

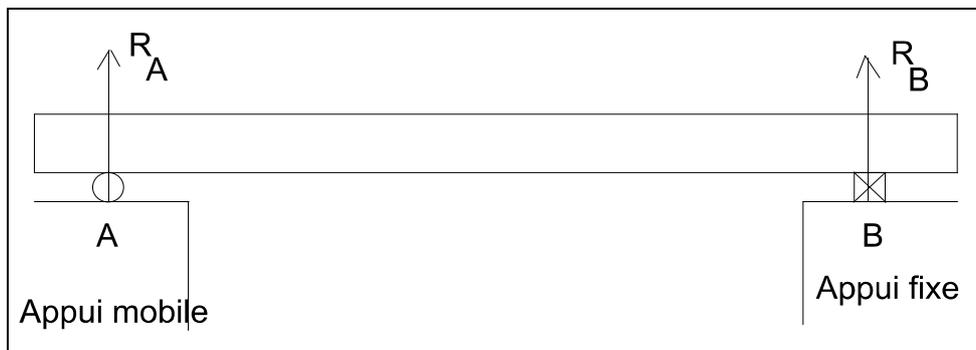
# 8

# Poutres droites isostatiques

## 8.1. POUTRES SUR APPUIS SIMPLES

### 8.1.1. DÉFINITION

Une poutre sur appuis simples, appelée encore poutre à *travée indépendante*, est une poutre droite reposant sur deux appuis simples, susceptibles de ne développer que deux réactions  $\bar{R}_A$  et  $\bar{R}_B$  normales à la fibre moyenne de la poutre (figure 8.1).



**Figure 8.1.** Poutre comportant un appui fixe et un appui mobile.

Ces appuis sont généralement constitués de plaques de Néoprène<sup>(1)</sup>, qui, moyennant une épaisseur convenable, peuvent supporter, par leur déformation propre, les déplacements des extrémités de poutre dus à la dilatation (fig. 8.2).

1. Matériau très élastique ressemblant un peu au caoutchouc.

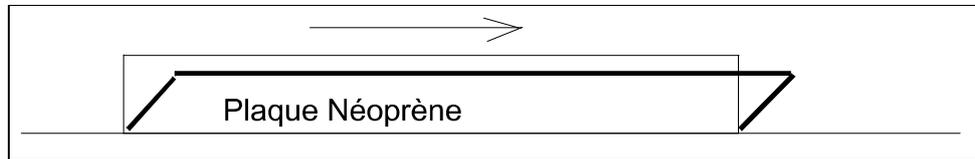


Figure 8.2. Appui par plaque Néoprène.

Les forces appliquées à la poutre sont des forces verticales (poids).

### 8.1.2. CALCUL DES EFFORTS ET DES MOMENTS SOUS UNE CHARGE CONCENTRÉE - LIGNES D'INFLUENCE

#### 8.1.2.1. Calcul des efforts et des moments

Plaçons l'origine des abscisses à l'appui de gauche A, et supposons qu'une seule charge concentrée  $\vec{P}$  soit appliquée dans la section (C), à l'abscisse  $a$  (figure 8.3).

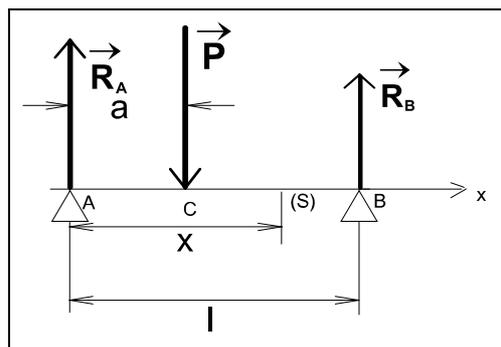


Figure 8.3. Poutre à travée indépendante soumise à une force concentrée  $\vec{P}$ .

Les réactions  $\vec{R}_A$  et  $\vec{R}_B$  sont calculées comme indiqué au paragraphe 4.2.3, c'est-à-dire :

$$R_A = P\left(1 - \frac{a}{\ell}\right) \text{ et } R_B = P\frac{a}{\ell}$$

L'effort tranchant et le moment fléchissant sont définis par (cf. § 4.3.3) :

$$T = \begin{cases} P\left(1 - \frac{a}{\ell}\right) & \text{si } x < a \\ -P\frac{a}{\ell} & \text{si } x > a \end{cases} \quad M = \begin{cases} P\frac{x(\ell - a)}{\ell} & \text{si } x < a \\ P\frac{a(\ell - x)}{\ell} & \text{si } x > a \end{cases}$$

En faisant varier  $x$ ,  $a$  restant constant, les lignes représentatives de la figure 8.4, page ci-contre, sont obtenues.

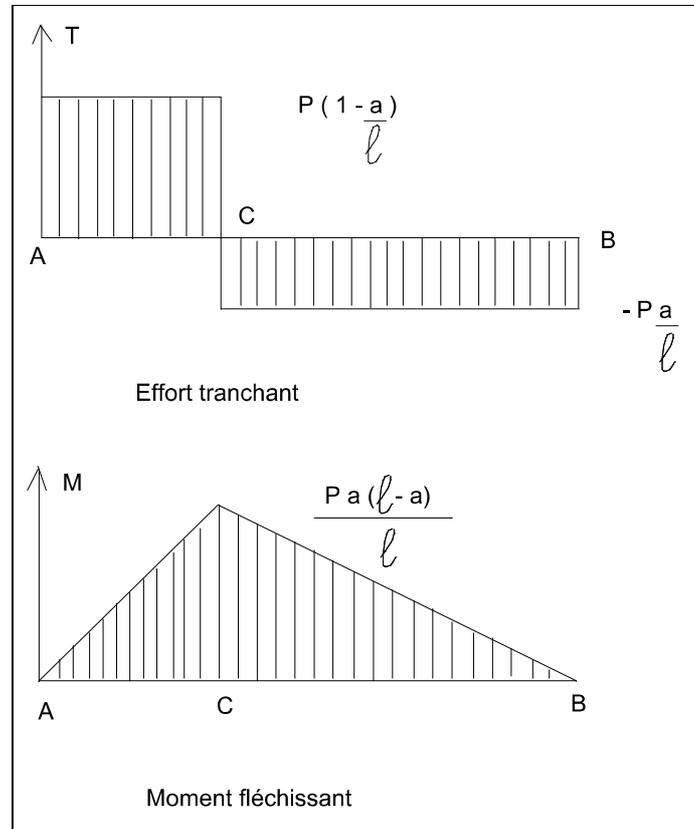


Figure 8.4. Lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

### 8.1.2.2. Lignes d'influence

Considérons une charge *unité* verticale, pouvant se déplacer le long de la poutre. On se trouve ainsi dans le cas précédent où  $P = 1$  et où  $a$  est variable, non plus constant.

Cette charge *unité* produit un certain nombre d'*effets élastiques* tels que moment fléchissant, effort tranchant, réactions d'appui, etc.

On appelle *fonction d'influence* d'un effet élastique, la fonction  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a)$  représentant la variation de l'effet élastique en fonction de l'abscisse de la charge unité.

La courbe représentative de la fonction  $\mathcal{F}(a)$  est appelée *ligne d'influence* de l'effet élastique considéré.

- **Ligne d'influence de la réaction  $R_A$**

$$\text{On a : } R_A = 1 \left(1 - \frac{a}{\ell}\right) \text{ puisque } P = 1$$

## RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

---

La fonction d'influence est donc :

$$\mathcal{F}(a) = \left(1 - \frac{a}{\ell}\right), a \text{ variant de } 0 \text{ à } \ell$$

La ligne d'influence est donc une droite passant par les points A(0,1) et B( $\ell$ ,0) (figure 8.5).

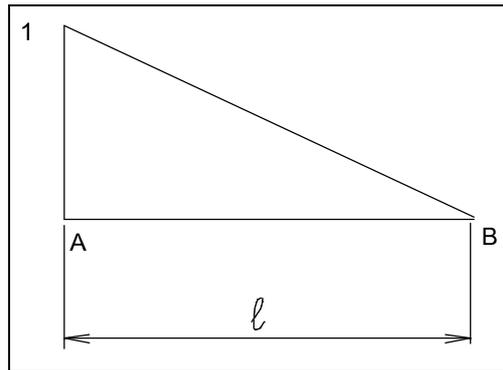


Figure 8.5. Ligne d'influence de la réaction  $\bar{R}_A$ .

### • Ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section d'abscisse $x$

Nous avons :

$$T = \begin{cases} 1 - \frac{a}{\ell} & \text{si } a > x \\ -\frac{a}{\ell} & \text{si } a < x \end{cases}$$

Rappelons que dans le cas de la ligne d'influence,  $x$  est constant et  $a$  est variable.

La ligne d'influence se compose de deux segments de droites parallèles.

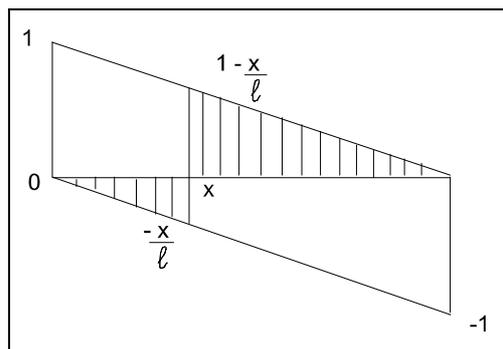


Figure 8.6. Ligne d'influence de l'effort tranchant.

D'après la figure 8.6, il est très facile d'obtenir la ligne d'influence de l'effort tranchant dans une section d'abscisse  $x$  quelconque.



• **Ligne d'influence du moment fléchissant dans une section d'abscisse  $x$**

Nous avons :

$$M = \begin{cases} \frac{x(l-a)}{l} & \text{si } a > x \\ \frac{a}{l}(l-x) & \text{si } a < x \end{cases}$$

La ligne d'influence se compose de deux segments de droites (figure 8.7).

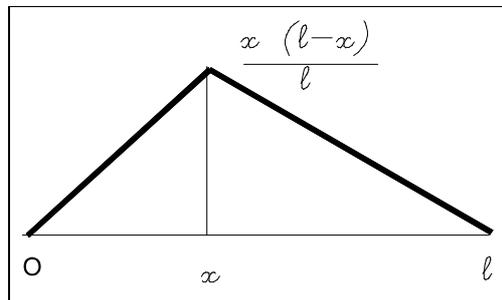


Figure 8.7. Ligne d'influence du moment fléchissant.

Dans ces trois exemples on obtient la valeur de l'effet, dans une section d'abscisse  $x$ , d'une force *unité* placée dans une section d'abscisse  $a$ , en considérant l'ordonnée de la ligne d'influence correspondant à la section d'abscisse  $a$ .

Si, au lieu d'une force unité une force d'intensité  $P$  était appliquée, on obtiendrait l'effet correspondant en multipliant par  $P$  la valeur de l'ordonnée précédente.

**8.1.3. SYSTÈMES DE CHARGES CONCENTRÉES :**  
**PRINCIPE DE SUPERPOSITION DES CHARGES**  
**- EFFET D'UN CONVOI - THÉORÈME DE BARRÉ**

**8.1.3.1. Systèmes de charges concentrées :**  
**principe de superposition des charges**

Les lignes d'influences, traitées dans le précédent paragraphe, sont utiles pour effectuer un calcul intermédiaire lors de l'étude des systèmes de charges concentrées.

Considérons une poutre soumise à un système de charges concentrées, au nombre de trois, ayant les caractéristiques suivantes (figure 8.8, page suivante) :

- $P_1$  appliquée à l'abscisse  $a_1$ ,
- $P_2$  appliquée à l'abscisse  $a_2$ ,
- $P_3$  appliquée à l'abscisse  $a_3$

Le calcul de l'effet de ces trois charges peut s'effectuer selon la méthode développée dans les chapitres précédents pour la détermination du moment fléchissant, de l'effort tranchant, des diverses contraintes, etc.

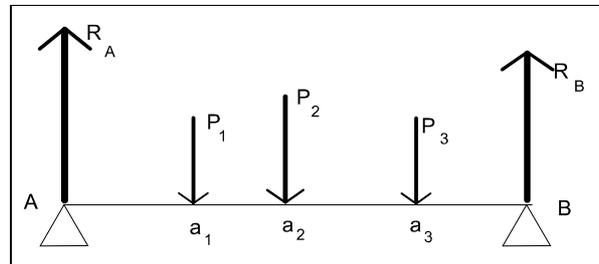


Figure 8.8. Poutre chargée de charges concentrées.

En particulier, les résultats fondamentaux suivants ont été obtenus :

- d’une part, les contraintes (normales ou tangentes), sont toujours proportionnelles au moment fléchissant, à l’effort tranchant ou au moment de torsion,
- d’autre part, ces moments et efforts sont eux-mêmes proportionnels aux forces agissant sur les pièces étudiées.

Donc si donc une force extérieure  $\vec{F}$  produit une réaction  $\vec{R}$ , un moment  $\vec{M}$  et un effort tranchant  $\vec{T}$  et une autre force extérieure  $\vec{F}'$  produit une réaction  $\vec{R}'$ , un moment  $\vec{M}'$  et un effort tranchant  $\vec{T}'$ , le système de forces  $(\vec{F} + \vec{F}')$  produira une réaction  $(\vec{R} + \vec{R}')$ , un moment  $(\vec{M} + \vec{M}')$  et un effort tranchant  $(\vec{T} + \vec{T}')$ , sous réserve que le matériau ne subisse pas des contraintes supérieures à celles qu’il est susceptible de supporter.

Ce résultat, applicable aux forces concentrées, l’est également pour les charges réparties, celles-ci pouvant être considérées comme une somme de charges concentrées infiniment rapprochées.

Ce résultat porte le nom de *principe de superposition des charges*, ou encore parfois *principe de superposition des états d’équilibre*, en tenant compte de la remarque ci-dessus concernant le non dépassement des contraintes admissibles.

Pour le cas particulier qui nous intéresse, il est facile de calculer la réaction  $\vec{R}_A$ , par exemple, à partir de la ligne d’influence, en la considérant comme la somme des réactions correspondant à chacune des charges concentrées.

En appliquant la formule concernant la ligne d’influence de la réaction d’appui déterminée ci-dessus, nous obtenons immédiatement :

$$R_A = \frac{[P_1(\ell - a_1) + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3)]}{\ell}$$

Pour le calcul de l’effort tranchant, constant dans tout l’intervalle limité par le point d’application de deux charges consécutives, il suffit de connaître sa valeur en un point de chaque intervalle  $[Oa_j]$ .

Pour le calcul du moment fléchissant, l’effort tranchant étant constant par intervalles, le moment fléchissant est représenté par des segments de droites dans ces intervalles. Sa ligne représentative est une ligne brisée dont les sommets se situent au droit des points d’application des charges : il suffit donc de connaître les valeurs du moment fléchissant aux abscisses  $a_1, a_2$  et  $a_3$ .

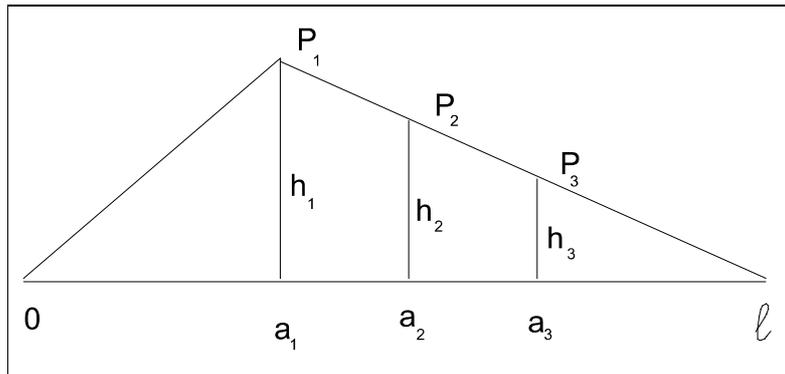
Les détails des calculs sont donnés dans le tableau 8.1. La vérification de l'exactitude des calculs se fait en trouvant  $M(\ell) = 0$ .

Abcisses	Charges	Efforts tranchants	Moments fléchissants
0	-	$T_0 = R_0 =$ $\frac{1}{\ell} (P_1(\ell - a_1) + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3))$	$M_0 = 0$
$a_1$	$P_1$	$T_1 = T_0 - P_1 =$ $\frac{1}{\ell} (-P_1 a_1 + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3))$	$M_1 = M_0 + T_0 a_1 =$ $\frac{a_1}{\ell} (P_1(\ell - a_1) + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3))$
$a_2$	$P_2$	$T_2 = T_1 - P_2 =$ $\frac{1}{\ell} (-P_1 a_1 - P_2 a_2 + P_3(\ell - a_3))$	$M_2 = M_1 + T_1(a_2 - a_1) =$ $\frac{1}{\ell} (P_1 a_1(\ell - a_2) + P_2 a_2(\ell - a_2) + P_3 a_2(\ell - a_3))$
$a_3$	$P_3$	$T_3 = T_2 - P_3 = -R_\ell =$ $-\frac{1}{\ell} (P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3)$	$M_3 = M_2 + T_2(a_3 - a_2) =$ $\frac{\ell - a_3}{\ell} (P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3)$
$\ell$	-	$T_\ell = T_3$	$M_\ell = M_3 + T_3(\ell - a_3) = 0$

**Tableau 8.1. Effort tranchant et moment fléchissant selon l'abscisse.**

## RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Il est possible d'effectuer le même calcul à partir des lignes d'influence. Pour cela, traçons la ligne d'influence du moment fléchissant dans la section d'abscisse  $a_1$  (figure 8.9).



