valeur y . Du fait que la poutre reste rectiligne, les efforts internes sont nuls, donc la somme des travaux extérieurs est nulle.

$$R_A \cdot \delta - P \cdot y = 0$$

D'où

$$R_A = \frac{P \cdot y}{\delta}$$

Du fait que $P = 1$ et $\delta = 1$, il vient

$$R_A = y \quad (45)$$

D'après la figure 30-b, on a l'équation de la déformée de la poutre sous l'effet du déplacement unitaire $\delta = 1$

$$y = 1 - \frac{x}{l} \quad (46)$$

On sait bien que l'équation 46 exprime la fonction d'influence de la réaction R_A . On peut donc tirer le résultat suivant :

Résultat : La ligne d'influence de la réaction d'appui d'une poutre est égale à la déformée de la poutre suite à un déplacement unitaire virtuel appliqué verticalement sur cet appui.

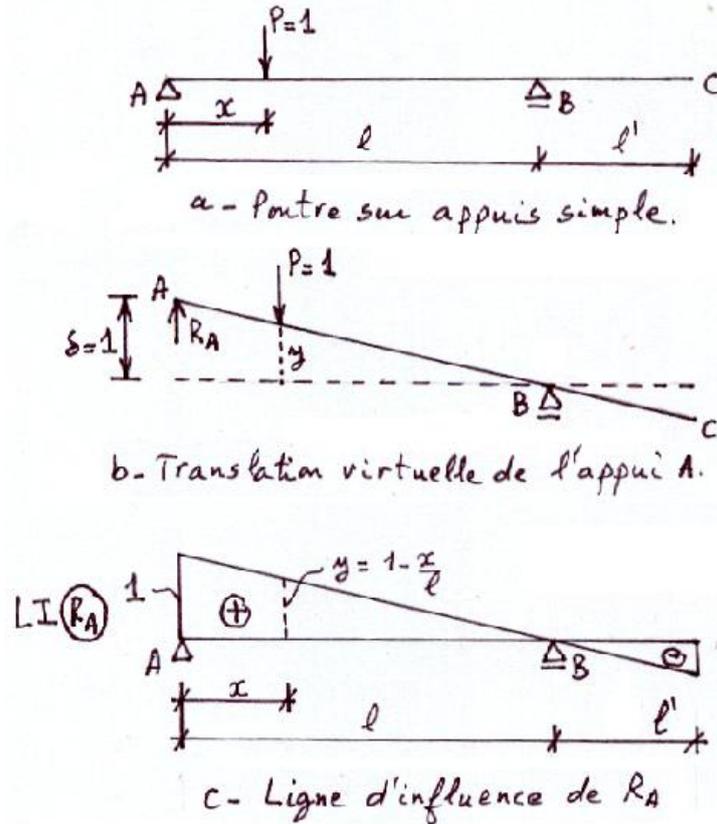


Fig. 30 Application du principe des travaux virtuels pour le traçage de la ligne d'influence de la réaction d'appui en A.

En appliquant le même principe pour l'appui B, on obtient la ligne d'influence de la réaction R_B comme le montre la figure 31.

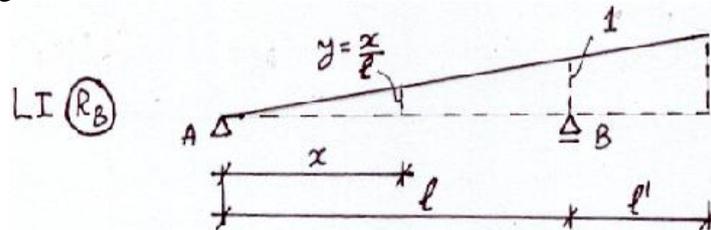


Fig. 31 Application du principe des travaux virtuels pour le traçage de la ligne d'influence de la réaction d'appui en B.

Exercice 10

En utilisant le principe des travaux virtuels, tracer les lignes d'influence des réactions verticales en A, B, C et D de la poutre représentée dans la figure 32.

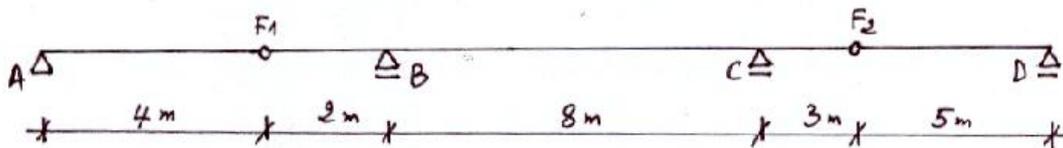


Fig. 32 Poutre cantilever isostatique.

Solution

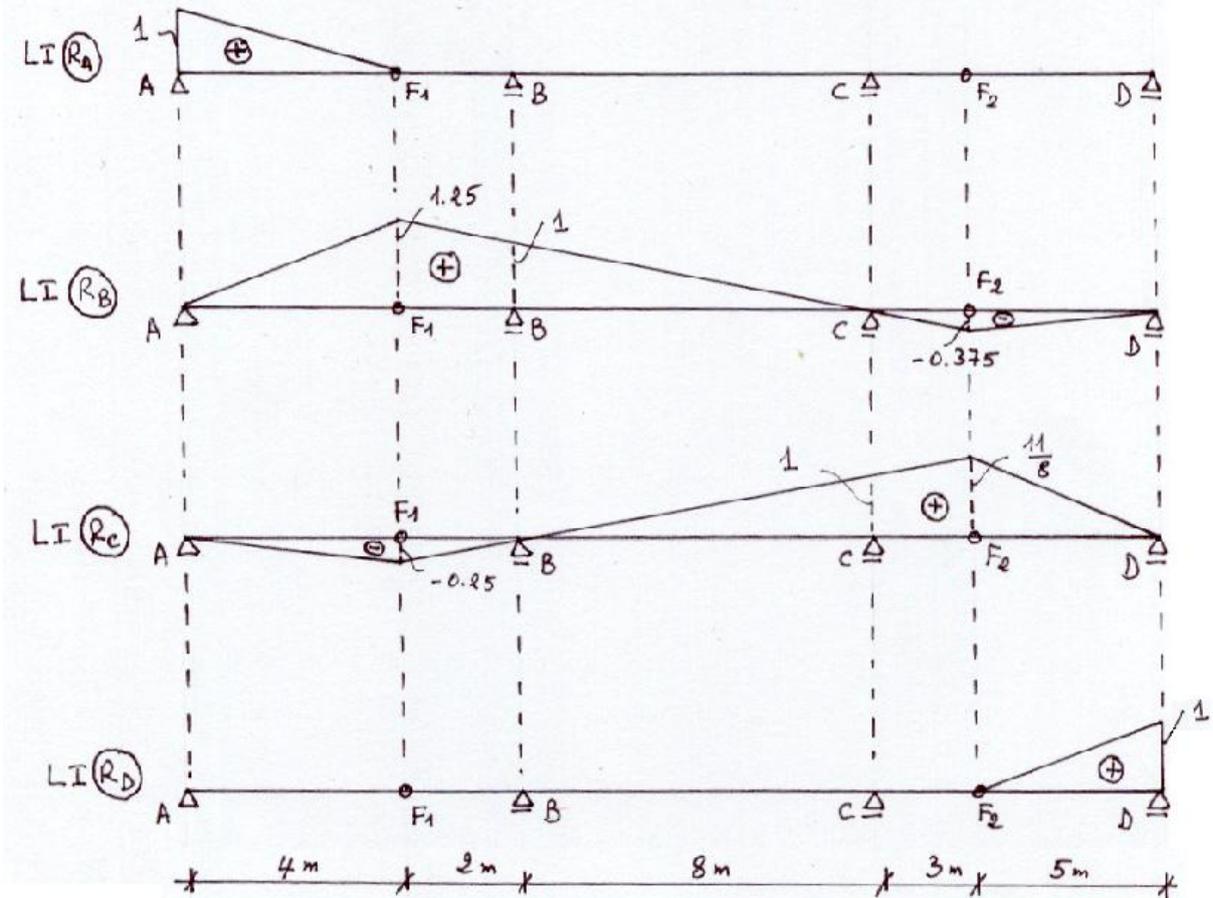


Fig. 33 Lignes d'influence des différentes réactions d'appuis.

Exercice 11

Un pont isostatique est constitué de poutres multiples dont chacune d'elles est supposée supporter un convoi composé de 2 essieux (fig. 34).

- 1- a) Tracer les lignes d'influence des réactions en A, B et C.
 b) En déduire les fonctions d'influence de ces réactions.
- 2- a) Ecrire les expressions des fonctions d'influence des moments fléchissants M_B et M_S .
 b) Tracer les lignes d'influence des moments fléchissants M_B et M_S .
 c) Calculer les valeurs extrêmes de M_B et M_S sous l'effet du convoi montré dans la figure 34.

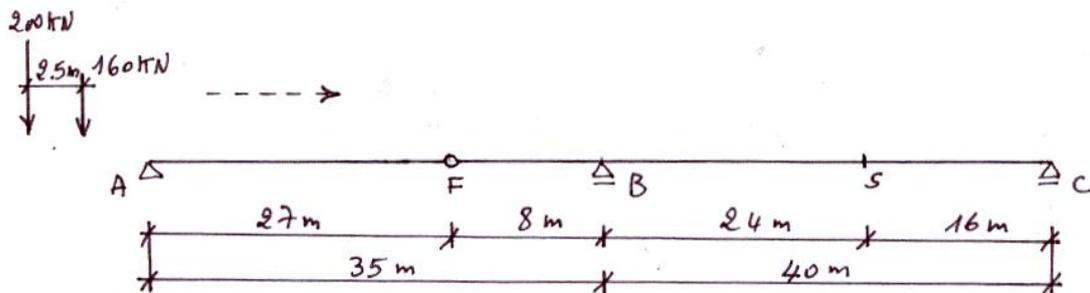


Fig. 34 Schéma d'un pont cantilever isostatique.

Solution

1- a) & b) Traçage des lignes d'influence des réactions en A, B et C. Et détermination de leurs fonctions d'influence.

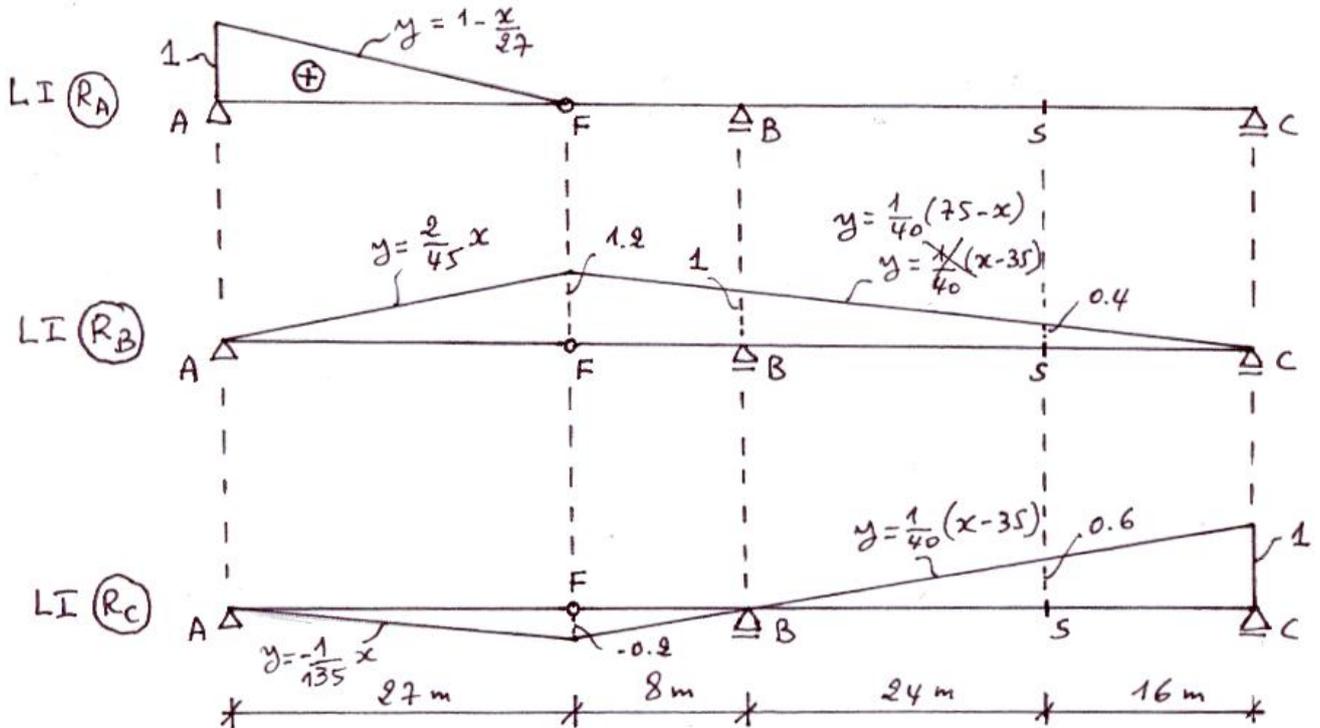
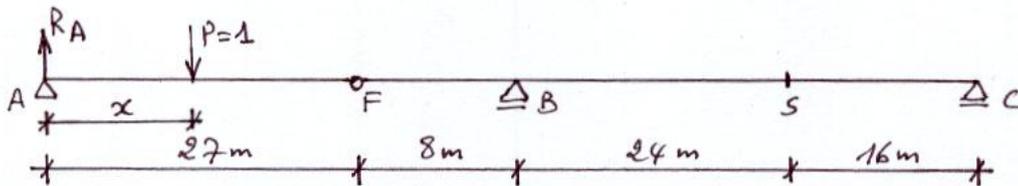


Fig. 35 Lignes et fonctions d'influence des réactions \$R_A\$, \$R_B\$ et \$R_C\$.

2- a) Les fonctions d'influence des moments fléchissants \$M_B\$ et \$M_S\$.

\$M_B\$:

1^{er} cas: $0 \leq x \leq 27\text{ m}$



$$M_B = R_A \times 35 - 1 \times (35 - x)$$

En remplaçant l'expression de \$R_A\$ dans \$M_B\$, on aura

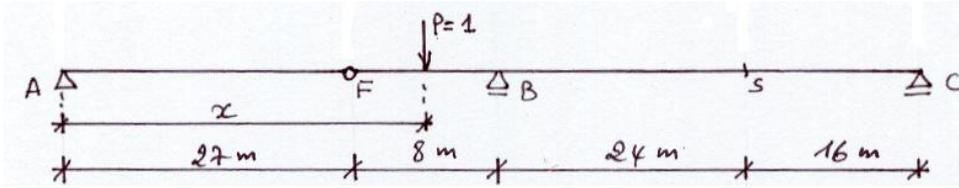
$$M_B = \left(1 - \frac{x}{27}\right) \times 35 - 1 \times (35 - x)$$

D'où $M_B = -\frac{8}{27} \cdot x$

$$x = 0 \Rightarrow M_B = 0$$

$$x = 27 \Rightarrow M_B = -8$$

2^e cas : $27 \leq x \leq 35 \text{ m}$



$$M_B = -1 \times (35 - x)$$

$$x = 27 \Rightarrow M_B = -8$$

$$x = 35 \Rightarrow M_B = 0$$

3^e cas : $x \geq 35 \text{ m}$

$$M_B = 0$$

Le traçage de la ligne d'influence de M_B est donné par la figure 35.

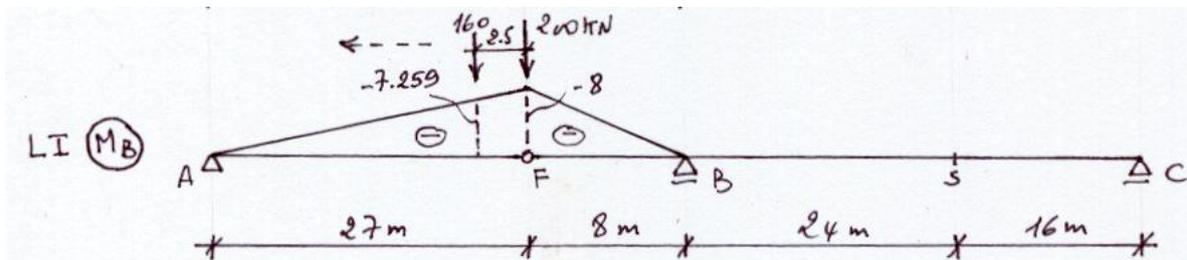
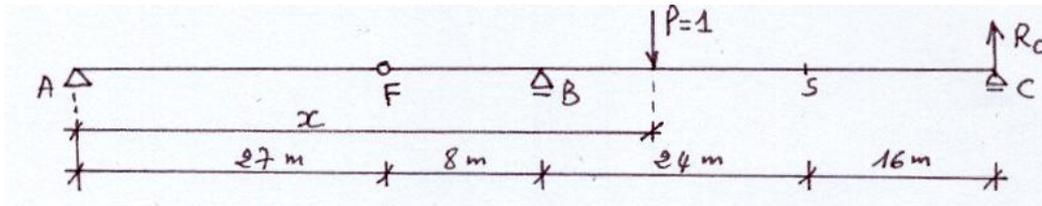


Fig. 35 La ligne d'influence de M_B .