**Figure 8.9.** Ligne d'influence du moment fléchissant à l'abscisse  $a_1$ .

Le moment fléchissant du système de forces  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$  et  $\bar{P}_3$  est égal à  $P_1 \times h_1 + P_2 \times h_2 + P_3 \times h_3$ ,  $h_i$  représentant le moment fléchissant, en  $a_i$ , de la force unité placée en  $a_i$ .

Nous savons que :

$$h_1 = a_1 \frac{\ell - a_1}{\ell}$$

Or, dans les triangles semblables, l'application du théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\ell - a_2}{\ell - a_1}, \text{ d'où } h_2 = h_1 \frac{\ell - a_2}{\ell - a_1} \text{ et, de même, } h_3 = h_1 \frac{\ell - a_3}{\ell - a_1}$$

Finalement, le moment fléchissant est égal à :

$$M_1 = \frac{a_1}{\ell} (P_1(\ell - a_1) + P_2(\ell - a_2) + P_3(\ell - a_3))$$

Le tracé de la ligne d'influence du moment fléchissant dans la section d'abscisse  $a_2$  est donné à la figure 8.10, page suivante.

On sait que  $M_1 = P_1 h_1 + P_2 h_2 + P_3 h_3$ . En refaisant le calcul précédent, on obtient :

$$h_2 = a_2 \frac{\ell - a_2}{\ell}; \quad h_1 = a_1 \frac{\ell - a_2}{\ell}; \quad h_3 = a_2 \frac{\ell - a_3}{\ell}$$

Ce qui permet de retrouver le résultat donné dans le tableau tableau 8.1, page précédente :

$$M_2 = \frac{1}{\ell} (P_1 a_1 (\ell - a_2) + P_2 a_2 (\ell - a_2) + P_3 a_2 (\ell - a_3))$$

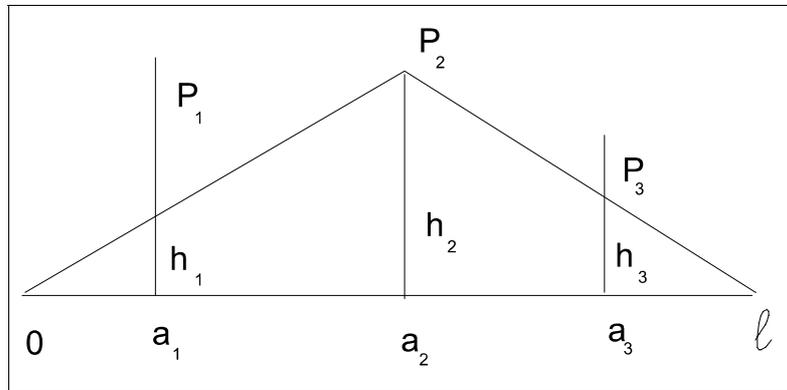


Figure 8.10. Ligne d'influence du moment fléchissant à l'abscisse  $a_2$ .

La valeur de  $M_3$  donnée dans le tableau peut être calculée de la même manière.

En conclusion, le calcul par les lignes d'influence est beaucoup plus rapide que le calcul direct, notamment grâce au fait qu'il ne nécessite pas le calcul des réactions d'appui.

De plus, cette méthode offre la possibilité de mesurer *graphiquement* les différentes valeurs de  $h$ , à condition que l'échelle soit choisie de sorte que l'erreur de lecture soit acceptable.

Une image des lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant est également donnée (figure 8.11 et figure 8.12, page suivante).

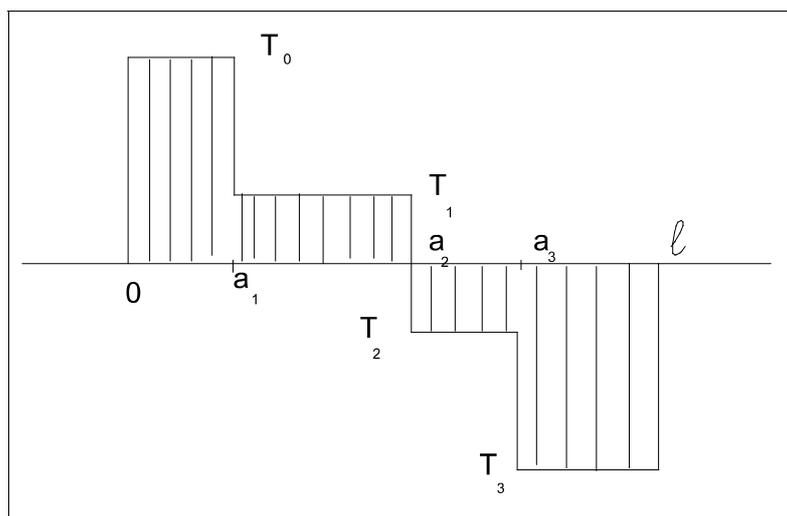


Figure 8.11. Ligne représentative de l'effort tranchant.

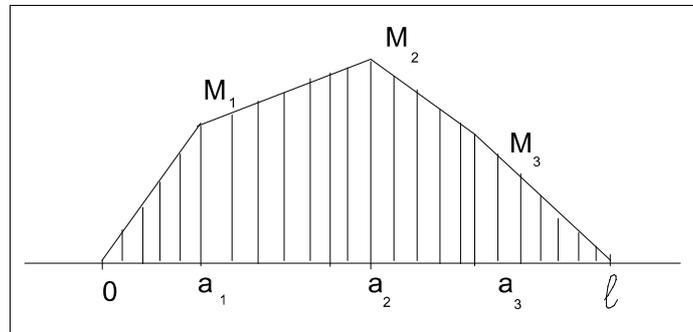


Figure 8.12. Ligne représentative du moment fléchissant.

### 8.1.3.2. Effet d'un convoi - Théorème de Barré

Un convoi est un système de charges concentrées pouvant se déplacer dans leur ensemble, les distances entre les lignes d'action des différentes charges restant invariables au cours du déplacement. C'est le cas des essieux d'un camion ou d'un train.

Pour déterminer l'effort tranchant  $\bar{T}$  ou le moment fléchissant  $\bar{M}$ , maximaux dans une section de poutre, sous l'action du convoi, on utilise les lignes d'influence correspondantes dans cette section et on déplace le convoi (dessiné sur papier transparent) le long de la ligne d'influence, jusqu'à l'obtention du maximum de l'effet considéré. Dans une position donnée du convoi,  $\bar{T}$  et  $\bar{M}$  s'obtiennent en faisant la somme des produits des charges <sup>(2)</sup>. Il faut avoir soin, lorsque le convoi n'est pas symétrique, de le retourner bout pour bout, c'est-à-dire symétriquement par rapport à un axe vertical.

Un essieu doit toujours se trouver dans la section considérée pour obtenir le maximum recherché.

On peut se contenter de déterminer les valeurs maximales de  $\bar{T}$  et  $\bar{M}$  dans un certain nombre de sections de la poutre, et de tracer les lignes enveloppes (cf. § 8.1.5), mais il est également intéressant de déterminer les maxima absolus de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans l'ensemble de la poutre.

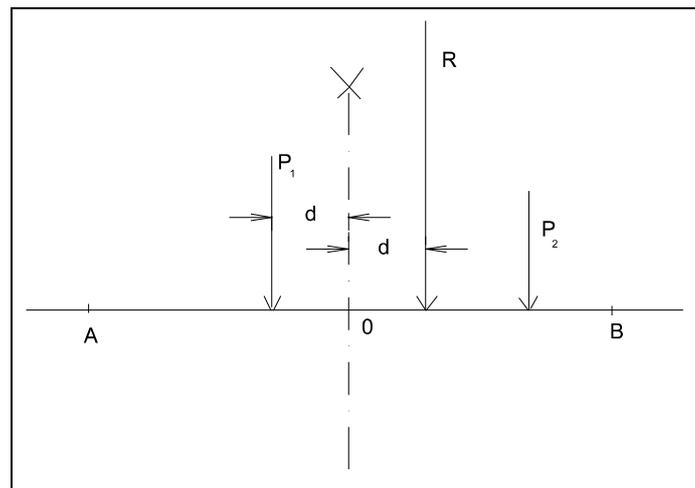
Aucune difficulté pour l'effort tranchant puisque le maximum absolu se situe dans les sections extrêmes de la poutre.