M_S :

1^{er} cas : $0 \leq x \leq 59 \text{ m}$



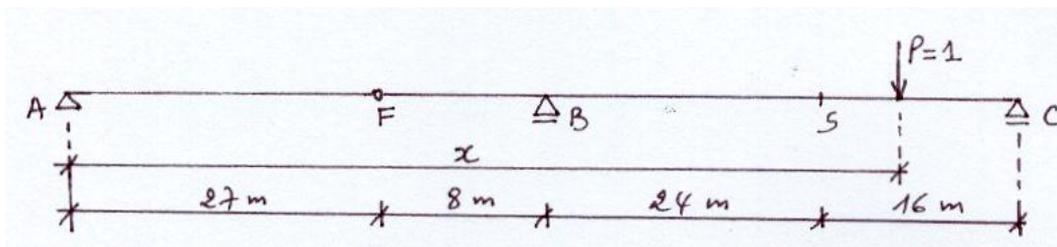
$$M_S = R_C \times 16$$

$$x = 0 \Rightarrow M_S = 0$$

$$x = 27 \Rightarrow M_S = -3.2$$

$$x = 59 \Rightarrow M_S = 9.6$$

2^e cas : $59 \leq x \leq 75 \text{ m}$



$$M_S = R_C \times 16 - 1 \times (x - x_S)$$

$$M_S = R_C \times 16 - 1 \times (x - 59)$$

$$x = x_S = 59 \Rightarrow M_S = 0.6 \times 16 - 59 + 59 = 9.6$$

$$x = 75 \Rightarrow M_S = 0$$

b) Traçage de la ligne d'influence de M_S .

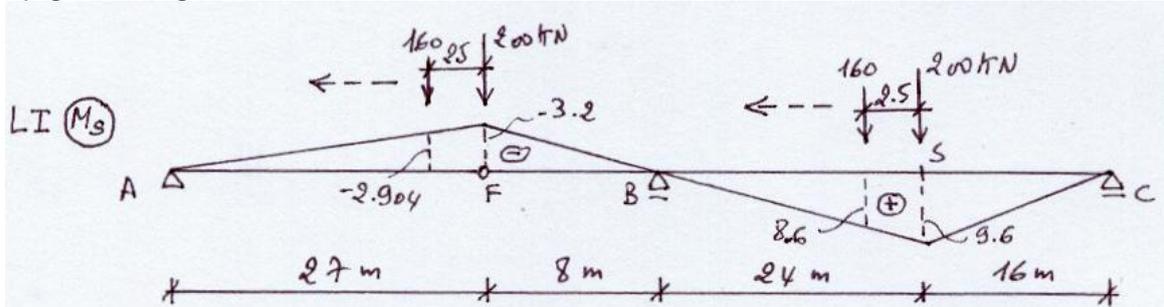


Fig. 36 La ligne d'influence de M_S .

c) Les valeurs extrêmes de M_B et M_S .

En chargeant les lignes d'influence de M_B et M_S (fig.35 et 36), on aura

$$M_B^{\min} = 200 \times (-8) + 160 \times (-7.259) = -2761.4 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_B^{\max} = 0$$

$$M_S^{\min} = 200 \times (-3.2) + 160 \times (-2.904) = -1104.00 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_S^{\max} = 200 \times (9.6) + 160 \times (8.6) = 3296.00 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

6-3.2 L'effort tranchant

Pour dessiner la ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section S d'une poutre, il suffit de faire une coupe transversale au niveau de cette section. Sous l'effet de l'effort tranchant, la partie sectionnée gauche de la poutre va descendre au niveau de S d'une valeur δ_g , tandis que la partie droite va monter d'une valeur δ_d . Ces déplacements doivent satisfaire les 2 conditions suivantes :

1- Le déplacement relatif δ entre les 2 bouts des parties sectionnées au niveau de S doit être égal à l'unité (fig. 37-b).

$$\delta = \delta_g + \delta_d = 1 \quad (47)$$

2- Les 2 tronçons de la poutre coupée doivent être parallèles. D'après la figure 37-b, on a

$$\frac{\delta_g}{x_S} = \frac{\delta_d}{l - x_S} \quad (48)$$

L'équation 48 peut encore s'écrire sous la forme

$$\frac{\delta_g}{x_S} = \frac{\delta_d}{l - x_S} = \frac{\delta_g + \delta_d}{l} = \frac{1}{l}$$

D'où

$$\delta_g = \frac{x_S}{l} \quad (49)$$

Et

$$\delta_d = 1 - \frac{x_s}{l} \quad (50)$$

On remarque que les valeurs de ces déplacements coïncident bien avec celles de la fonction d'influence de l'effort tranchant dans une section S (cf. 5-2). De même, la déformée de la poutre sectionnée (fig. 37-b) coïncide parfaitement avec la ligne d'influence de l'effort tranchant en S (fig. 37-c).

Résultat : La ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section quelconque S d'une poutre est égale à la déformée de cette poutre coupée en S et subissant un déplacement unitaire virtuel appliqué verticalement en S pourvue que les 2 parties de cette poutre restent parallèles.

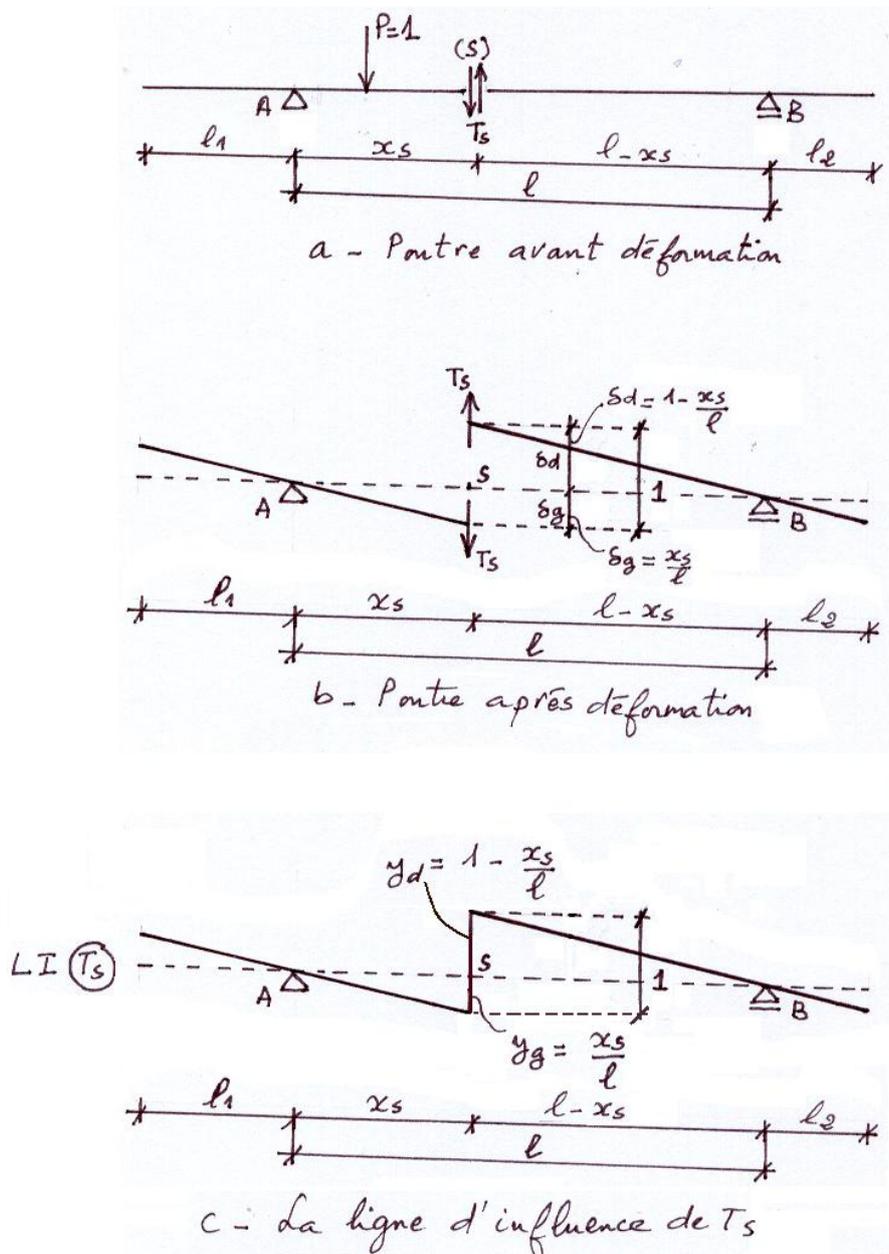


Fig. 37 Application du principe des travaux virtuels pour le traçage de la ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section S.

6-3.3 Le moment fléchissant

Pour déterminer la ligne d'influence du moment fléchissant dans une section S d'une poutre, il suffit de faire une coupe transversale au niveau de cette section. Sous l'effet du moment fléchissant, les 2 parties sectionnées de la poutre vont tourner vers la section S en respectant les 2 conditions suivantes :

1- La rotation relative virtuelle entre les 2 tronçons de la poutre doit être égale à l'unité (fig. 38-b).

$$\theta = \theta_A + \theta_B = 1 \quad (51)$$

2- Les 2 bouts des tronçons de la poutre sectionnée doivent avoir la même ordonnée y_S (fig. 38-b). Puisqu'il s'agit de petites rotations et en utilisant la figure 38-b, on a

$$\theta_A \approx \text{tg } \theta_A = \frac{y_S}{x_S} \quad (52)$$

Et

$$\theta_B \approx \text{tg } \theta_B = \frac{y_S}{l - x_S} \quad (53)$$

En remplaçant les valeurs de θ_A et θ_B dans l'équation (51), on obtient

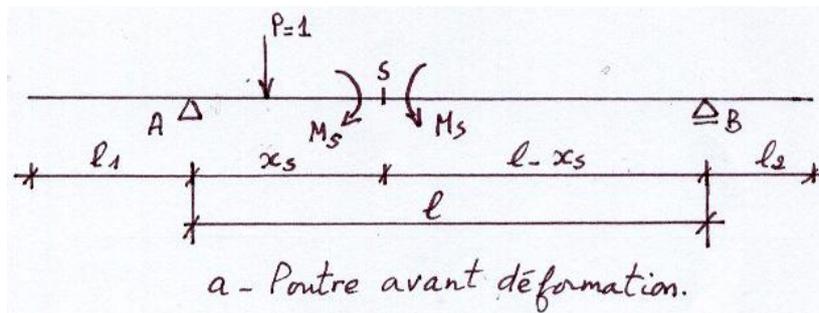
$$\frac{y_S}{x_S} + \frac{y_S}{l - x_S} = 1$$

En simplifiant cette relation, il vient

$$y_S = \frac{x_S \cdot (l - x_S)}{l} \quad (54)$$

L'allure de la déformée de la poutre coïncide totalement avec celle de la ligne d'influence du moment fléchissant en S.

Résultat : La ligne d'influence du moment fléchissant dans une section quelconque S d'une poutre est égale à la déformée de cette poutre coupée en S et subissant en ce même point une rotation relative virtuelle unitaire pourvue que les 2 bouts en S aient la même ordonnée y_S .



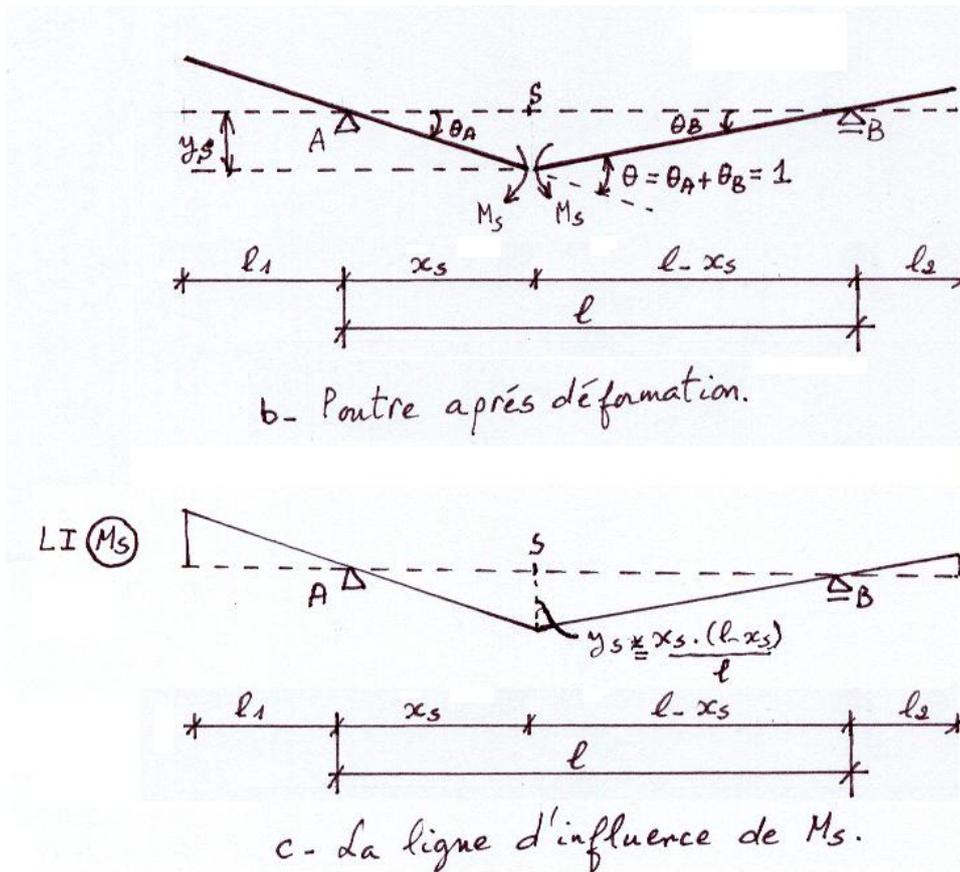


Fig. 38 Application du principe des travaux virtuels pour le traçage de la ligne d'influence du moment fléchissant dans une section S.

7 LES LIGNES D'INFLUENCE DANS UNE POUTRE CONTINUE

En déplaçant la charge unitaire le long de la poutre, on peut déterminer la réaction R ou l'effort tranchant T ou le moment fléchissant M dans une section S choisie dans la poutre. Pour cela, il suffit de calculer les moments fléchissant aux appuis intermédiaires en fonction de l'abscisse x de la charge unitaire. La méthode la plus adéquate est celle des 3 moments.

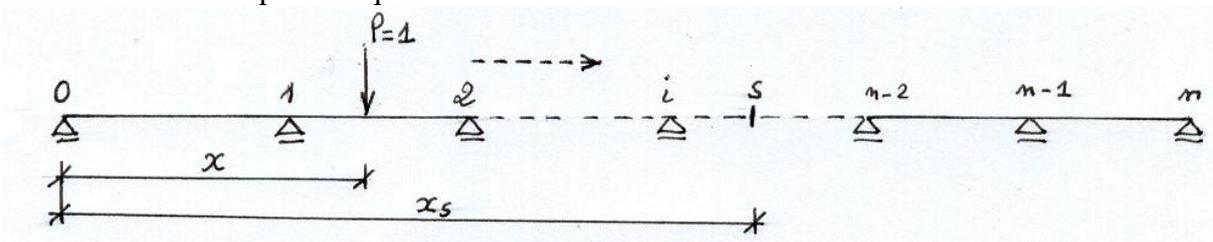


Fig. 39 Poutre continue soumise à une charge mobile $P=1$.