La méthode pour déterminer le moment fléchissant est donnée par le *théorème de Barré*, ci-après : **le moment fléchissant est maximum au droit d'un essieu lorsque cet essieu et la résultante générale du convoi se trouvent dans des sections symétriques par rapport au milieu de la poutre.**

2. Cf. le calcul fait à la fin du paragraphe précédent.

Il ne faut évidemment considérer que la résultante des essieux du convoi qui se trouvent *effectivement* sur la poutre. C'est le cas d'un convoi plus long que la poutre considérée.

Généralement, le maximum absolu se situe au droit de l'un des essieux les plus voisins de la résultante générale  $\bar{R}$  (figure 8.13), mais ce n'est pas toujours vrai ; il est préférable de le vérifier.

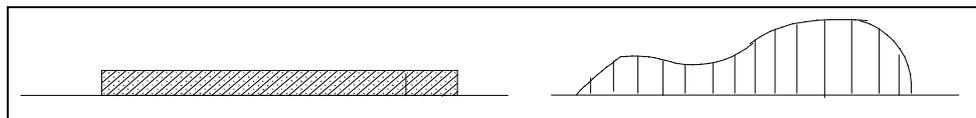


**Figure 8.13.** Position des charges pour obtenir le moment fléchissant maximum.

#### 8.1.4. CAS DE CHARGES RÉPARTIES

De telles charges peuvent être :

- soit réparties uniformément,
- soit réparties d'une façon quelconque (figure 8.14).



**Figure 8.14.** Charges réparties uniformément ou d'une façon quelconque.

Par la suite ne sont considérées que des charges uniformément réparties, de densité  $p$ ,  $p$  étant exprimé généralement en newtons par mètre (N/m).

Il est toujours possible de décomposer une charge quelconque en somme de charges uniformément réparties en considérant des distances d'application infiniment petites.

La charge totale uniformément répartie sur une poutre de longueur  $\ell$  est  $p\ell$ . Les deux réactions  $R_A$  et  $R_B$  valent  $p \cdot \ell / 2$  (figure 8.15, page suivante).

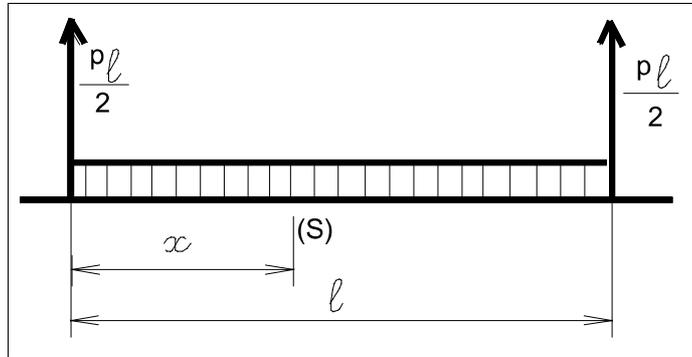


Figure 8.15. Poutre sur appuis simples supportant une charge uniformément répartie.

L'effort tranchant vaut :  $T = \frac{pl}{2} - px = p(\frac{l}{2} - x)$ , quel que soit  $x$ .

Le moment fléchissant est égal au moment de la réaction  $\bar{R}_A$  par rapport à la section (S) considérée, diminué du moment de la charge répartie comprise entre A et S. Pour calculer ce dernier moment, on considère que la charge répartie est représentée par sa résultante  $px$  placée au centre de gravité, c'est-à-dire à la distance  $x/2$ .

$$\text{On a donc } M = \frac{pl}{2}x - px\frac{x}{2} = \frac{px}{2}(l - x)$$

On peut vérifier que l'effort tranchant est bien la dérivée du moment fléchissant par rapport à la variable  $x$ . Les lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant sont données sur la figure 8.16, page ci-contre. La ligne du moment fléchissant est un arc de parabole. La valeur maximale est obtenue au milieu de la poutre ; elle est égale à :

$$\frac{pl^2}{8} \quad (3)$$

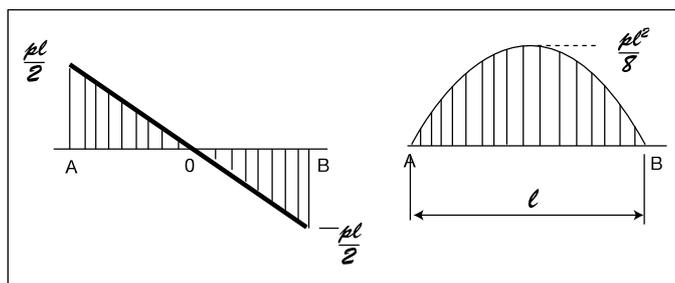


Figure 8.16. Lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

3. Valeur à retenir absolument.

**Remarque**

On pouvait trouver les valeurs de  $\bar{T}$  et  $\bar{M}$  à partir des lignes d'influence (cf. figure 8.17, page suivante). Pour l'effort tranchant,  $T$  est égal à la surface hachurée multipliée par la densité  $p$ .

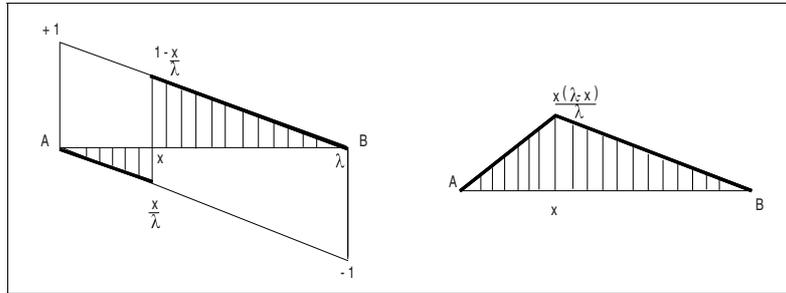
$$T = px \frac{-x}{\ell} \frac{1}{2} + p \frac{1}{2} (\ell - x) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) = p \left(\frac{\ell}{2} - x\right)$$

Il en est de même pour le moment fléchissant :

$$M = \frac{1}{2} pl \frac{x(\ell - x)}{\ell} = \frac{px}{2} (\ell - x)$$

**Remarque**

On pouvait trouver les valeurs de  $\bar{T}$  et  $\bar{M}$  à partir des lignes d'influence (cf. figure 8.17).



**Figure 8.17.** Lignes d'influence de l'effort tranchant du moment fléchissant.

Pour l'effort tranchant,  $T$  est égal à la surface hachurée multipliée par la densité  $p$ .

$$T = px \frac{-x}{\ell} \frac{1}{2} + p \frac{1}{2} (\ell - x) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) = p \left(\frac{\ell}{2} - x\right)$$

Il en est de même pour le moment fléchissant :

$$M = \frac{1}{2} pl \frac{x(\ell - x)}{\ell} = \frac{px}{2} (\ell - x)$$

**8.1.5. LIGNES ENVELOPPES**

Sur une poutre, considérons un cas de charges quelconque (par exemple une charge uniformément répartie); si les contraintes, telles qu'elles résultent de l'effort tranchant, du moment fléchissant ou du moment de torsion, ne dépassent les contraintes admissibles, un *état d'équilibre* est atteint.

Tant que les contraintes restent acceptables, plusieurs cas de charges, correspondant à une superposition des différents états d'équilibre peuvent être superposés : le calcul des effets résultants se réduit alors à faire la somme algébrique des effets élémentaires.

## RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

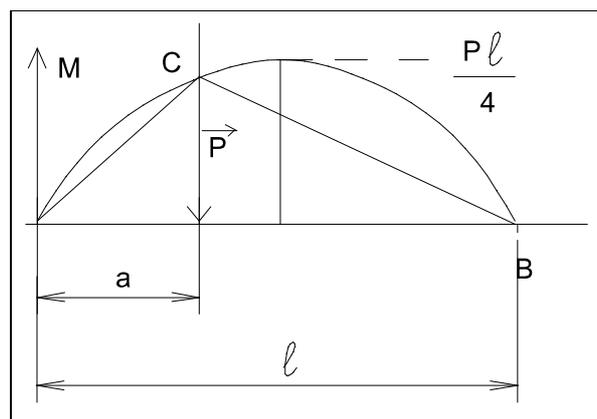
Par exemple, le moment fléchissant au centre d'une poutre sur appuis simples supportant une charge concentrée  $\bar{P}$ , en son milieu et une charge uniformément répartie de densité  $p$ , est égal au moment de la charge concentrée  $p\ell/4$  augmenté du moment de la charge répartie  $p\ell^2/8$ , soit :

$$M = \frac{P\ell}{4} + \frac{p\ell^2}{8}$$

Il faut également considérer le cas de charges pouvant se déplacer le long de la poutre (cas d'un convoi, par exemple). À chaque position possible des charges correspond, dans chaque section, un certain effet, et, pour l'ensemble de la poutre, une ligne représentative de cet effet.

On appelle *ligne enveloppe* de l'effet considéré, la ligne à l'intérieur de laquelle peuvent s'inscrire les lignes représentatives correspondant à tous les cas de charges possibles.

Prenons, par exemple, le cas d'une charge *concentrée*  $\bar{P}$  pouvant se déplacer sur la poutre (figure 8.18).



**Figure 8.18.** Ligne enveloppe du moment fléchissant dû à une charge concentrée.

À une position de la charge  $\bar{P}$ , d'abscisse  $a$ , correspond (cf. § 8.1.2.1) une ligne représentative du moment : ACB, les coordonnées du point C étant :

$$\left| \frac{Pa(\ell - a)}{\ell} \right|$$

La ligne enveloppe est le lieu géométrique du maximum C, c'est-à-dire, en faisant varier  $a$  le long de AB, la parabole ayant pour équation :

$$M(a) = \frac{Pa(\ell - a)}{\ell}, a \text{ variant de } 0 \text{ à } \ell.$$

Le maximum du moment se situe au sommet de la parabole, pour une position de la charge au milieu de la poutre ; sa valeur est  $P\ell/4$ .

### 8.1.6. CALCUL DES FLÈCHES

Sous l'effet des sollicitations auxquelles elle est soumise, une poutre se déforme. Par exemple, une poutre initialement droite prend la forme donnée par la figure 8.19, page suivante.

On appelle flèche à l'abscisse  $x$  le déplacement vertical du centre de gravité de la section relative à cette abscisse. Les flèches sont comptées positivement si le déplacement s'effectue vers le haut (sens des forces positives).

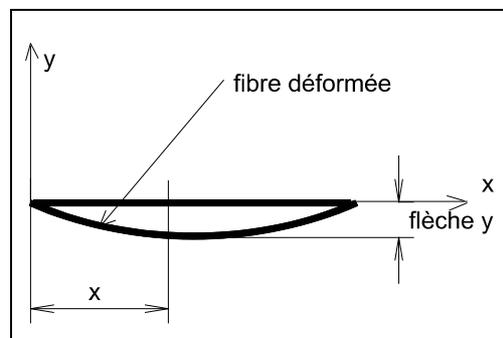


Figure 8.19. Fibre déformée.

Le nouveau lieu des centres de gravité des sections prend le nom de *fibre moyenne déformée* (ou, plus simplement, de *déformée*).

Dans cet ouvrage, nous nous contenterons d'indiquer l'équation de la déformée de la forme  $y = f(x)$ ,  $y$  représentant la valeur algébrique de la flèche à l'abscisse  $x$ . La valeur  $y$  se calcule à partir de l'équation différentielle <sup>(4)</sup> :

$$y'' = \frac{M(x)}{EI} \quad (8.1)$$

- $y''$  est la dérivée seconde de  $y$ ;
- $M(x)$  est le moment fléchissant exprimé en fonction de l'abscisse  $x$ ;
- $E$  est le module d'élasticité du matériau constitutif;
- $I$  est le moment d'inertie de la section considérée par rapport à l'axe passant par le centre de gravité, et normal au plan moyen de la poutre <sup>(5)</sup>.

4. Du moins en première approximation, suffisante toutefois pour la plupart des cas en pratique.

5.  $I$  est le même que celui considéré dans le calcul des contraintes, au paragraphe 5.2; il peut être constant ou variable le long de la poutre.

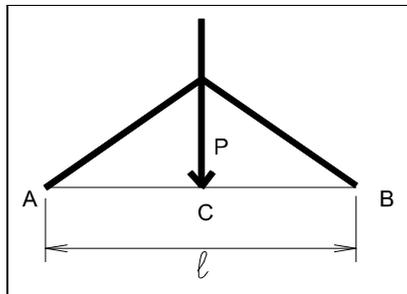
## RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Pour une charge concentrée  $\vec{P}$  située au milieu de la portée, et en supposant que le moment d'inertie est constant,  $y$ , au milieu de la poutre, a pour valeur :

$$y = \frac{-P\ell^3}{48EI}$$

En effet, le moment fléchissant  $M$  est égal à  $Px/2$  entre A et C et à  $P(\ell - x)/2$  entre C et B (figure 8.20, page suivante).

Entre A et C,  $y'' = \frac{Px}{2EI}$  d'où  $y' = y'_0 + \frac{P}{2EI} \frac{x^2}{2}$  et  $y = y_0 + y'_0 x + \frac{P}{2EI} \frac{x^3}{6}$



**Figure 8.20.** Ligne représentative du moment fléchissant au milieu C de la poutre.

La flèche étant nulle en A, cela entraîne  $y_0 = 0$ . D'autre part, la déformée est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le point C. Sa tangente est donc horizontale pour une abscisse  $x = \ell/2$ , d'où  $y'(\ell/2) = 0$ , ce qui entraîne :

$$y'_0 = -\frac{P\ell^2}{16EI}$$

On trouve ainsi  $y = \frac{P}{EI} \left( \frac{x^3}{12} - \frac{\ell^2 x}{16} \right)$  soit pour  $x = \frac{\ell}{2} \Rightarrow y\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{P\ell^3}{48EI}$

Pour une charge uniformément répartie de densité  $p$ , la flèche est maximale dans la section médiane et a pour valeur :

$$y = -\frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI}$$

### Remarque

Le rayon de courbure d'une poutre (cf. § 5.2.1), après déformation par flexion, est tel que  $1/R = M/EI$ , ce qui équivaut à  $y'' = 1/R$ .

Ainsi, on considère  $y'$  comme infiniment petit, et, d'autre part, la flèche due à l'effort tranchant est négligée. Cette hypothèse simplificatrice est valable dans la plupart des cas courants.

## 8.2. CONSOLES

### 8.2.1. DÉFINITION

Une console est une poutre droite encastrée à son extrémité A et libre à l'autre extrémité (figure 8.21, page suivante). La longueur de la console est désignée par  $l$  et les sections sont définies par les abscisses comptées à partir de l'extrémité encastrée A.

Il n'y a de réactions d'appui qu'à l'extrémité A. Elles comprennent une réaction verticale  $\vec{R}_A$  et un moment d'encastrement  $\vec{M}_A$ .

$\vec{R}_A$  et  $\vec{M}_A$  peuvent être déterminés à l'aide de la statique élémentaire : la console est donc une poutre isostatique.

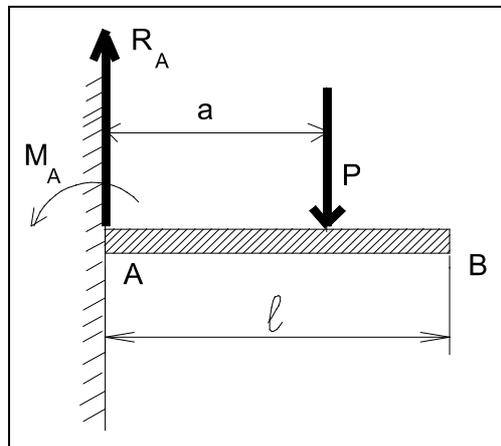


Figure 8.21. Charge concentrée sur une console.