7-1 L'équation des 3 moments

La poutre continue de la figure 40 contient n travées et (n-1) appuis intermédiaires, chacun de ces appuis a un moment fléchissant inconnu, le système est donc (n-1) fois hyperstatique.

Pour calculer ces (n-1) inconnues M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , on utilise la méthode des 3 moments ou de Clapeyron, elle s'écrit dans sa forme générale pour l'appui i.

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \theta'_{i+1} - \theta''_i \quad (55)$$

Où θ_{i+1}' : Rotation de l'appui gauche de la travée (i+1) supposée isostatique.

θ_i'' : Rotation de l'appui droit de la travée (i) supposée isostatique.

Les rotations sont supposées positives dans le sens antihoraire. Le tableau 1 donne quelques valeurs de rotations les plus courantes.

a_i, b_i, c_i sont les coefficients de souplesse de la travée (i). Si cette travée garde une section constante, on aura

$$\left. \begin{aligned} a_i = c_i &= \frac{l_i}{3EI_i} \\ b_i &= \frac{l_i}{6EI_i} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

l_i : Longueur de la travée (i).

E : Module de déformation longitudinale du matériau utilisé.

I_i : Moment d'inertie en section de la travée (i).

Dans une poutre de section variable, le moment d'inertie de la travée i dépend de l'abscisse x de la section considérée, il sera noté $I_i(x)$. Les 3 constantes a_i, b_i, c_i se retrouvent à partir des intégrales suivantes :

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i(x)} \\ b_i &= \int_0^{l_i} \frac{x}{l_i} \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) \frac{dx}{EI_i(x)} \\ c_i &= \int_0^{l_i} \left(\frac{x}{l_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i(x)} \end{aligned} \right\} \quad (56')$$

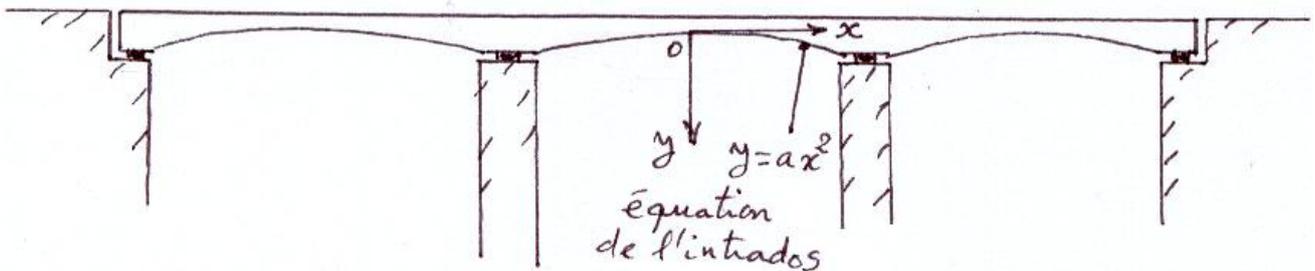


Fig. 39' Exemple d'une poutre continue à section variable.

Si la quantité EI est constante le long de la poutre continue, l'équation 55 devient

$$l_i M_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})M_i + l_{i+1} M_{i+1} = 6EI(\theta_{i+1}' - \theta_i'') \quad (57)$$

L'équation 57 peut s'écrire pour chaque nœud intermédiaire. On dispose donc de (n-1) équations, sachant que le nombre d'inconnues (M_i) est (n-1). Le système admet donc une solution.

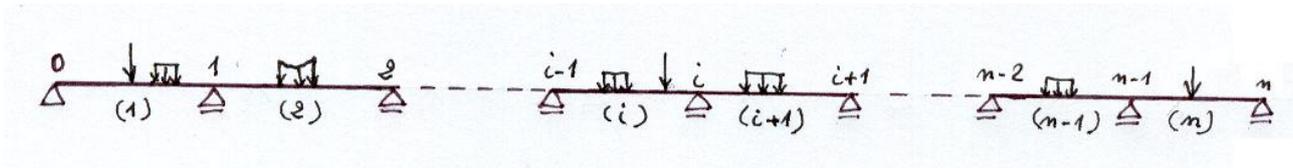


Fig. 40 Schéma statique d'une poutre continue à n travées.

Charges	Rotations
	$\theta' = \theta_A = -\frac{ql^3}{24EI}$ $\theta'' = \theta_B = \frac{ql^3}{24EI}$
	$\theta' = \theta_A = -\frac{Pa(l-a)(2l-a)}{6EIl}$ $\theta'' = \theta_B = \frac{Pa(l^2-a^2)}{6EIl}$
	$\theta' = \theta_A = -\frac{Pa(l-a)}{2EI}$ $\theta'' = \theta_B = \frac{Pa(l-a)}{2EI}$

Tab.1 Quelques valeurs de rotations les plus connues.

7-2 La réaction d'appui

Pour un appui donné, la réaction R_i est la somme de 2 réactions :

- 1- Réaction due à la continuité de la poutre, elle est notée R_i^C , elle dépend des moments fléchissants M_i se trouvant aux appuis intermédiaires. On a

$$R_i^C = R_{i_g}^C + R_{i_d}^C \quad (58)$$

Où $R_{i_g}^C$ et $R_{i_d}^C$ sont respectivement les réactions gauche et droite dues à la continuité de la poutre (fig. 41). En utilisant les relations d'équilibre des moments, on obtient

$$\left. \begin{aligned} R_{i_g}^C &= \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} \\ R_{i_d}^C &= \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

La réaction R_i^C due à la continuité aura la forme

$$R_i^C = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} \quad (60)$$

- 2- Réaction r_i due aux charges extérieures en supposant que toutes les travées sont indépendantes (système isostatique).

$$r_i = r_{ig} + r_{id} \quad (60')$$

r_{ig} et r_{id} sont les réactions gauche et droite dues aux charges extérieures en supposant que les travées de la poutre sont indépendantes.

La réaction totale R_i est donnée par l'expression.

$$R_i = R_i^C + r_i \quad (61)$$

En remplaçant la valeur de R_i^C dans cette expression, il vient

$$R_i = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} + r_i \quad (62)$$

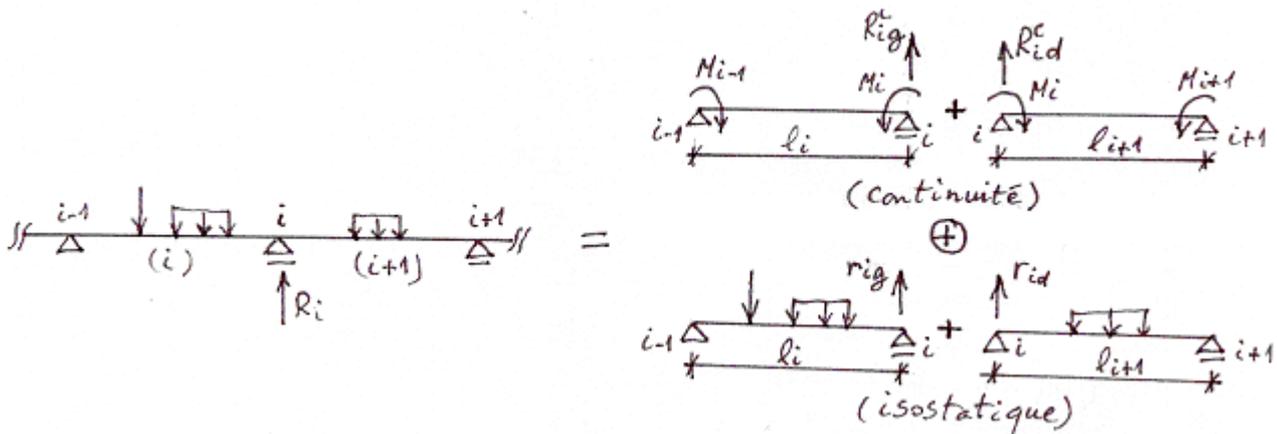


Fig. 41 Schéma des réactions de l'appui i.

7-3 Le moment fléchissant dans une section en travée

Le moment fléchissant dans une section de la travée (i-1, i) se décompose en 2 parties :

- 1- Moment fléchissant $M^C(x)$ du à la continuité de la poutre, il dépend des moments M_{i-1} et M_i aux appuis. D'après la figure 42, on a

$$M^C(x) = R_{(i-1)d}^C \cdot x + M_{i-1} \quad (63)$$

En remplaçant l'expression de $R_{(i-1)d}^C$ dans la relation 63, on obtiendra

$$M^C(x) = \frac{(M_i - M_{i-1})}{l_i} \cdot x + M_{i-1} \quad (64)$$

Ou bien

$$M^C(x) = M_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + \frac{M_i}{l_i} \cdot x \quad (65)$$

- 2- Moment fléchissant isostatique $m(x)$ du aux charges extérieures, en supposant que la travée i est indépendante.

Le moment fléchissant total sera donc

$$M(x) = M^c(x) + m(x) \quad (66)$$

En remplaçant la valeur de $M^c(x)$ dans cette relation, il vient

$$M(x) = M_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{l_i}\right) + \frac{M_i}{l_i} \cdot x + m(x) \quad (67)$$

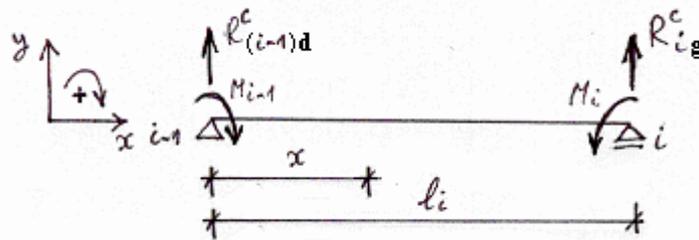


Fig. 42 Efforts dus à la continuité de la poutre dans la travée i .

7-4 L'effort tranchant dans une section en travée

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (68)$$

$$T(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i} + t(x) \quad (69)$$

Où $t(x)$ est l'effort tranchant isostatique du aux charges extérieures.

Exercice 12

Un pont mixte est constitué de poutres métalliques continues à 3 travées, de section transversale constante. On se propose de tracer les lignes d'influence de la réaction R_A et des moments fléchissants M_B et M_S où S est une section en travée située à 20 m par rapport à A .

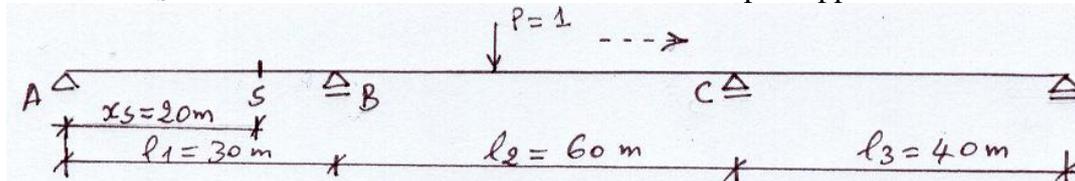


Fig. 43 Schéma de la poutre métallique continue.

Solution

1- La ligne d'influence du moment fléchissant M_B

Pour une position quelconque de la $P=1$, appliquons l'équation des 3 moments pour les nœuds B et C , il vient

Appui B :

$$l_1 \underbrace{M_A}_0 + 2(l_1 + l_2) M_B + l_2 M_C = 6 EI (\theta_2' - \theta_1'')$$

Soit $180 M_B + 60 M_C = 6 EI (\theta_2' - \theta_1'')$ (R1)

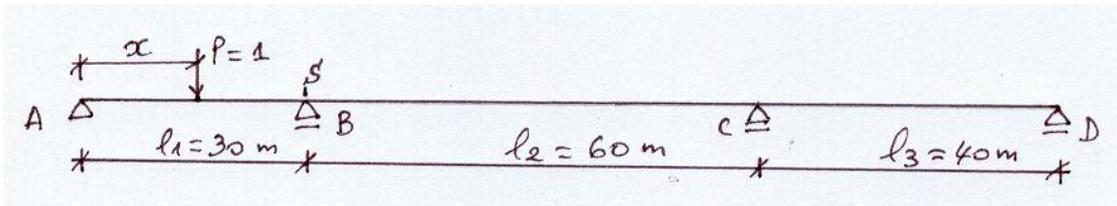
Appui C : $l_2 M_B + 2 (l_2 + l_3) M_C + l_3 \underbrace{M_D}_0 = 6 EI (\theta_3' - \theta_2'')$

Soit $60 M_B + 200 M_C = 6 EI (\theta_3' - \theta_2'')$ (R2)

$\left\{ (1) - \frac{3}{10} \times (2) \right\} \Leftrightarrow 162 M_B = 6 EI [(\theta_2' - \theta_1'') - 0.3 (\theta_3' - \theta_2'')]$

Soit $M_B = \frac{1}{27} EI [(\theta_2' - \theta_1'') - 0.3 (\theta_3' - \theta_2'')]$ (R3)

1^{er} cas : $0 \leq x \leq l_1$



En utilisant le tableau 1, on aura

$$\theta_1'' = \frac{x(l_1^2 - x^2)}{6 EI l_1}$$

Soit $\theta_1'' = \frac{x(900 - x^2)}{180 EI}$

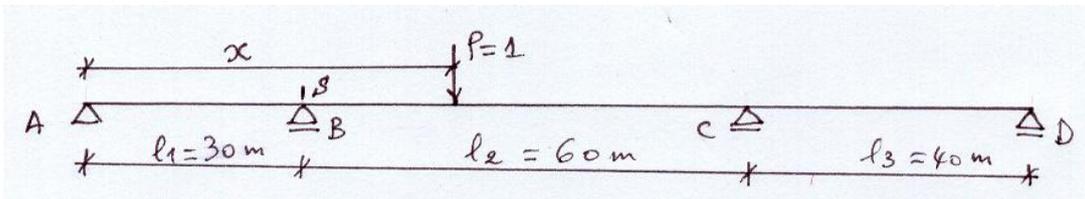
$\theta_2' = \theta_2'' = \theta_3' = 0$

En remplaçant les valeurs des θ dans l'équation R3, on obtient

$$M_B^{(1)} = \frac{1}{27} EI \left[-\frac{x(900 - x^2)}{180 EI} \right]$$

Soit $M_B^{(1)} = -\frac{x(900 - x^2)}{4860}$

2^e cas : $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$



En utilisant le tableau 1, on aura

$\theta_1'' = \theta_3' = 0$

$$\theta_2' = \frac{-(x - l_1) \cdot [l_2 - (x - l_1)] \cdot [2l_2 - (x - l_1)]}{6 EI l_2}$$

Soit

$$\theta_2' = \frac{-(x-30) \cdot (90-x) \cdot (150-x)}{360 EI}$$

$$\theta_2'' = 1 \cdot \frac{(x-l_1) \cdot [l_2^2 - (x-l_1)^2]}{6 EI l_2}$$

$$\theta_2'' = \frac{(x-30) \cdot [3600 - (x-30)^2]}{360 EI}$$

Soit après développement,

$$\theta_2'' = \frac{(x-30) \cdot (x+30) \cdot (90-x)}{360 EI}$$

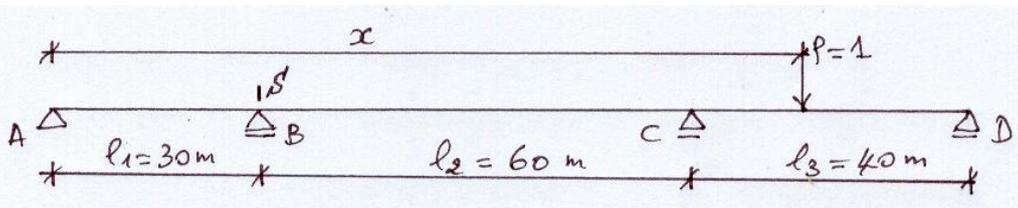
En remplaçant les valeurs des θ dans l'équation R3, on aura

$$M_B^{(2)} = \frac{1}{27} EI \left[\frac{-(x-30) \cdot (90-x) \cdot (150-x)}{360 EI} + 0.3 \times \frac{(x-30) \cdot (x+30) \cdot (90-x)}{360 EI} \right]$$

Soit

$$M_B^{(2)} = \frac{1}{9720} \cdot (x-30) \cdot (90-x) \cdot (1.3x-141)$$

3^e cas : $l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3$



En utilisant le tableau 1, on aura

$$\theta_1'' = \theta_2' = \theta_2'' = 0$$

$$\theta_3' = -1 \times \frac{[x - (l_1 + l_2)] \cdot [l_3 - (x - (l_1 + l_2))] \cdot [2l_3 - (x - (l_1 + l_2))]}{6 EI l_3}$$

$$\theta_3' = -1 \times \frac{-(x-90) \cdot [40 - (x-90)] \cdot [80 - (x-90)]}{240 EI}$$

Soit

$$\theta_3' = \frac{-(x-90) \cdot (130-x) \cdot (170-x)}{240 EI}$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation R3, on aura

$$M_B^{(3)} = \frac{1}{27} EI \times 0.3 \times \frac{(x-90) \cdot (130-x) \cdot (170-x)}{240 EI}$$

Soit

$$M_B^{(3)} = \frac{1}{21600} \cdot (x-90) \cdot (130-x) \cdot (170-x)$$

Pour chacun des 3 intervalles, on dessine la ligne d'influence de M_B .