### 8.2.2. DÉTERMINATION DE L'EFFORT TRANCHANT ET DU MOMENT FLÉCHISSANT SOUS UNE CHARGE CONCENTRÉE - LIGNE D'INFLUENCE

Considérons une console supportant une charge concentrée  $\vec{P}$  située à l'abscisse  $a$  (figure 8.22). Calculons d'abord les réactions d'appui à l'origine 0. La somme des

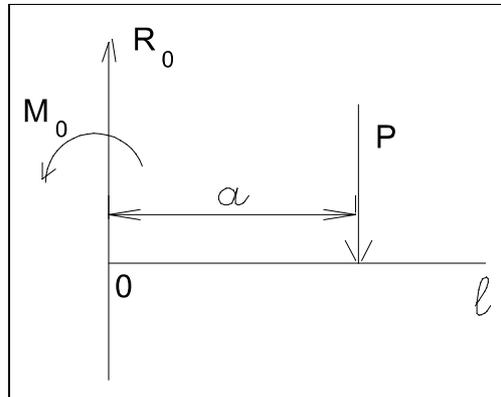


Figure 8.22. Console supportant une charge concentrée.

forces est nulle, donc :  $R_0 - P = 0$ , d'où :  $R_0 = P$ . La résultante des moments à l'origine est nulle, donc :  $M_0 + a \cdot P = 0$  d'où  $M_0 = -a \cdot P$ .

Il en résulte que, dans la section d'abscisse  $x$ , l'effort tranchant et le moment fléchissant sont donnés par les expressions du tableau 8.2, page suivante.

Considérées comme fonction de  $x$ , les expressions ci-dessus permettent d'aboutir aux lignes représentatives données sur la figure 8.23, page suivante.

$x < a$	$x \geq a$
$T = P$	$T = 0$
$M = P(x - a)$	$M = 0$

Tableau 8.2. Effort tranchant et moment fléchissant d'une console.

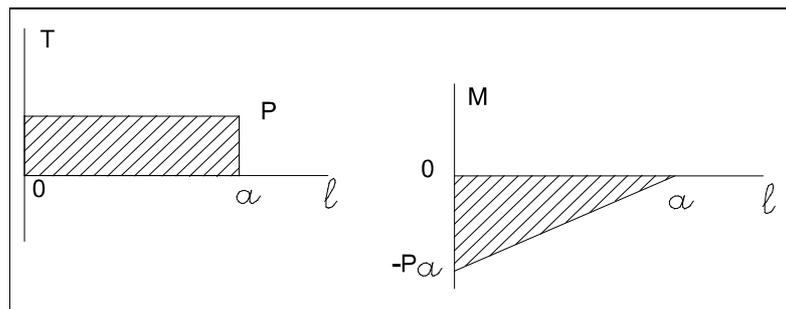


Figure 8.23. Lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

Considérées comme fonctions de  $a$ , elles aboutissent aux lignes d'influence (figure 8.24).

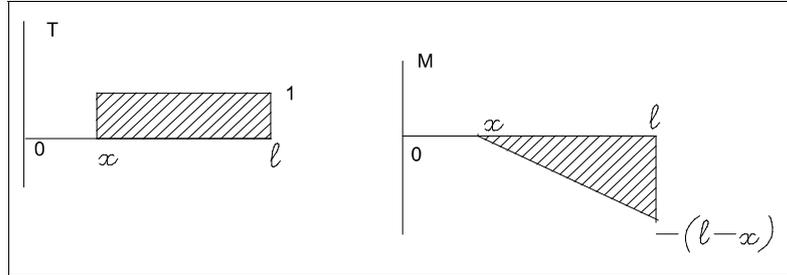


Figure 8.24. Lignes d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

### 8.2.3. CAS D'UNE CHARGE UNIFORMÉMENT RÉPARTIE

Nous calculerons l'effort tranchant et le moment fléchissant, à l'abscisse  $x$ , à partir des lignes d'influence. La valeur des efforts est égale à la surface hachurée multipliée par la densité  $p$  de charge uniformément répartie (cf. § 8.1.4). On a donc :

$$T(x) = p \times 1 \times (\ell - x) = p(\ell - x)$$

$$M(x) = p \times \frac{-1}{2}(\ell - x)(\ell - x) = -\frac{p(\ell - x)^2}{2}$$

La valeur maximum du moment fléchissant  $M$  et de l'effort tranchant  $T$  (en valeur absolue) se situe dans la section d'encastrement, c'est-à-dire pour  $x = 0$ , soit :

$$T_0 = p\ell \quad M_0 = -\frac{p\ell^2}{2}$$

### 8.2.4. CALCUL DES FLÈCHES

La déformée est calculée à partir de l'équation différentielle :

$$y'' = \frac{M(x)}{EI}$$

Rappelons qu'il s'agit d'une formule simplifiée négligeant, en particulier, la flèche due à l'effort tranchant, ce qui, dans le cas des consoles, peut induire des erreurs supérieures à 12%.

Les flèches maximales dues au seul moment fléchissant sont obtenues à l'extrémité libre de la console. Elles ont pour valeur :

– dans le cas d'une charge concentrée  $\bar{P}$  située à l'extrémité libre :

$$y = -\frac{P\ell^3}{3EI}$$

– dans le cas d’une charge uniformément répartie de densité  $p$  :

$$y = -\frac{p\ell^4}{8EI}$$

### 8.3. ÉTUDE DES POUTRES CONSOLES

Une poutre console est une poutre sur appuis simples AB prolongée par deux consoles AC et BD (figure 8.25).

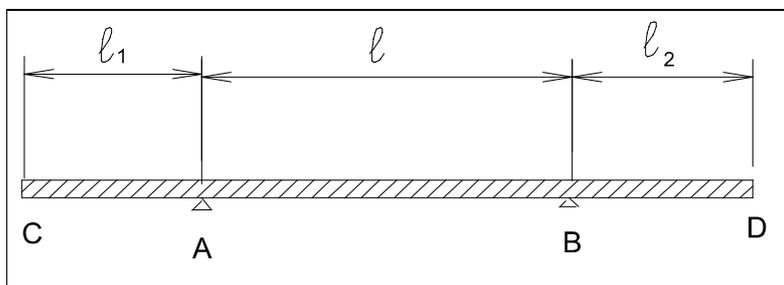


Figure 8.25. Poutre console.

La ligne représentative du moment fléchissant ou de l’effort tranchant pour une section d’une console AC ou BD est identique à celle d’une console isolée, puisqu’une charge sur la travée intermédiaire ou sur l’autre console n’a aucun effet sur la console considérée. En revanche, une charge disposée sur une console provoque des effets sur la partie centrale.

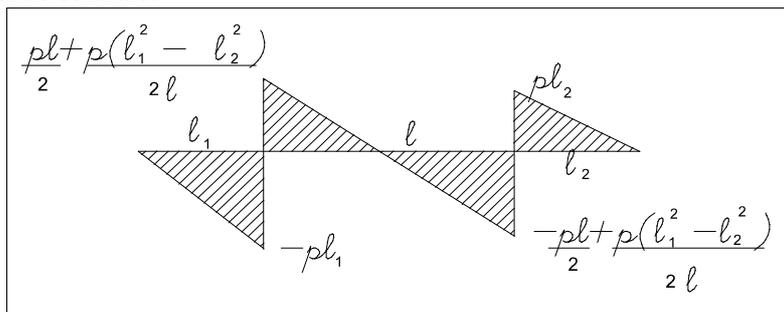


Figure 8.26. Ligne représentative de l’effort tranchant.

Dans cet ouvrage, seules les lignes représentatives de l’effort tranchant (figure 8.26) et du moment fléchissant (figure 8.27) sont données dans le cas où la charge est uniformément répartie de densité  $p$ .

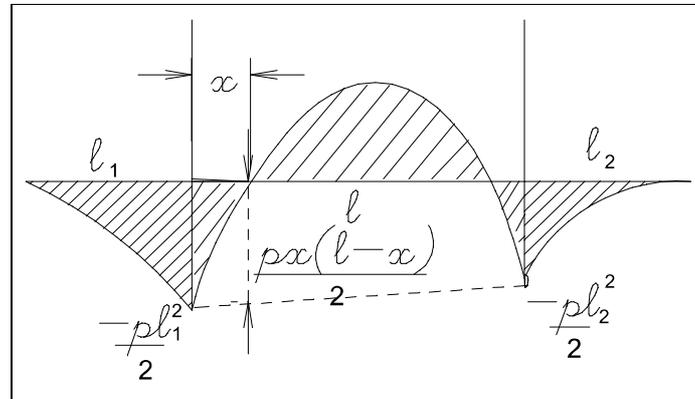


Figure 8.27. Ligne représentative du moment fléchissant.

Le lecteur est invité à effectuer les calculs lui permettant de retrouver les diverses valeurs de l'effort tranchant et du moment fléchissant données ci-dessus.

## 8.4. EXERCICES

### 8.4.1. POUTRE SUR APPUIS SIMPLES

#### Énoncé

Considérons une poutre sur deux appuis simples, de longueur  $AB = 10$  m.

Nous supposons qu'il s'agit d'une poutre en béton armé, de section rectangulaire : 1,00 m de hauteur et 0,60 m de largeur ; la masse volumique du béton armé sera prise égale à  $2,5 \text{ t/m}^3$ .