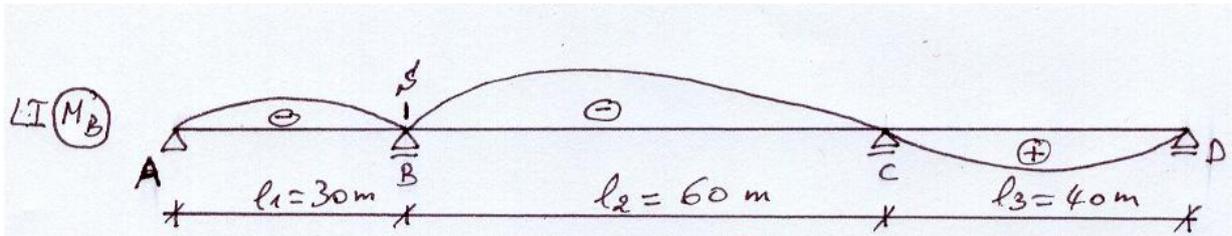


Fig. 44 Ligne d'influence de M_B .

2- La ligne d'influence de la réaction R_A

D'après la relation 62, on a

$$R_i = \frac{M_{i-1} - M_i}{l_i} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} + r_i$$

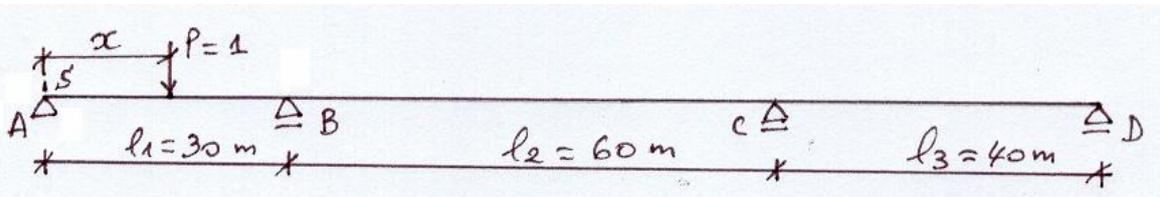
En appliquant cette équation pour le nœud A, on aura

$$R_A = \frac{M_{A-1} - M_A}{l_0} + \frac{M_B - M_A}{l_1} + r_A$$

Soit

$$R_A = \frac{M_B}{l_1} + r_A \quad (R4)$$

1^{er} cas : $0 \leq x \leq l_1$



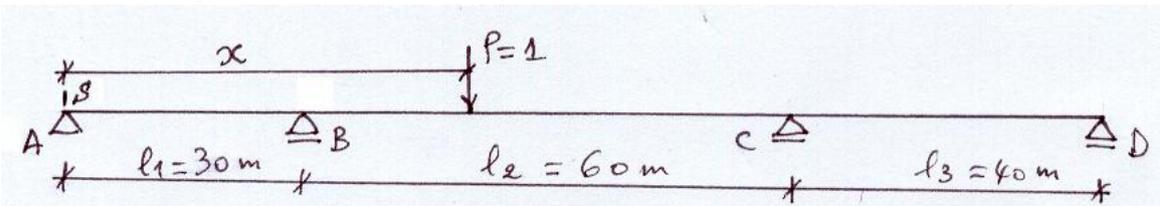
$$r_A = 1 - \frac{x}{l_1}$$

$$r_A = 1 - \frac{x}{30}$$

En remplaçant les valeurs de r_A et $M_B^{(1)}$ dans l'équation R4, il vient

$$R_A^{(1)} = \frac{M_B^{(1)}}{30} + 1 - \frac{x}{30}$$

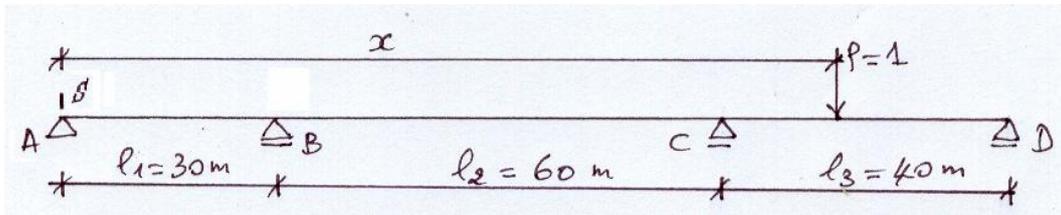
2^e cas : $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$



$$r_A = 0$$

$$R_A^{(2)} = \frac{M_B^{(2)}}{30}$$

3^e cas : $l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3$



$$r_A = 0$$

$$R_A^{(3)} = \frac{M_B^{(3)}}{30}$$

Pour chacune des 3 expressions de R_A , on dessine la ligne d'influence correspondante.

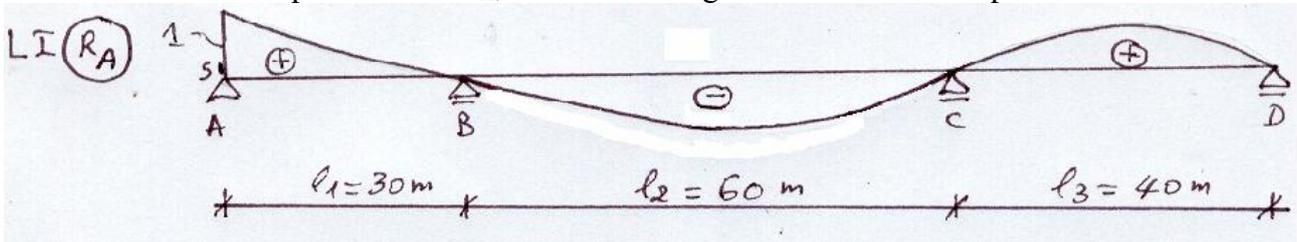
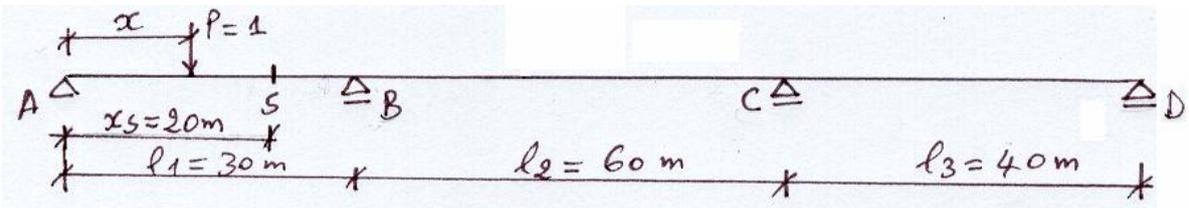


Fig. 45 Ligne d'influence de R_A .

3- La ligne d'influence du moment fléchissant M_S

1^{er} cas : $0 \leq x \leq x_s = 20 \text{ m}$

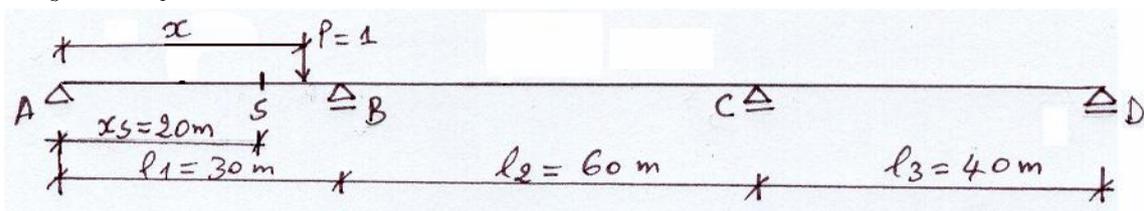


$$M_S^{(1)} = R_A^{(1)} \cdot x_s - 1 \cdot (x_s - x)$$

Soit

$$M_S^{(1)} = 20 \times R_A^{(1)} - (20 - x)$$

2^e cas : $x_s \leq x \leq l_1$

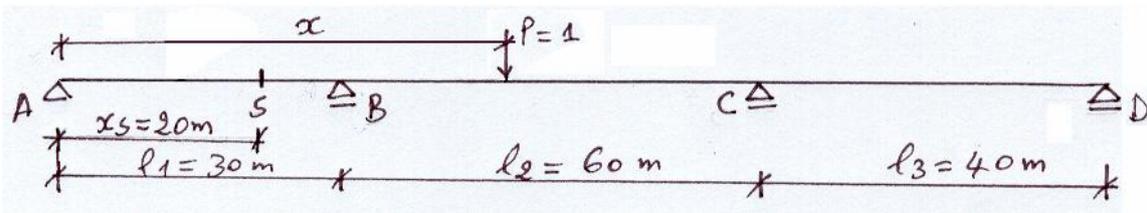


$$M_S^{(2)} = R_A^{(1)} \cdot x_s$$

Soit

$$M_S^{(2)} = 20 \times R_A^{(1)}$$

3^e cas : $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$

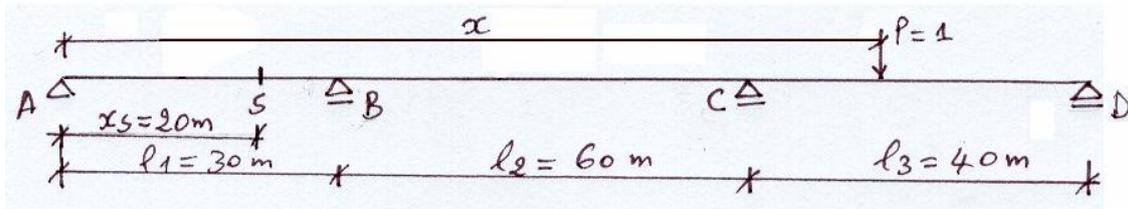


$$M_S^{(3)} = R_A^{(2)} \cdot x_S$$

Soit

$$M_S^{(3)} = 20 \times R_A^{(2)}$$

4^e cas : $l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3$



$$M_S^{(4)} = R_A^{(3)} \cdot x_S$$

Soit

$$M_S^{(4)} = 20 \times R_A^{(3)}$$

En utilisant ces 4 expressions, on peut dessiner la ligne d'influence de M_S .

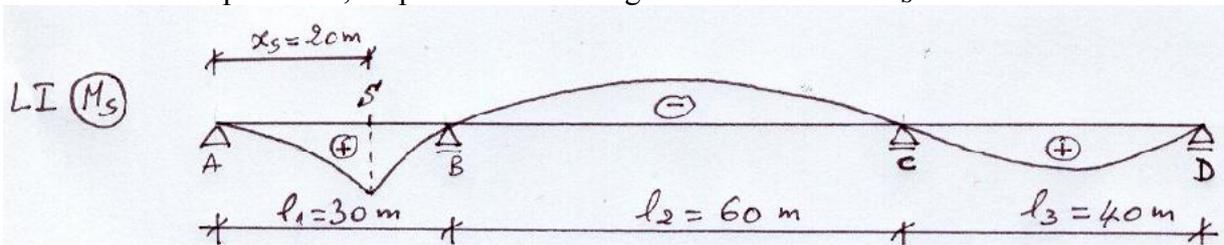


Fig. 46 Ligne d'influence de M_S .

8 LES LIGNES D'INFLUENCE DANS UNE POUTRE EN TREILLIS ISOSTATIQUE

8-1 Généralité

a) Treillis extérieurement isostatique

Les réactions d'appuis sont calculées en utilisant seulement les équations de la statique. Dans l'exemple de la figure 47, on a 3 inconnues V_A , H_A et V_B , mais le système est isostatique puisqu'on dispose des 3 équations

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum M^i / \text{point} &= 0 \end{aligned} \right\} (70)$$

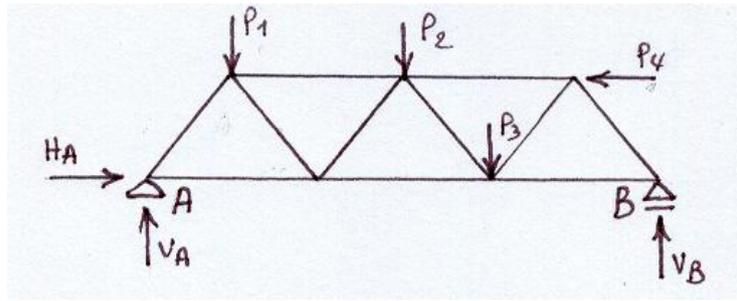


Fig. 47 Treillis extérieurement isostatique.

b) Treillis intérieurement isostatique

Ce système vérifie la relation

$$b = 2n - 3 \quad (71)$$

Où b est le nombre de barres.
n est le nombre de nœuds.

Dans l'exemple de la figure 47, on a : b = 11 et n = 7, on a bien

$$11 = 2 \times 7 - 3$$

Le système est donc intérieurement isostatique. Dans le cas contraire, on peut avoir

$$\left. \begin{array}{l} \text{Système instable : } b < 2n - 3 \\ \text{Système hyperstatique : } b > 2n - 3 \end{array} \right\} \quad (72)$$

Le système de la figure 48 est instable (mécanisme), b = 4 , n = 4.

$$b = 4 < 2n - 3 = 5$$

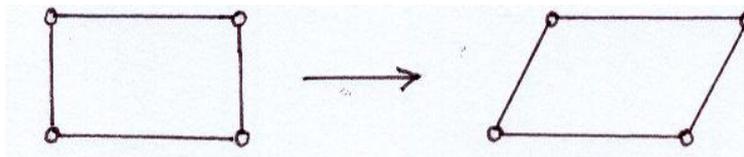


Fig. 48 Mécanisme d'un cadre articulé en ses 4 sommets.

Le système de la figure 49 est extérieurement isostatique, mais intérieurement, il est hyperstatique.

$$b = 11 > 2n - 3 = 9$$

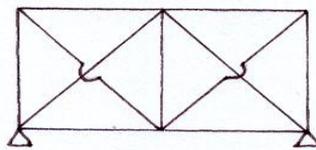


Fig. 49 Système extérieurement isostatique et intérieurement hyperstatique.

La figure 50 montre un système intérieurement isostatique mais extérieurement hyperstatique.

$$b = 15 = 2n - 3 = 15$$

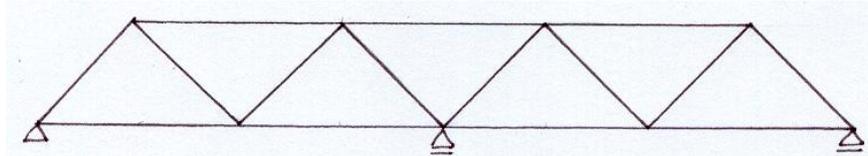


Fig. 50 Système extérieurement hyperstatique et intérieurement isostatique.

8-2 Calcul des efforts

Dans les ponts à poutres en treillis, les charges sont transmises de l'hourdis vers les traverses qui reposent directement sur les nœuds du treillis. Dans l'exemple de la figure 51, les charges sont transmises de l'hourdis vers les traverses ensuite vers les nœuds A, B, C, D et E. A titre d'exemple, la charge P_3 est transmise aux nœuds C et D sous forme de réactions r_1 et r_2 (fig. 52).

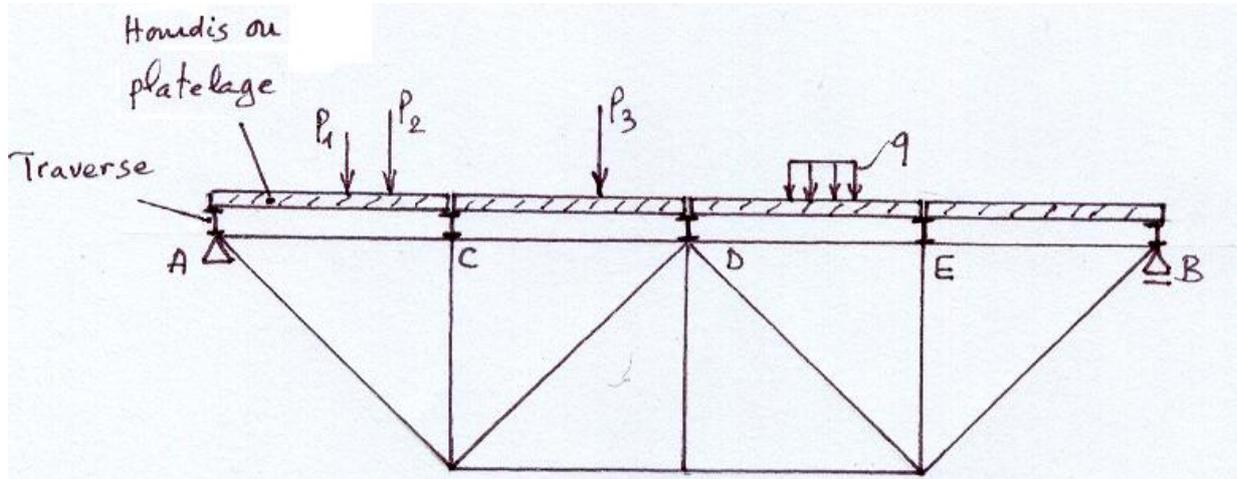


Fig. 51 Transmission des charges vers les nœuds d'une poutre en treillis.

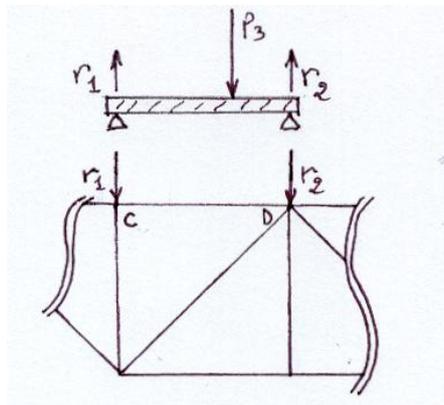


Fig. 52 Les charges sont transmises aux nœuds du treillis sous forme de réactions.

Exercice 13

Un pont route est constitué de poutres latérales en treillis. Chacune est supposée reprendre la charge d'un camion Bc.

Calculer les efforts normaux dans les barres sous l'effet du camion Bc positionné selon la figure 53.

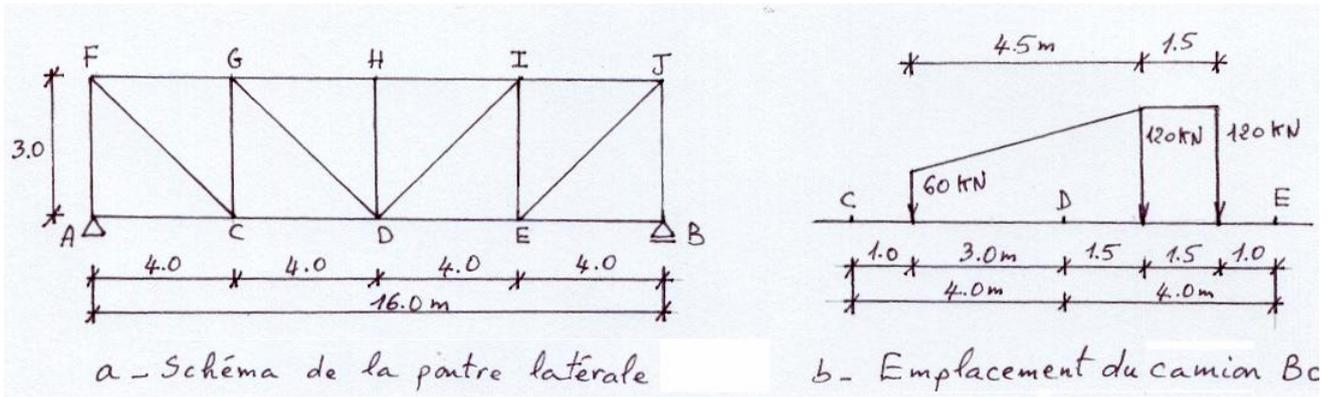


Fig. 53 Pont isostatique à poutres latérales soumis à un chargement Bc.

Solution

Calculons en premier lieu les charges transmises aux nœuds C, D et E.

$$\sum M'_{/D} = 0 \Rightarrow R_C \times 4 - 60 \times 3 = 0$$

$$R_C = 45 \text{ KN}$$

$$\sum M'_{/C} = 0 \Rightarrow 60 \times 1 - R_D \times 4 = 0$$

$$R_D = 15 \text{ KN}$$

$$\sum M'_{/E} = 0 \Rightarrow R_D \times 4 - 120 \times 2.5 - 120 \times 1 = 0$$

$$R_D = 105 \text{ KN}$$

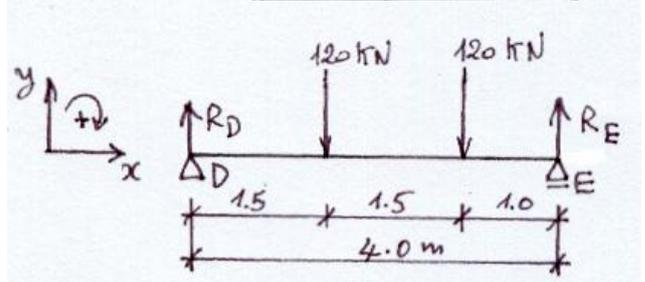
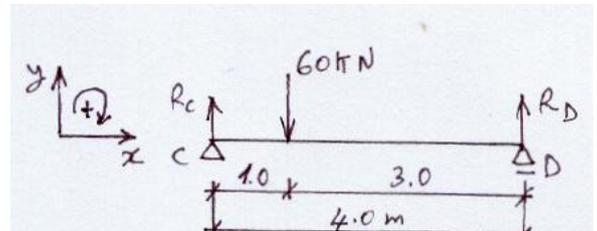
$$\sum M'_{/D} = 0 \Rightarrow 12 \times 1.5 + 12 \times 3 - R_E \times 4 = 0$$

$$R_E = 135 \text{ KN}$$

Au total : $R_D = 15 + 105 = 120 \text{ KN}$

$$R_C = 45 \text{ KN}$$

$$R_E = 135 \text{ KN}$$



Le système sera ainsi chargé selon la figure ci-dessous.

On a $b = 17$ et $n = 10$

On vérifie bien que $b = 2n - 3 = 17$

Le système est donc intérieurement et extérieurement isostatique.

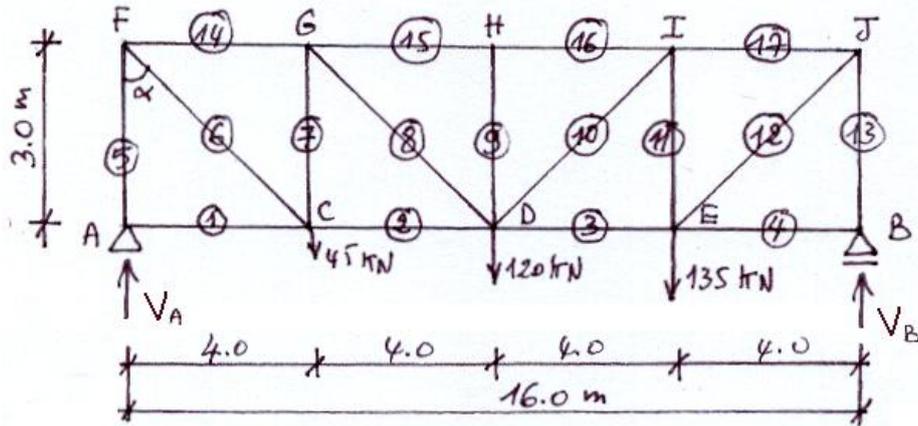
D'après le schéma ci-dessous, on a la longueur de la diagonale

$$l = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} = 0.6$$

et

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$



$$\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow V_A \times 16 - 45 \times 12 - 120 \times 8 - 135 \times 4 = 0$$

$$V_A = 127.5 \text{ KN}$$

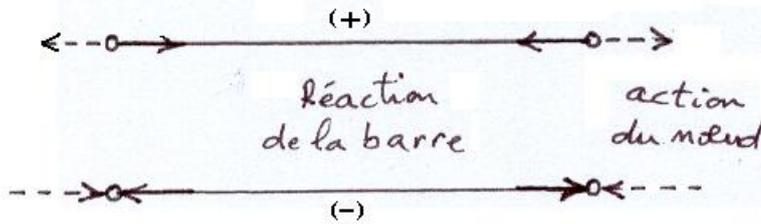
$$\sum M'_{/A} = 0 \Rightarrow 45 \times 4 + 120 \times 8 + 135 \times 12 - V_B \times 16 = 0$$

$$V_B = 172.5 \text{ KN}$$

Utilisons la méthode des nœuds :

Règle générale :

- Si la barre tire sur ses nœuds ; elle est tendue ($F > 0$).
- Si la barre pousse sur ses nœuds ; elle est comprimée ($F < 0$).

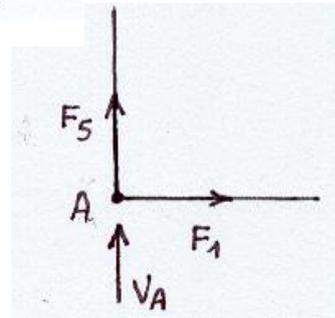


Nœud A :

$$\sum X = 0 \Rightarrow F_1 = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + F_5 = 0$$

$$F_5 = -V_A \Rightarrow F_5 = -127.5 \text{ KN} \text{ (Compression).}$$

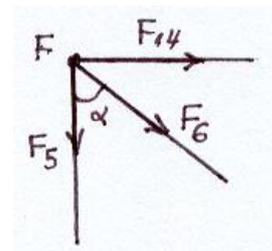


Nœud F :

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -F_5 - F_6 \cos \alpha = 0$$

$$F_6 = \frac{-F_5}{\cos \alpha}$$

$$F_6 = \frac{127.5}{0.6} \Rightarrow F_6 = 212.5 \text{ KN} \text{ (Traction).}$$



$$\sum X = 0 \Rightarrow F_6 \sin \alpha + F_{14} = 0$$

$$F_{14} = -F_6 \sin \alpha$$

$$F_{14} = -212.5 \times 0.8 \Rightarrow F_{14} = -170 \text{ KN}$$

Nœud C :

$$\sum X = 0 \Rightarrow F_2 - F_1 - F_6 \sin \alpha = 0$$

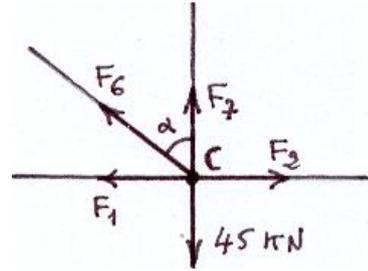
$$F_2 = F_6 \sin \alpha$$

$$F_2 = 212.5 \times 0.8 \Rightarrow \boxed{F_2 = 170 \text{ KN}}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow F_7 + F_6 \cos \alpha - 45 = 0$$

$$F_7 = -F_6 \cos \alpha + 45$$

$$F_7 = -212.5 \times 0.6 + 45 \Rightarrow \boxed{F_7 = -82.5 \text{ KN}}$$



Nœud G :

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -F_7 - F_8 \cos \alpha = 0$$

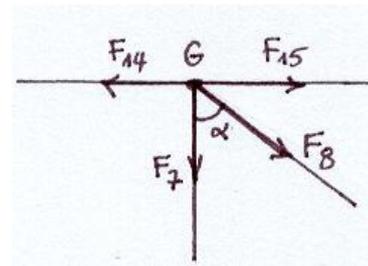
$$F_8 = \frac{-F_7}{\cos \alpha}$$

$$F_8 = \frac{82.5}{0.6} \Rightarrow \boxed{F_8 = 137.5 \text{ KN}}$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow F_{15} + F_8 \sin \alpha - F_{14} = 0$$

$$F_{15} = -F_8 \sin \alpha + F_{14}$$

$$F_{15} = -137.5 \times 0.8 - 170 \Rightarrow \boxed{F_{15} = -280 \text{ KN}}$$



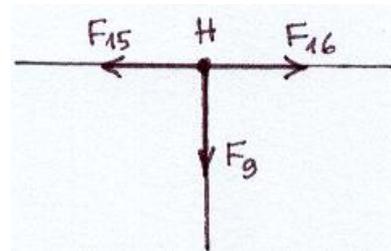
Nœud H :

$$\sum X = 0 \Rightarrow F_{16} - F_{15} = 0$$

$$F_{16} = F_{15} \Rightarrow \boxed{F_{16} = -280 \text{ KN}}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -F_9 = 0$$

$$\boxed{F_9 = 0}$$



Pour le reste des efforts, comme on a la possibilité de continuer avec la méthode des nœuds, on peut aussi faire usage de la méthode des sections. On représente les forces extérieures du tronçon choisi soit à droite soit à gauche de la section, seuls les efforts internes en contact avec la section sont représentés.

Section β - β :

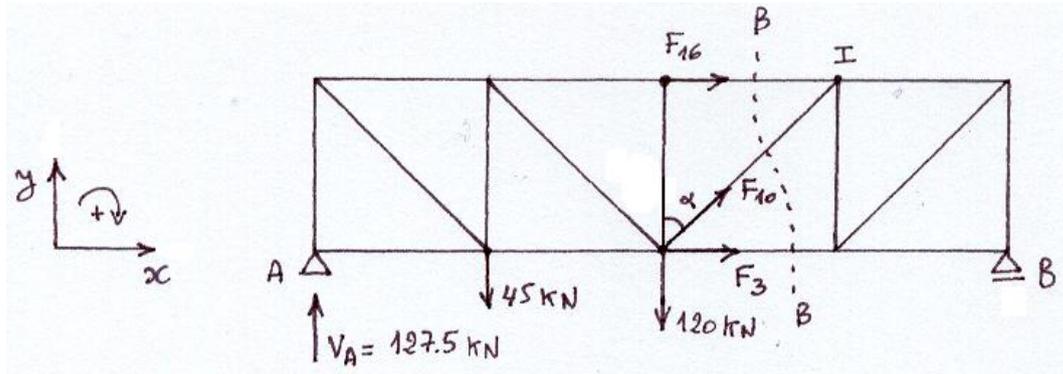
$$\sum Y = 0 \Rightarrow F_{10} \cos \alpha + 127.5 - 45 - 120 = 0$$

$$\boxed{F_{10} = 62.5 \text{ KN}}$$

$$\sum M'_{/I} = 0 \Rightarrow V_A \times 12 - 45 \times 8 - 120 \times 4 - F_3 \times 3 = 0$$

$$\boxed{F_3 = 230 \text{ KN}}$$

L'effort F_3 peut être calculé à partir de l'équilibre : $\sum X = 0$



Section $\gamma\text{-}\gamma$:

$$\sum Y = 0 \Rightarrow F_{11} + V_B - 135 = 0$$

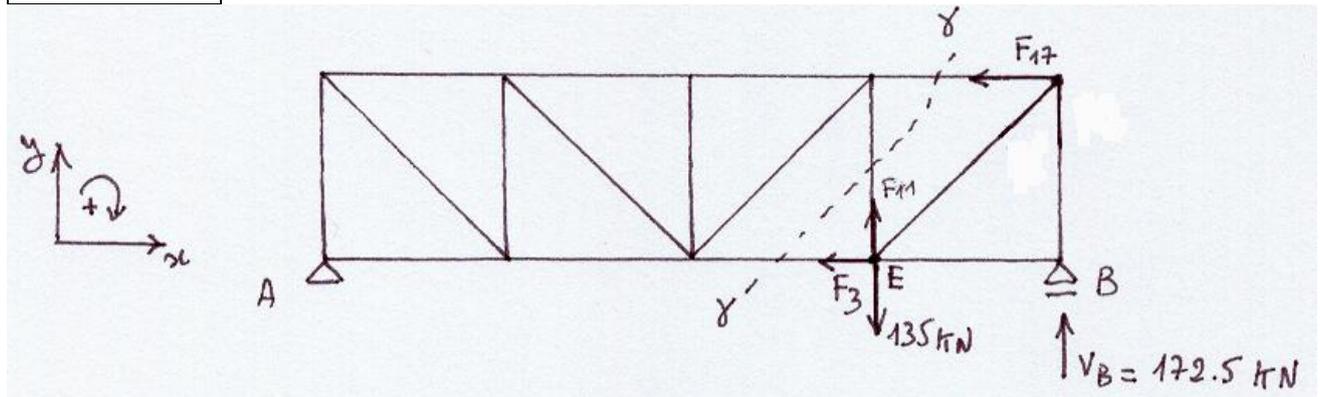
$$F_{11} = -37.5 \text{ KN}$$

$$\sum M'_{/E} = 0 \Rightarrow -F_{17} \times 3 - V_B \times 4 = 0$$

$$F_{17} = -230 \text{ KN}$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow -F_3 - F_{17} = 0$$

$$F_3 = 230 \text{ KN}$$



Section $\delta\text{-}\delta$:

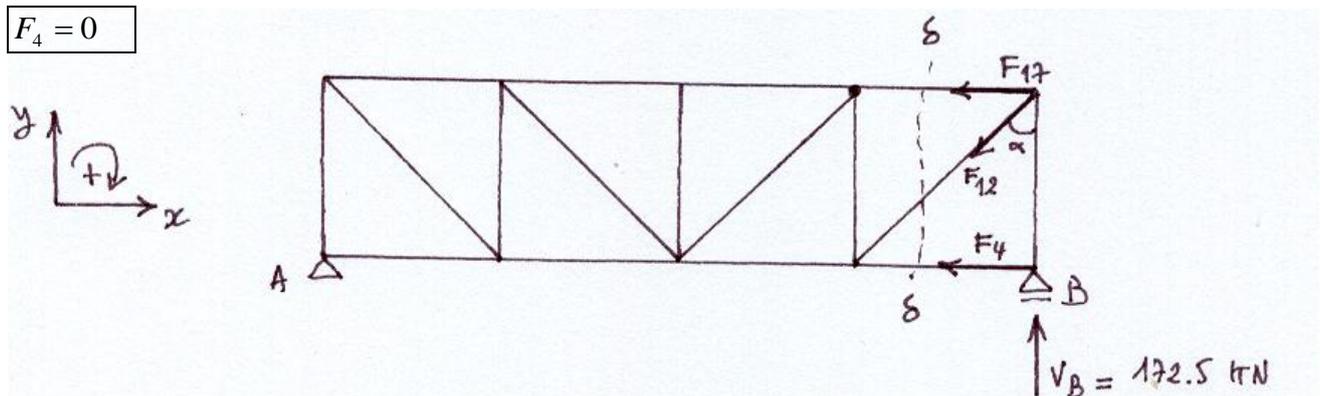
$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_B - F_{12} \times \cos \alpha = 0$$

$$F_{12} = 287.5 \text{ KN}$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow -F_{17} - F_{12} \sin \alpha - F_4 = 0$$

$$F_4 = -F_{17} - F_{12} \sin \alpha \Rightarrow F_4 = 230 - 287.5 \times 0.8 = 0$$

$$F_4 = 0$$

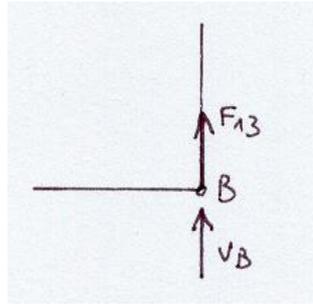


Nœud H :

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_B + F_{13} = 0$$

$$F_{13} = -V_B$$

$$F_{13} = -172.5 \text{ KN}$$



L'ensemble des efforts internes et externes est représenté dans la figure 54.

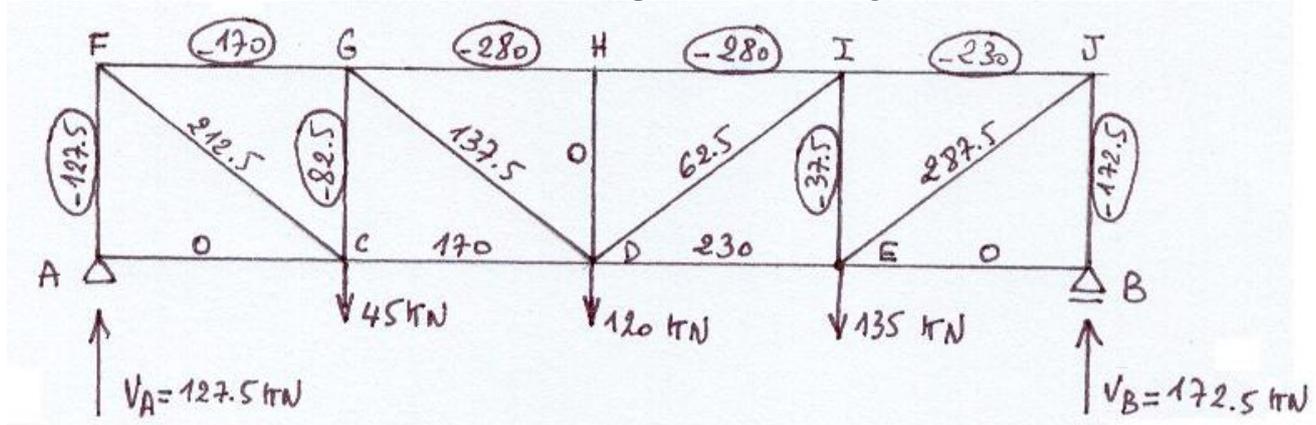


Fig. 54 Efforts internes et externes dans une poutre en treillis sous l'effet d'un camion Bc.

8-3 Lignes d'influence

Dans une section S donnée appartenant à une poutre en treillis, on se propose de calculer les efforts normaux extrêmes dus au passage d'un convoi quelconque. Pour cela on doit charger la poutre par une force unitaire mobile ; d'abscisse x variable, on obtiendra ainsi la ligne d'influence qu'on chargera par la suite par notre convoi réel pour aboutir à l'effort recherché. La ligne d'influence est souvent tracée en utilisant la méthode des sections.

Exercice 14

- 1- Tracer la ligne d'influence de l'effort normal dans les sections de barres marquées qui appartiennent à une poutre en treillis représentée dans la figure 55.
- 2- Calculer les efforts normaux extrêmes dans ces sections dues au passage d'un camion Bc.

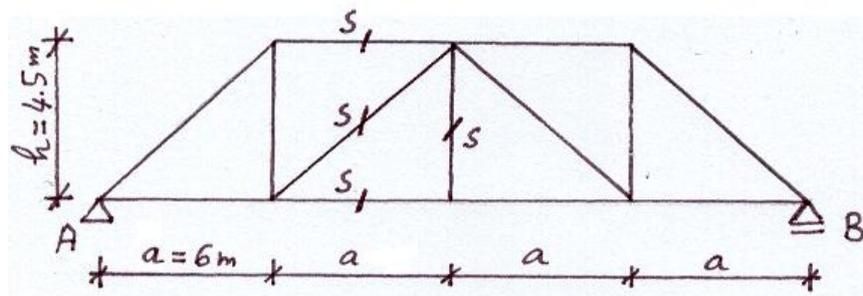


Fig. 55 Poutre latérale en treillis, supposée supporter la charge d'un camion Bc.

Solution

1- On a $b = 13$ et $n = 8$

On vérifie bien que $b = 2n - 3 = 13$

Le système est donc intérieurement et extérieurement isostatique.

La longueur de la diagonale

$$l = \sqrt{6^2 + 4.5^2} = 7.5 \text{ m}$$

$$\cos \alpha = \frac{4.5}{7.5} = 0.6$$

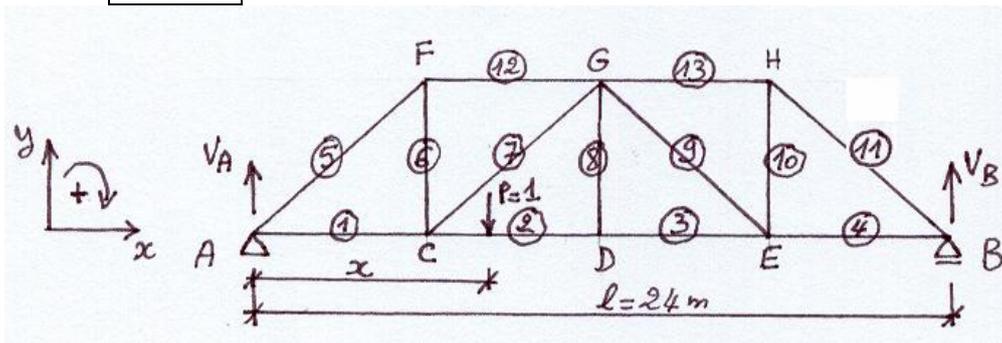
$$\sin \alpha = \frac{6}{7.5} = 0.8$$

Sous l'effet de la charge unitaire, les réactions d'appuis seront

$$\sum M'_{/B} = 0 \Rightarrow V_A \cdot l - 1 \cdot (l - x) = 0 \Rightarrow \boxed{V_A = 1 - \frac{x}{l}}$$

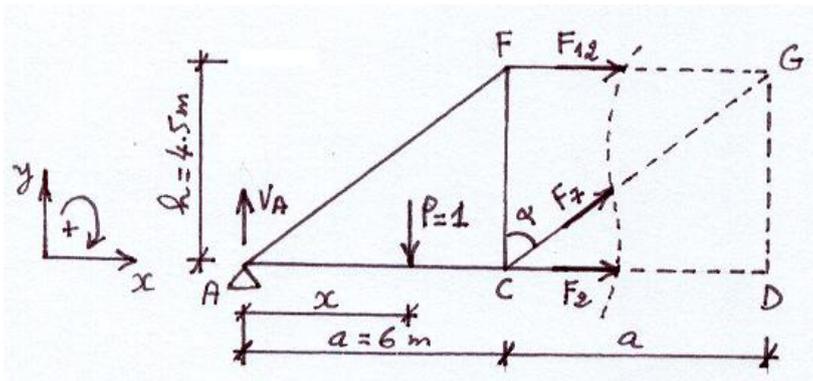
$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - 1 = 0$$

$$V_B = 1 - V_A \Rightarrow \boxed{V_B = \frac{x}{l}}$$



Ligne d'influence de F_2 :

1^{er} cas : $0 \leq x \leq a$



$$\sum M'_{/G} = 0 \Rightarrow V_A \cdot 2a - 1 \cdot (2a - x) - F_2 \cdot h = 0$$

$$F_2 = \frac{\left(1 - \frac{x}{24}\right) \times 12 - (12 - x)}{4.5} \Rightarrow \boxed{F_2 = \frac{x}{9}}$$

$$x=0 \Rightarrow F_2=0$$

$$x=a=6 \Rightarrow F_2=\frac{2}{3}$$

2° cas : $a \leq x \leq 2a$

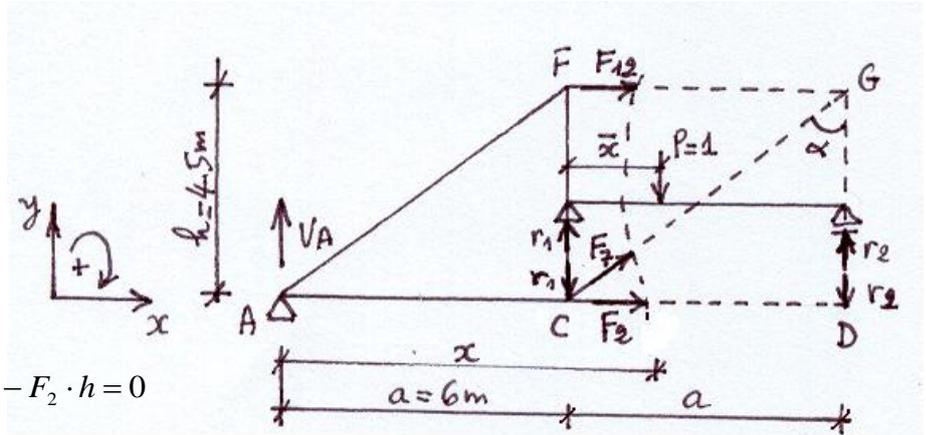
$$r_1 = 1 - \frac{\bar{x}}{a}$$

$$r_2 = \frac{\bar{x}}{a}$$

Avec $\bar{x} = x - a$

$$\sum M'_{/G} = 0 \Rightarrow V_A \cdot 2a - r_1 \cdot a - F_2 \cdot h = 0$$

$$F_2 = \frac{V_A \cdot 2a - r_1 \cdot a}{h} \Rightarrow F_2 = \frac{\left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot 2a - \left(1 - \frac{(x-a)}{a}\right) \cdot a}{h}$$



En remplaçant les valeurs de l, a et h , on obtient

$$F_2 = \frac{x}{9}$$

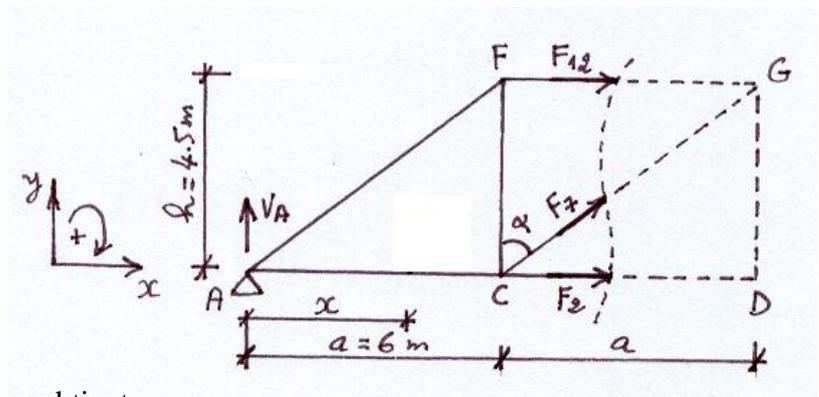
$$x=a=6 \Rightarrow F_2=\frac{2}{3}$$

$$x=2a=12 \Rightarrow F_2=\frac{4}{3}$$

3° cas : $2a \leq x \leq 4a$

$$\sum M'_{/G} = 0 \Rightarrow V_A \cdot 2a - F_2 \cdot h = 0$$

$$F_2 = \frac{V_A \cdot 2a}{h} \Rightarrow F_2 = \frac{\left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot 2a}{h}$$



En remplaçant les valeurs de l, a et h , on obtient

$$F_2 = \frac{8}{3} - \frac{x}{9}$$

$$x=2a=12 \Rightarrow F_2=\frac{4}{3}$$

$$x=3a=18 \Rightarrow F_2=\frac{2}{3}$$

$$x=4a=24 \Rightarrow F_2=0$$

En ayant ces fonctions, la ligne d'influence de F_2 peut être tracée

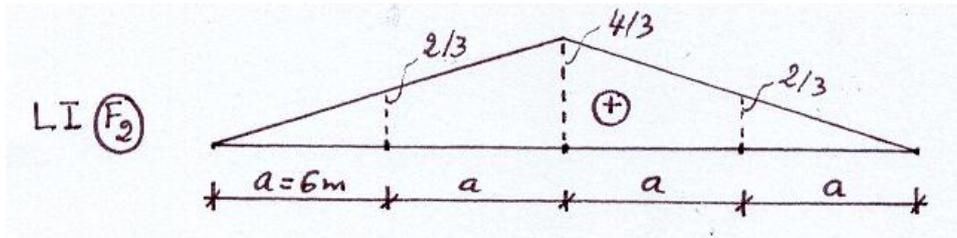


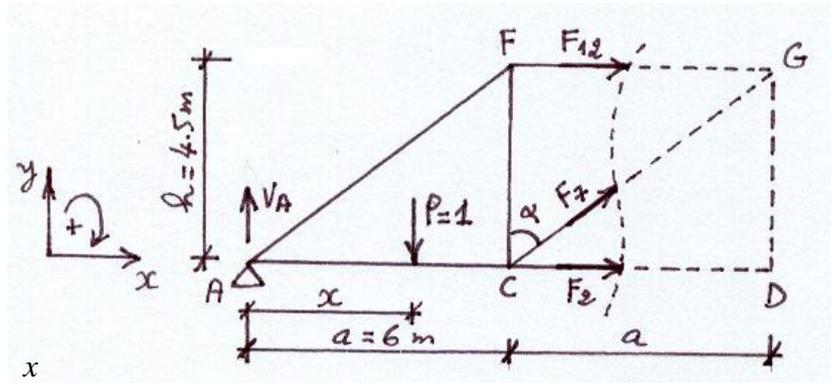
Fig. 56 La ligne d'influence de F_2 .