Outre son poids propre cette poutre supporte un convoi composé de trois charges de 50 kN, 30 kN et 30 kN disposées ainsi que l'indique la figure 8.28. Ce convoi ne circule que dans un seul sens.

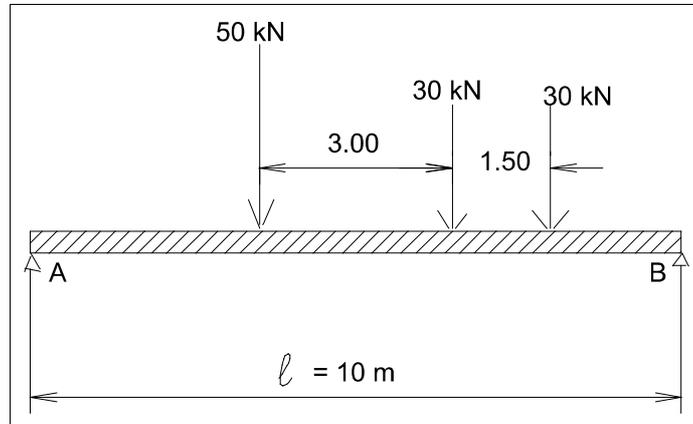


Figure 8.28. Poutre sur deux appuis simples supportant une charge uniformément répartie et un convoi.

1. Tracez les lignes d'influence de l'effort tranchant et du moment fléchissant dans une section d'abscisse  $x$ .
2. En déduire les lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant dus à la charge permanente (poids propre).
3. Calculer l'effort tranchant et le moment fléchissant maximaux dus au convoi en appliquant le théorème de Barré.

➡ **Solution**

1. Les lignes d'influence sont données par la figure 8.29, page suivante.
2. Le poids propre correspond à une charge uniformément répartie de densité :  
 $p = 2,5 \times 1,00 \times 1,00 \times 0,60 = 1,5 \text{ t/m}$ .

Or, les valeurs de  $T$  et  $M$  s'obtiennent en multipliant par  $p$  les surfaces hachurées, soit :

$$T = p \times \frac{1}{2}x \times \frac{-x}{10} + \frac{p}{2}(10 - x)(1 - \frac{x}{10}) = p(5 - x) = 7,5 - 1,5x$$

$$\text{et } M = \frac{p}{2} \times 10 \frac{x(10 - x)}{10} = 0,75x(10 - x)$$

Les lignes représentatives obtenues sont alors celles de la figure 8.30, page suivante.

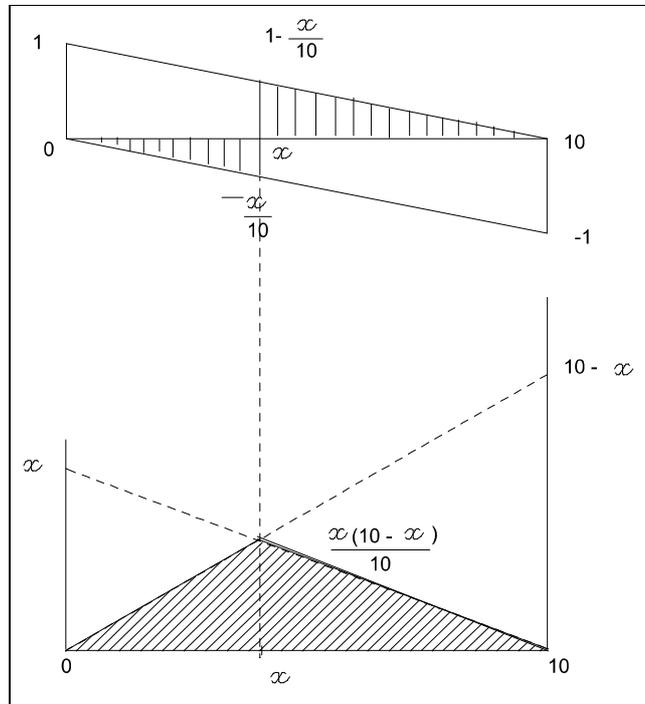


Figure 8.29. Lignes d'influence de l'effort tranchant (en haut) et du moment fléchissant (en bas).

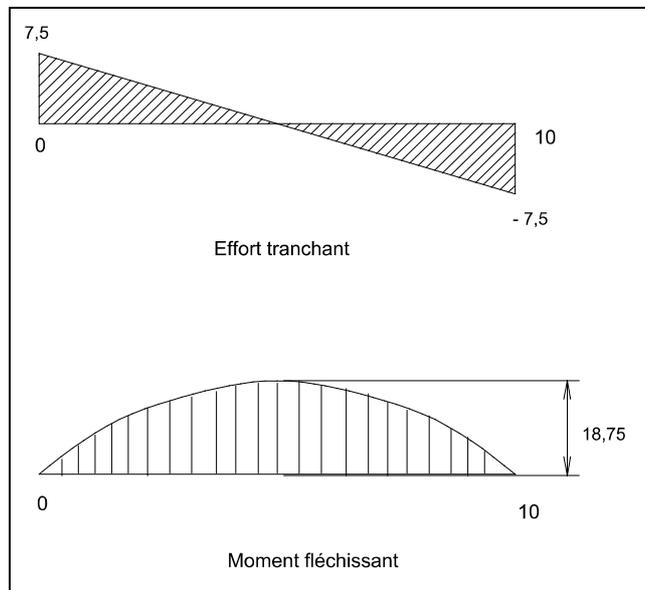


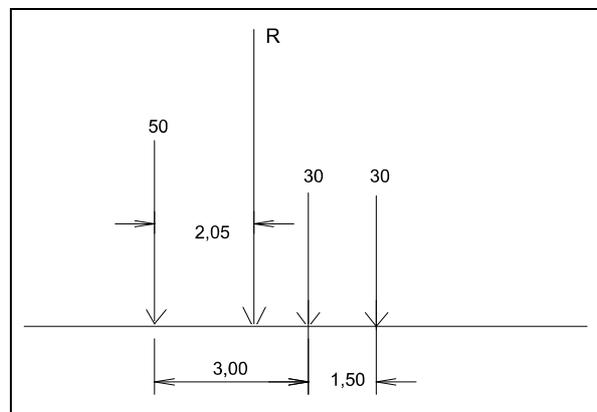
Figure 8.30. Lignes représentatives de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

## RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

3. L'effort maximal du convoi est obtenu lorsque la charge de 50 kN se situe à l'origine A. La ligne d'influence est alors située en entier au dessus de AB. On obtient :

$$T_{\max} = 50 + 30 \times \frac{7}{10} + 30 \times \frac{5,5}{10} = 87,5 \text{ kN}$$

Pour déterminer le moment fléchissant maximum, nous utiliserons le théorème de Barré. Il faut donc déterminer dans un premier temps la position de la résultante du convoi (figure 8.31).



**Figure 8.31.** Position de la résultante du convoi.

Cette résultante  $\bar{R}$  a pour valeur :  $50 + 30 + 30 = 110 \text{ kN}$ .

Sa distance à la ligne d'action de la force de 50 kN est  $d$ , telle que :  $d \times R = 30 \times 3 + 30 \times 4,5 = 225$ , d'où  $d = 2,05 \text{ m}$ .

- Considérons le cas suivant : la résultante  $\bar{R}$  et la charge de 50 kN sont symétriques par rapport au milieu I de la portée (figure 8.32, page suivante).

$$\text{On a : } M = \frac{3,975 \times 6,025}{10} \left( 50 + 30 \frac{3,025}{6,025} + 30 \frac{1,525}{6,025} \right) = 174 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

- Considérons le cas où la résultante  $\bar{R}$  et la première charge de 30 kN sont symétriques par rapport à I (figure 8.33, page suivante).

Le moment fléchissant a pour valeur :

$$M = \frac{5,475 \times 4,525}{10} \left[ 30 + 50 \frac{2,475}{5,475} + 30 \frac{3,025}{4,525} \right] = 180 \text{ m} \cdot \text{kN}$$

Le deuxième cas donne donc le moment le plus grand.