Ligne d'influence de F_7 :

1^{er} cas : $0 \leq x \leq a$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + F_7 \cdot \cos \alpha - 1 = 0$$

$$F_7 = \frac{1 - V_A}{\cos \alpha} \Rightarrow F_7 = \frac{1 - \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\cos \alpha} = \frac{x}{l \cdot \cos \alpha}$$



En remplaçant l et $\cos \alpha$ par leurs valeurs, on aura

$$F_7 = \frac{x}{14.4}$$

Ou bien $F_7 = \frac{5x}{72}$

$$x = 0 \Rightarrow F_7 = 0$$

$$x = a = 6 \Rightarrow F_7 = \frac{5}{12}$$

2^e cas : $a \leq x \leq 2a$

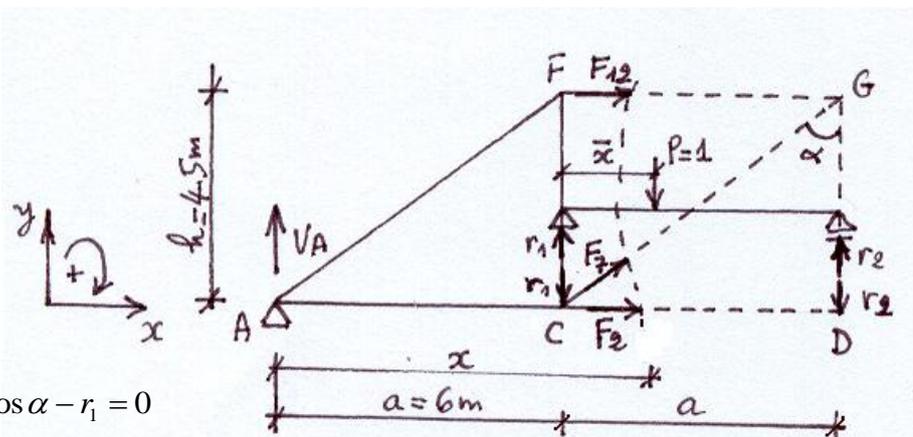
$$r_1 = 1 - \frac{\bar{x}}{a}$$

$$r_2 = \frac{\bar{x}}{a}$$

Avec $\bar{x} = x - a$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + F_7 \cdot \cos \alpha - r_1 = 0$$

$$F_2 = \frac{r_1 - V_A}{\cos \alpha} \Rightarrow F_2 = \frac{1 - \left(\frac{x-a}{a}\right) - \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\cos \alpha}$$



En remplaçant les valeurs de l, a et $\cos \alpha$, on obtient

$$F_7 = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{x}{8} \right)$$

$$x = a = 6 \Rightarrow F_7 = \frac{5}{12}$$

$$x = 2a = 12 \Rightarrow F_7 = -\frac{5}{6}$$

$$F_7 = 0 \Rightarrow x = 8$$

3^e cas : $2a \leq x \leq 4a$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + F_7 \cdot \cos \alpha = 0$$

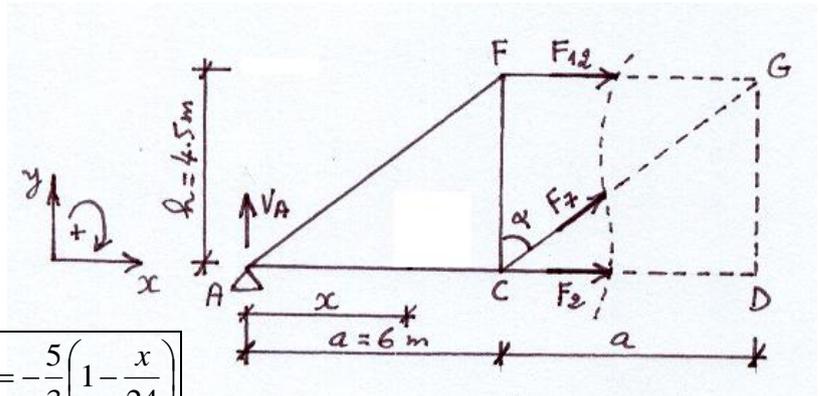
$$F_7 = -\frac{V_A}{\cos \alpha} \Rightarrow F_7 = \frac{-\left(1 - \frac{x}{l}\right)}{0.6}$$

$$F_7 = -\frac{5}{3} \left(1 - \frac{x}{24} \right)$$

$$x = 2a = 12 \Rightarrow F_7 = -\frac{5}{6}$$

$$x = 3a = 18 \Rightarrow F_7 = -\frac{5}{12}$$

$$x = 4a = 24 \Rightarrow F_7 = 0$$



La ligne d'influence de F_7 peut être tracée selon la figure 57.

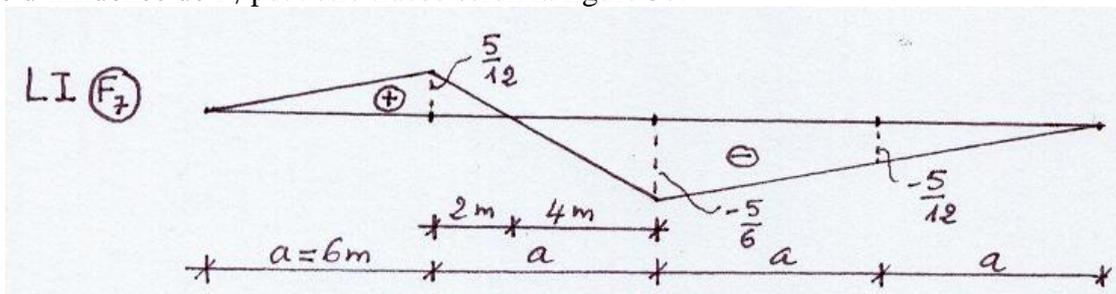


Fig. 57 La ligne d'influence de F_7 .

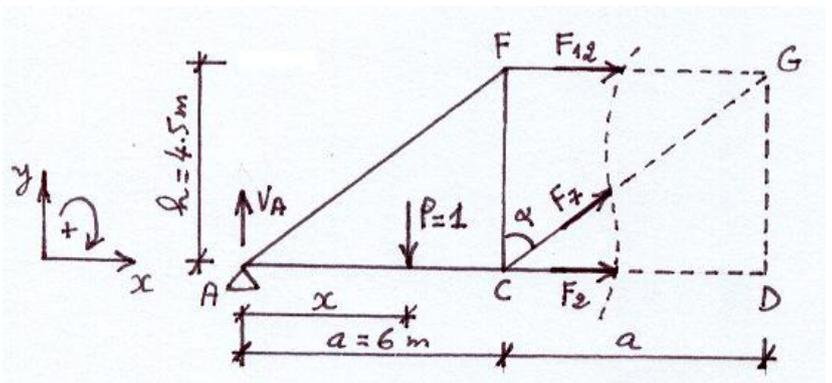
Ligne d'influence de F_{12} :

1^{er} cas : $0 \leq x \leq a$

$$\sum X = 0 \Rightarrow F_2 + F_7 \cdot \sin \alpha + F_{12} = 0$$

$$F_{12} = -F_2 - F_7 \cdot \sin \alpha$$

$$F_{12} = -\frac{x}{9} - \frac{5x}{72} \times 0.8 \Rightarrow F_{12} = -\frac{x}{6}$$



$x=0 \Rightarrow F_{12} = 0$
 $x=a=6 \Rightarrow F_{12} = -1$

2^e cas : $a \leq x \leq 2a$

$F_{12} = -F_2 - F_7 \cdot \sin \alpha$

$F_{12} = -\frac{x}{9} - \frac{5}{3} \left(1 - \frac{x}{8}\right) \times 0.8 \Rightarrow F_{12} = \frac{x}{8} - \frac{4}{3}$

$x=a=6 \Rightarrow F_{12} = -1$

$x=2a=12 \Rightarrow F_{12} = -\frac{2}{3}$

3^e cas : $2a \leq x \leq 4a$

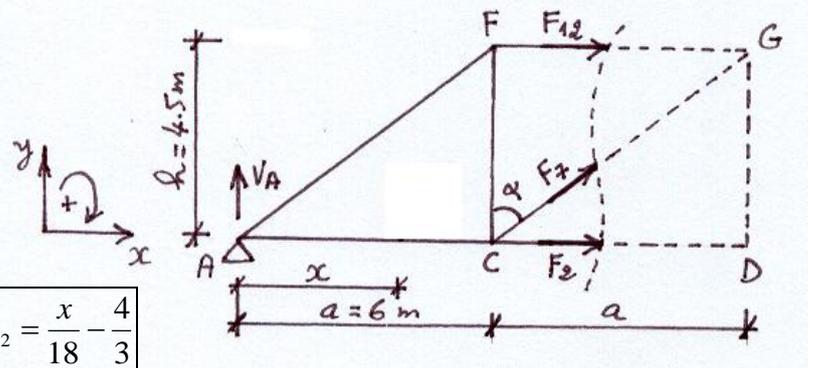
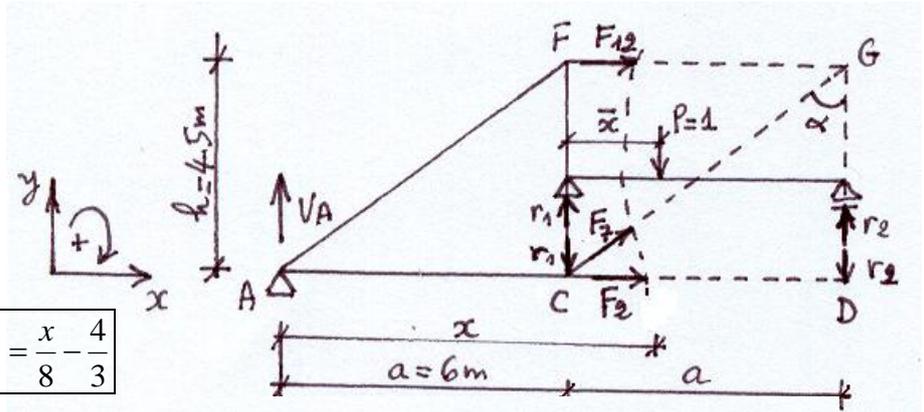
$F_{12} = -F_2 - F_7 \cdot \sin \alpha$

$F_{12} = \frac{x}{9} - \frac{8}{3} + \frac{5}{3} \left(1 - \frac{x}{24}\right) \times 0.8 \Rightarrow F_{12} = \frac{x}{18} - \frac{4}{3}$

$x=2a=12 \Rightarrow F_{12} = -\frac{2}{3}$

$x=3a=18 \Rightarrow F_{12} = -\frac{1}{3}$

$x=4a=24 \Rightarrow F_{12} = 0$



La ligne d'influence de F_{12} est représentée dans la figure 58.

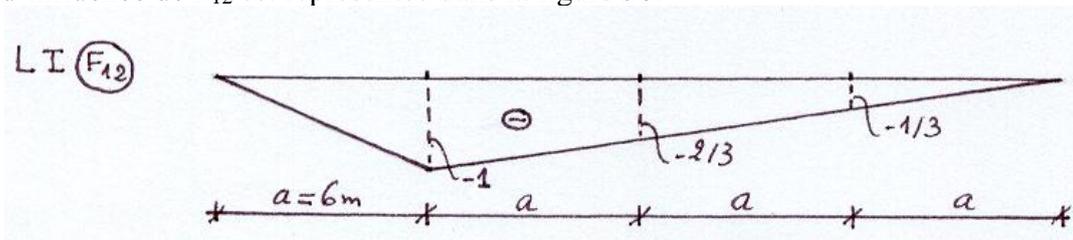
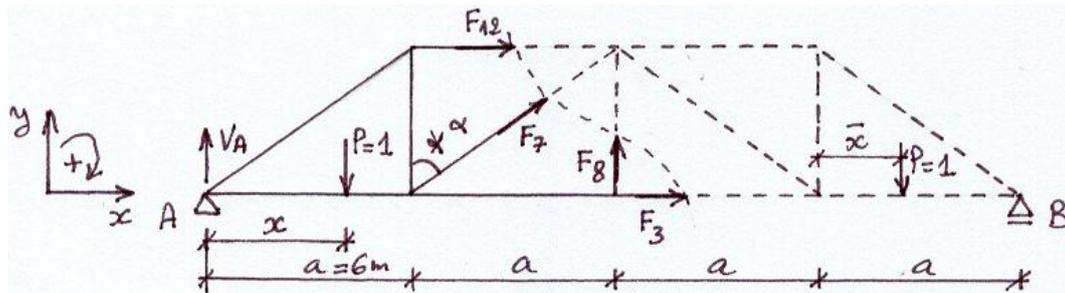


Fig. 58 La ligne d'influence de F_{12} .

Ligne d'influence de F_8 :

1^{er} cas : $0 \leq x \leq 2a$



$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + F_7 \cdot \cos \alpha + F_8 - 1 = 0$$

$$F_8 = 1 - V_A - F_7 \cdot \cos \alpha$$

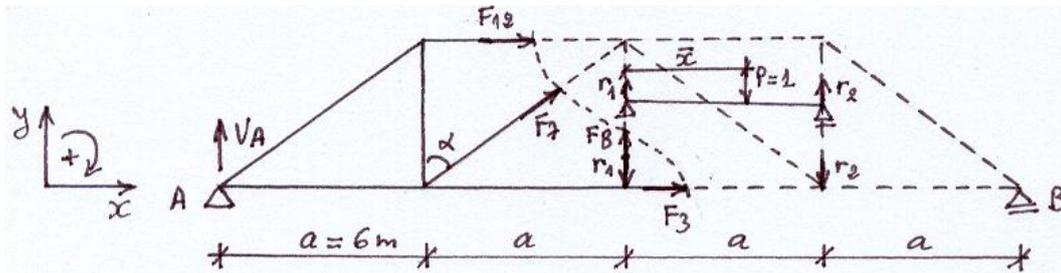
$$0 \leq x \leq a : F_8 = 1 - \left(1 - \frac{x}{24}\right) - \frac{5x}{72} \times 0.6 \Rightarrow \boxed{F_8 = 0}$$

$$a \leq x \leq 2a : F_8 = 1 - \left(1 - \frac{x}{24}\right) - \frac{5}{3} \times \left(1 - \frac{x}{8}\right) \times 0.6 \Rightarrow \boxed{F_8 = \frac{x}{6} - 1}$$

$$x = a = 6 \Rightarrow F_8 = 0$$

$$x = 2a = 12 \Rightarrow F_8 = 1$$

2^e cas : $2a \leq x \leq 3a$



$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + F_7 \cdot \cos \alpha + F_8 - r_1 = 0$$

$$F_8 = r_1 - V_A - F_7 \cdot \cos \alpha$$

On a

$$r_1 = 1 - \frac{\bar{x}}{a}$$

$$r_2 = \frac{\bar{x}}{a}$$

Avec $\bar{x} = x - 2a$

$$r_1 = 1 - \frac{(x - 2a)}{a} \Rightarrow \boxed{r_1 = 3 - \frac{x}{a}}$$

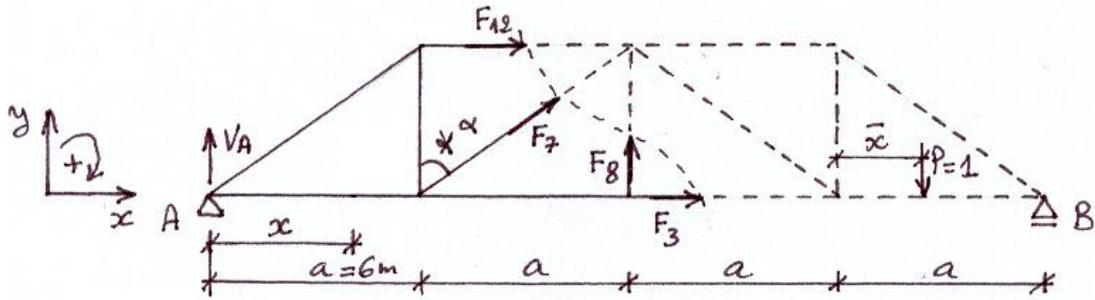
En remplaçant les expressions de r_1 , V_A et F_7 dans celle de F_8 , on aura

$$F_8 = 3 - \frac{x}{6} - \left(1 - \frac{x}{24}\right) + \frac{5}{3} \left(1 - \frac{x}{24}\right) \times 0.6 \Rightarrow \boxed{F_8 = 3 - \frac{x}{6}}$$

$$x = 2a = 12 \Rightarrow F_8 = 1$$

$$x = 3a = 18 \Rightarrow F_8 = 0$$

3^e cas : $3a \leq x \leq 4a$



$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + F_7 \cdot \cos \alpha + F_8 = 0$$

$$F_8 = -V_A - F_7 \cdot \cos \alpha$$

$$F_8 = -\left(1 - \frac{x}{24}\right) + \frac{5}{3} \left(1 - \frac{x}{24}\right) \times 0.6 = 0 \Rightarrow \boxed{F_8 = 0}$$

La ligne d'influence de F_8 est représentée dans la figure 59.