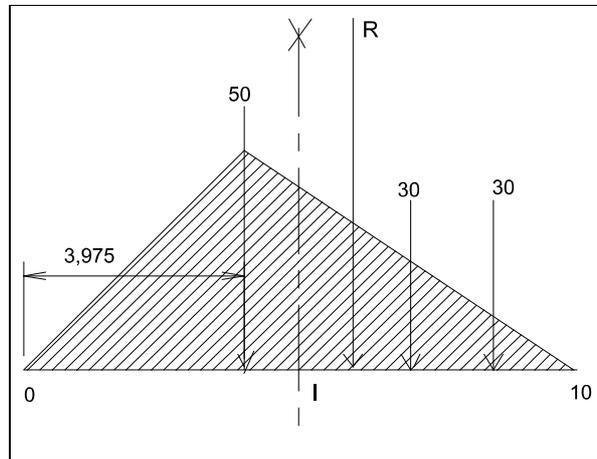


Figure 8.32. La résultante et la charge de 50 kN sont symétriques par rapport à I.

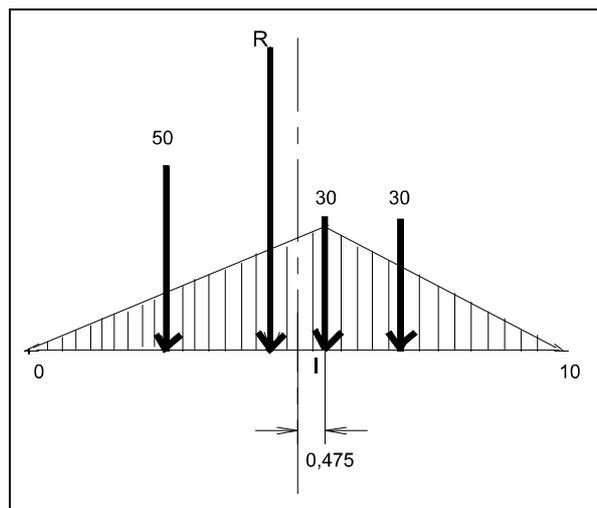


Figure 8.33. La résultante et la première charge de 30 kN sont symétriques par rapport à I.

#### 8.4.2. CALCUL DE LA FLÈCHE À L'EXTRÉMITÉ D'UNE CONSOLE

##### ➡ Énoncé

Calculez la flèche à l'extrémité d'une console en bois de 2 m de portée, sachant qu'elle supporte une charge de 10 kN à son extrémité libre (figure 8.34, page suivante).

La console a une section rectangulaire de  $20 \times 10$  cm. La masse volumique du bois est de  $0,8 \text{ t/m}^3$ . Le module de Young est de 10 000 MPa.

La flèche totale est la résultante de :

– la flèche due au poids propre  $f_1 = -p\ell^4/8EI$ ;

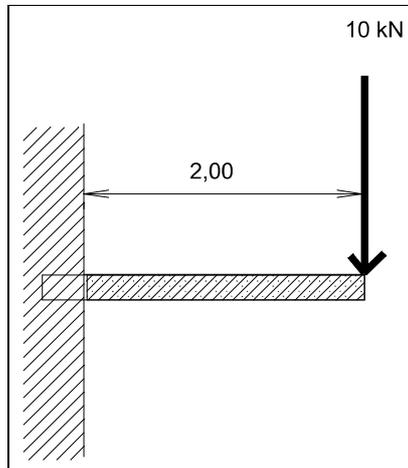


Figure 8.34. Console chargée à son extrémité libre.

– la flèche due à la charge concentrée  $f_2 = -P\ell^3/3EI$ .

La section de la poutre a une surface de  $0,02 \text{ m}^2$ . La densité de masse est donc de  $0,016 \text{ t/m}^2$ , correspondant à une charge  $p = 0,16 \text{ kN/m}$ .

Les différentes flèches ont pour valeur :

$$f_1 = -\frac{1}{EI} \times 320 = -\frac{320}{EI} \text{ m} \quad f_2 = -\frac{1}{EI} \frac{10\,000 \times 8}{3} = -\frac{26\,667}{EI} \text{ m}$$

Les deux flèches sont très différentes, celle due à la charge concentrée étant la plus considérable.

Avec  $E = 10^4 \text{ MPa} = 10^{10} \text{ Pa}$  et  $I = 0,10 \times 0,2^3/12 = 6,67 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$ , on obtient  $f = 40,5 \text{ mm}$ .

### 8.4.3. ÉTUDE D'UNE POUTRE CONSOLE

#### ➔ Énoncé

Considérons la poutre console du paragraphe 8.3.

1. Tracez la ligne d'influence du moment fléchissant dans une section (S) située dans la partie centrale AB, à la distance  $x$  de A.
2. Calculez le moment fléchissant en fonction de  $x$  dans cette section et tracez la ligne représentative.

#### ➔ Solution

La figure 8.35, page suivante, précise les positions respectives de la charge unité et de la section (S) considérée.

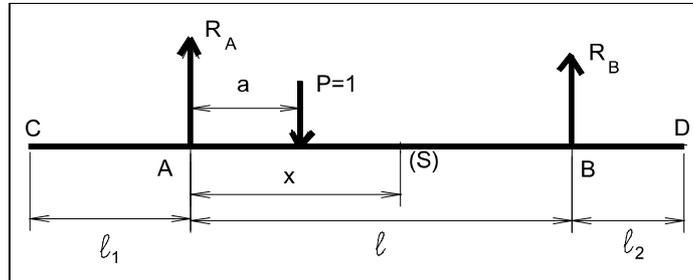


Figure 8.35. Disposition des forces et réactions pour le calcul des lignes d'influence.

- De même que pour l'abscisse  $x$ , choisissons A comme origine pour la distance  $a$  de la charge unité.

Calculons la réaction en A en écrivant que le moment résultant des forces est nul en B :

$$R_A = \frac{\ell - a}{\ell}. \text{ Ce résultat est valable quel que soit le signe de } a.$$

- Premier cas :  $a < x$  implique :

$$M = \frac{\ell - a}{\ell}x - 1(x - a) = \frac{a(\ell - x)}{\ell}$$

$$\text{Si } a = -\ell_1(\text{point C}), M = \frac{-\ell_1(\ell - x)}{\ell}$$

$$\text{Si } a = 0, M = 0$$

$$\text{Si } a = x, M = x \frac{(\ell - x)}{\ell}$$

- Deuxième cas :  $a \geq x$  implique :

$$M = \frac{\ell - a}{\ell}x$$

$$\text{Si } a = \ell \text{ alors } M = 0$$

$$\text{Si } a = \ell + \ell_2 \text{ alors } M = -\ell_2 \frac{x}{\ell}$$

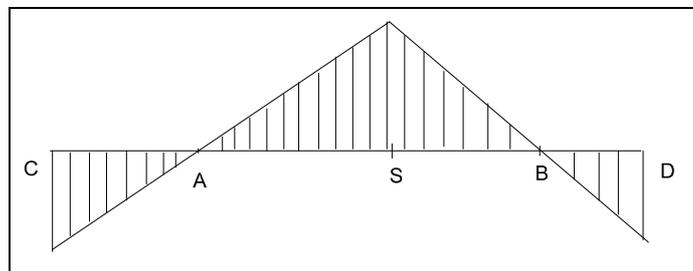


Figure 8.36. Ligne d'influence du moment fléchissant dans la section (S).

## RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

---

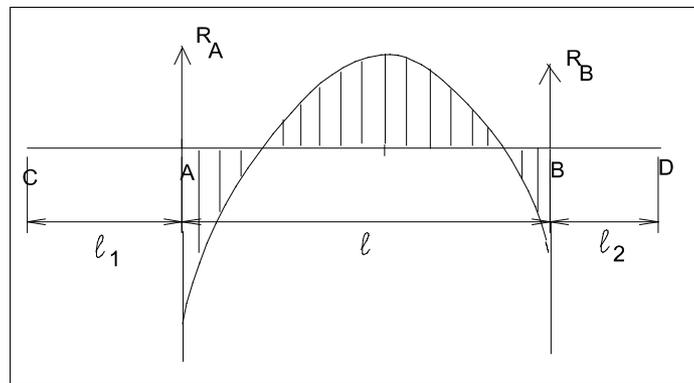
D'où on obtient la ligne d'influence (figure 8.36, page précédente).

Pour obtenir le moment fléchissant, il suffit de calculer les surfaces hachurées, soit :

$$M(x) = \frac{P}{2\ell}(-\ell_1^2(\ell - x) + x\ell(\ell - x) - \ell_2^2x)$$

$$\text{Pour } x = 0, M = -\frac{P\ell_1^2}{2}; \text{ pour } x = \ell, M = -\frac{P\ell_2^2}{2}$$

Les valeurs données précédemment sont confirmées. La courbe représentative de la figure 8.37 est alors obtenue.



**Figure 8.37.** Ligne représentative du moment fléchissant dans la travée centrale.