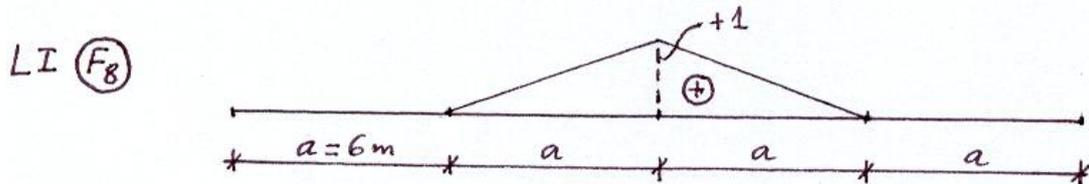


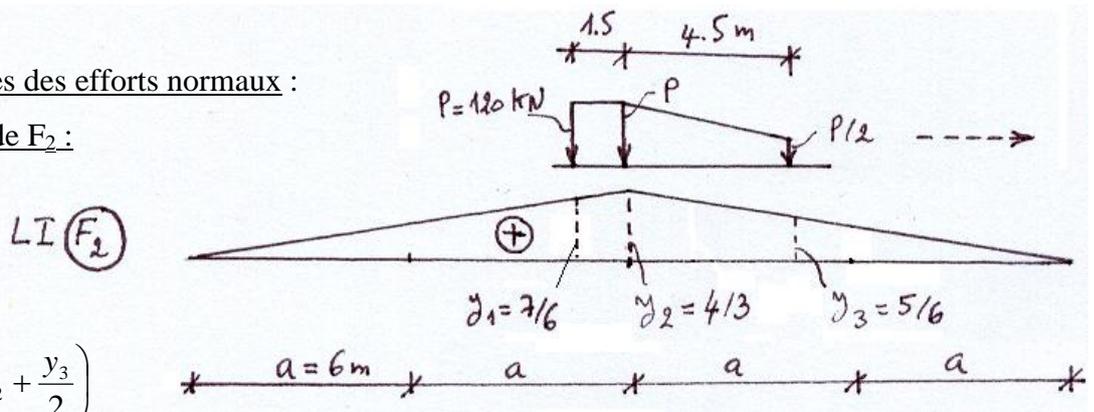
Fig. 58 La ligne d'influence de F_8 .

Remarques :

- Les lignes d'influence de F_2 et F_{12} ressemblent à celle du moment fléchissant d'une poutre simple. Donc les traverses reprennent la sollicitation de flexion. Pour un moment fléchissant positif, les membrures supérieures sont comprimées ($F_{12} < 0$), alors que les membrures inférieures sont tractées ($F_2 > 0$).
- La ligne d'influence de F_7 ressemble à celle de l'effort tranchant d'une poutre simple. Les diagonales reprennent donc l'effort tranchant.
- La ligne d'influence de F_8 peut changer de signe, c'est d'ailleurs le cas général, elle ressemblera à celle de l'effort tranchant d'une poutre simple. Les montants similairement aux diagonales reprennent l'effort tranchant.

2- Valeurs extrêmes des efforts normaux :

Valeurs extrêmes de F_2 :



$$F_2^{\max} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$$

$$F_2^{\max} = 120 \times \left(\frac{7}{6} + \frac{4}{3} + \frac{5}{12} \right) \Rightarrow \boxed{F_2^{\max} = 350 \text{ KN}}$$

$$F_2^{\min} = 0$$

Valeurs extrêmes de F_{12} :

LI (F_{12})

Position 1:

$$F_{12}^{(1)} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$$

$$F_{12}^{(1)} = 120 \times \left(-\frac{3}{4} - 1 - \frac{3}{8} \right) \Rightarrow F_{12}^{(1)} = -255 \text{ KN}$$

$$F_{12}^{\max} = 0$$

Position 2:

LI (F_{12})

$$F_{12}^{(2)} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$$

$$F_{12}^{(2)} = 120 \times \left(-\frac{11}{12} - 1 - \frac{1}{8} \right) \Rightarrow F_{12}^{(2)} = -245 \text{ KN}$$

$$F_{12}^{\max} = 0$$

$$F_{12}^{\min} = \text{Inf}(F_{12}^{(1)}, F_{12}^{(2)}) = -255 \text{ KN}$$

$$F_{12}^{\max} = 0$$

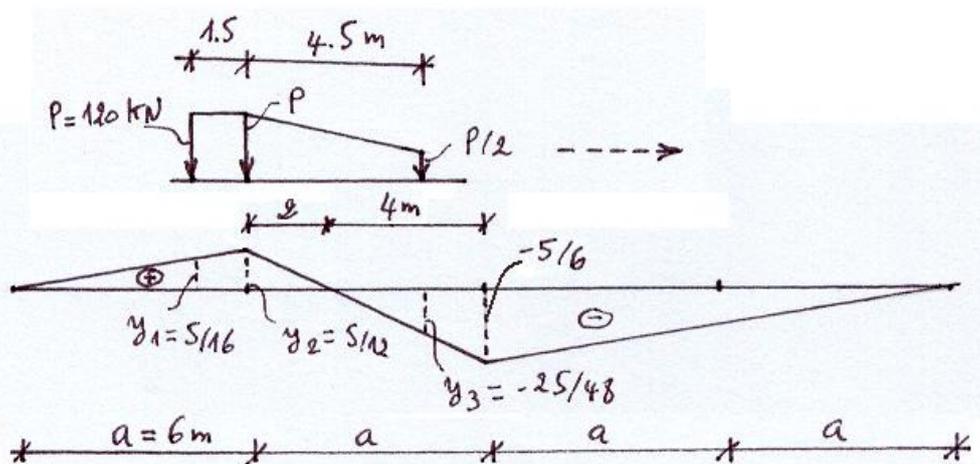
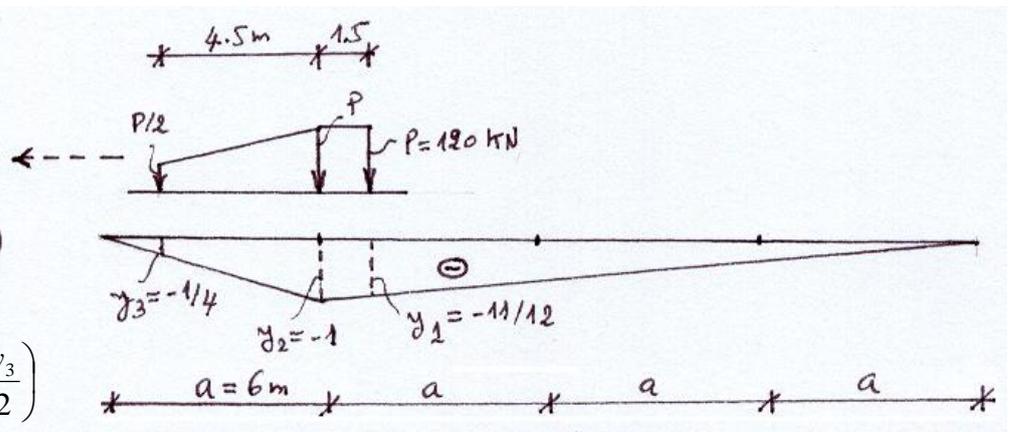
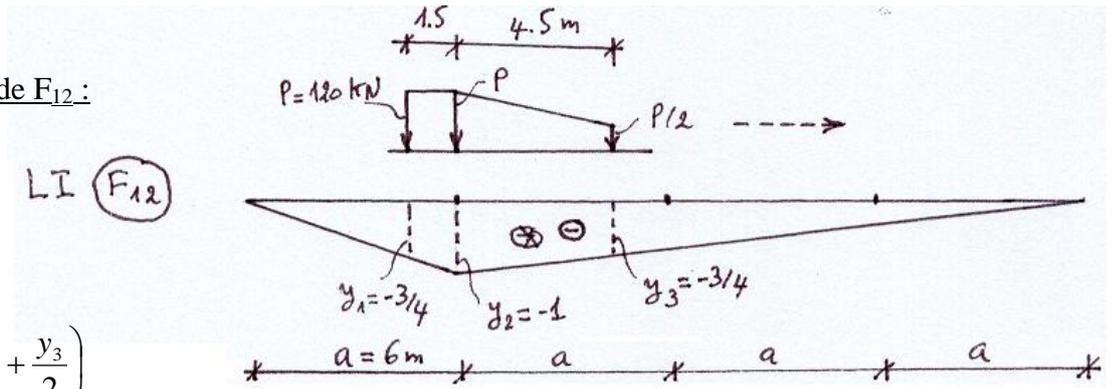
Valeurs extrêmes de F_7 :

Valeur maximale de F_7 :

Position 1:

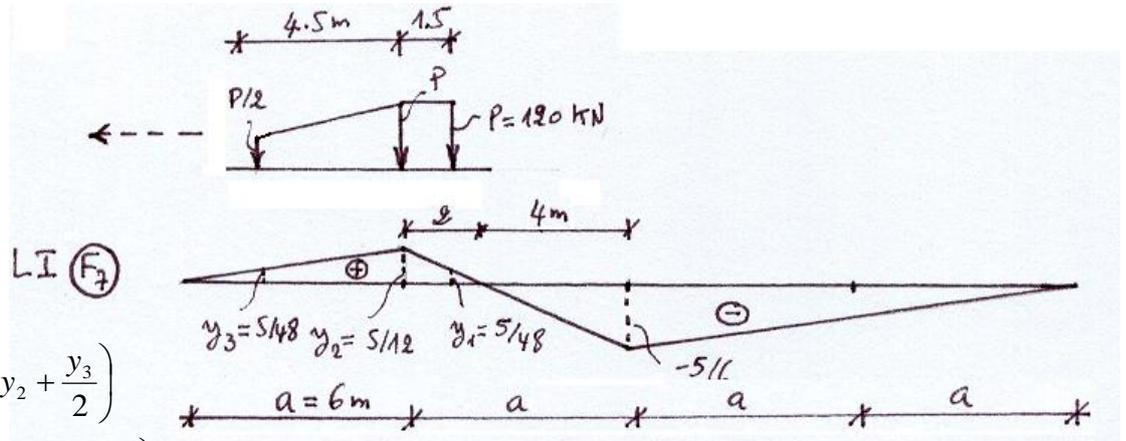
LI (F_7)

$$F_7^{(1)} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$$



$$F_7^{(1)} = 120 \times \left(\frac{5}{16} + \frac{5}{12} - \frac{25}{96} \right) \Rightarrow \boxed{F_7^{(1)} = 56.25 \text{ KN}}$$

Position 2:



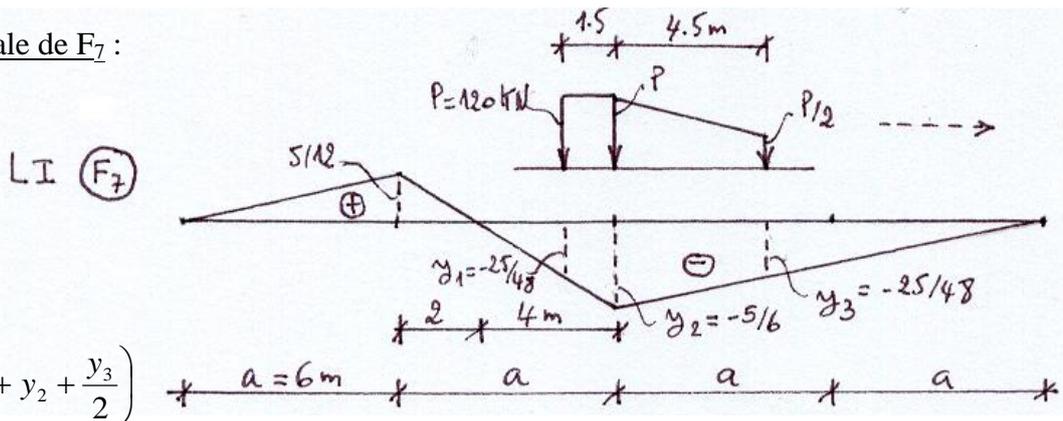
$$F_7^{(2)} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$$

$$F_7^{(2)} = 120 \times \left(\frac{5}{48} + \frac{5}{12} + \frac{5}{96} \right) \Rightarrow \boxed{F_7^{(2)} = 68.75 \text{ KN}}$$

$$\boxed{F_7^{\max} = \text{Sup}(F_7^{(1)}, F_7^{(2)}) = 68.75 \text{ KN}}$$

Valeur minimale de F_7 :

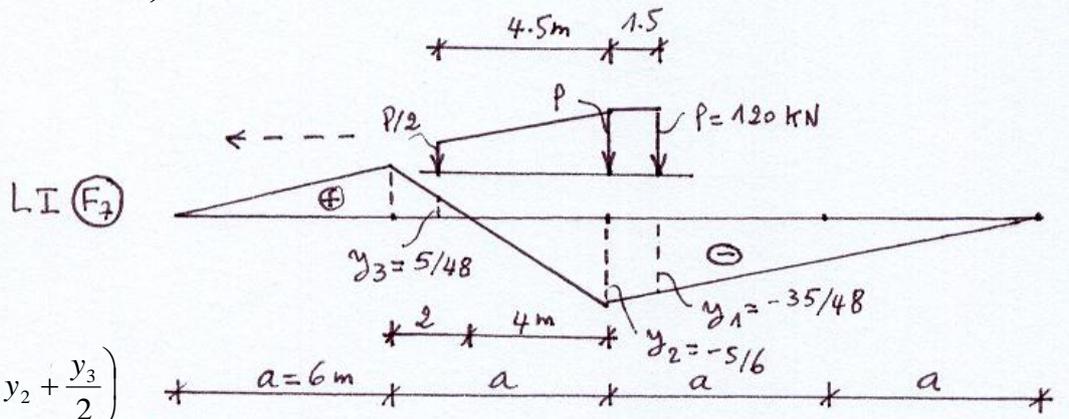
Position 1:



$$F_7^{(1)} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$$

$$F_7^{(1)} = 120 \times \left(-\frac{25}{48} - \frac{5}{6} - \frac{25}{96} \right) \Rightarrow \boxed{F_7^{(1)} = -662.5 \text{ KN}}$$

Position 2:



$$F_7^{(2)} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$$

$$F_7^{(2)} = 120 \times \left(-\frac{35}{48} - \frac{5}{6} + \frac{5}{96} \right) \Rightarrow \boxed{F_7^{(2)} = -181.25 \text{ KN}}$$

$$F_7^{\min} = \text{Inf} (F_7^{(1)}, F_7^{(2)}) = -662.5 \text{ KN}$$

Valeurs extrêmes de F_8 :

$$F_8^{\max} = P \cdot \left(y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2} \right)$$

$$F_8^{\max} = 120 \times \left(\frac{3}{4} + 1 + \frac{1}{8} \right) \Rightarrow F_8^{\max} = 225 \text{ KN}$$

$$F_8^{\min} = 0$$

Tableau récapitulatif :

Barre N°	F^{\min} (compression) [KN]	F^{\max} (traction) [KN]
2	0	350
12	-255	0
7	-662.5	68.75
8	0	225

Tab.2 Efforts extrêmes suite au passage d'un camion Bc.

9 CONCLUSION

Dans les ponts on a affaire à des charges mobiles. Pour une section donnée les efforts et les déformations vont changer en fonction de la position de la charge. Le souci majeur est de définir les efforts ou déplacements extrêmes de cette section, d'où l'utilité de la ligne d'influence qui joue un rôle principal dans l'étude de n'importe quelle section de l'ouvrage.

