CHAPITRE III STATIQUE

III.1 Axiomes de la statique

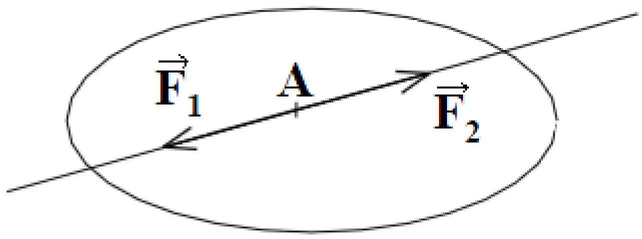
III.1.1 Axiome 1 : Principe d'équilibre

Soit deux forces appliquées à un solide

$F_1 = F_2$: même module

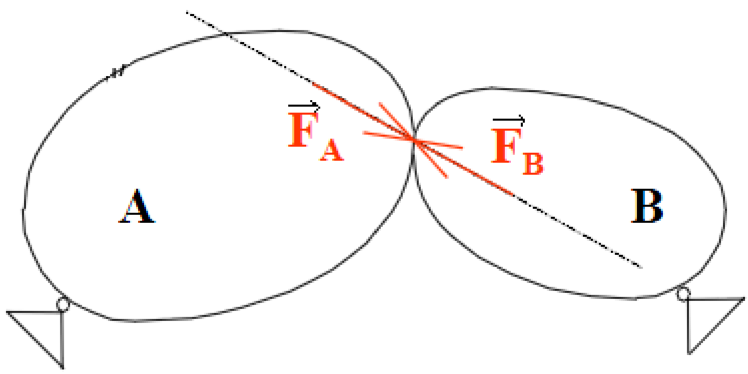
Même direction

De sens opposé.



Un système de forces est dit « à l'équilibre » si, appliqué à un corps, il ne modifie pas l'état de repos ou de mouvement de ce corps.

III.1.2 Axiome 2 : Principe de l'action et de la réaction

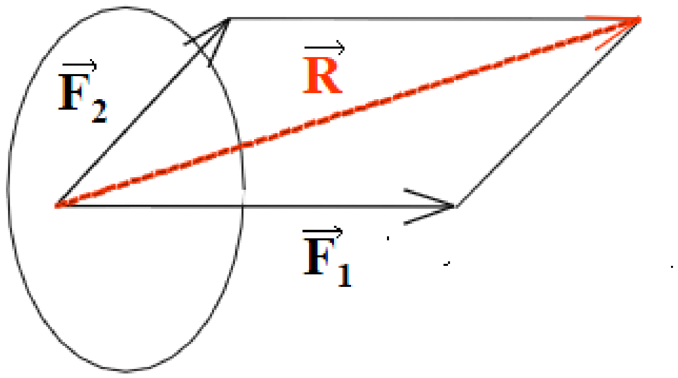


Les forces exercées par deux solides l'un sur l'autre sont toujours de même module, de même direction et de sens opposé.

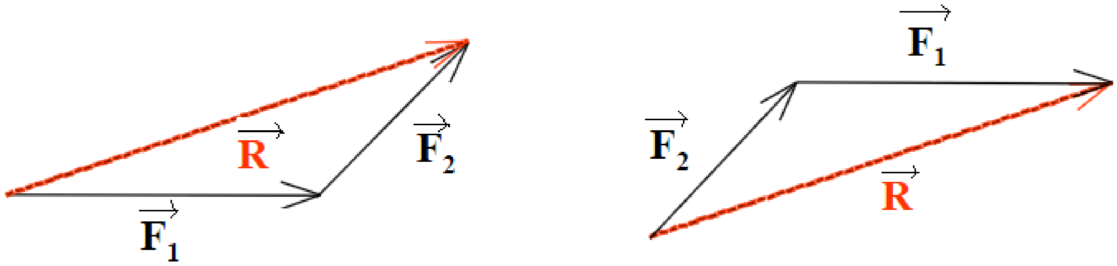
$F_A = -F_B$:

- Même support ;
- Même grandeur ;
- Sens opposé.

III.1.3 Axiome 3 : Principe de parallélogramme



$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$: La résultante de deux forces.



$\vec{\boldsymbol{R}}$ s'obtient graphiquement ou par les formules des triangles quelconques.

La résultante de deus forces appliquées à un même point du solide a son point d'application en ce même point ; son module et sa direction sont déterminés par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces (Règle du parallélogramme).

III.2 Lisons, appuis et réactions

Dans la mécanique, on dit solide libre ou lié :

- Libre ⟶ il peut se déplacer en toute direction
- Liés ⟶ ne peut se déplacer que dans des directions déterminées.

La liaison : tout ce qui limite le déplacement d'un corps dans l'espace et les forces qu'ils exercent sur le solide, sont des réactions de liaisons.

III.2.1 Différents types des liaisons

III.2.1.1 Liaison ponctuelle et appui plan (appui simple)

Pour un solide repose simplement sur une surface parfaitement lisse (horizontale, verticale ou inclinée, Figure III.1 (a, b)) ou sur le rouleau cylindrique (Figure III.1c), la réaction de la surface est appliquée au solide en point de contact et dirigée suivant la normale à la surface d'appui. Elle s'appelle réaction normale et se note $\vec{\mathbf{R}}$.

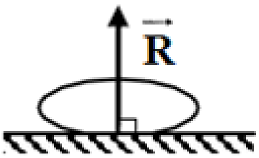


Figure III.1 a

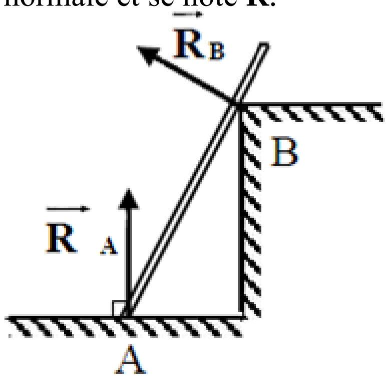


Figure III.1 b

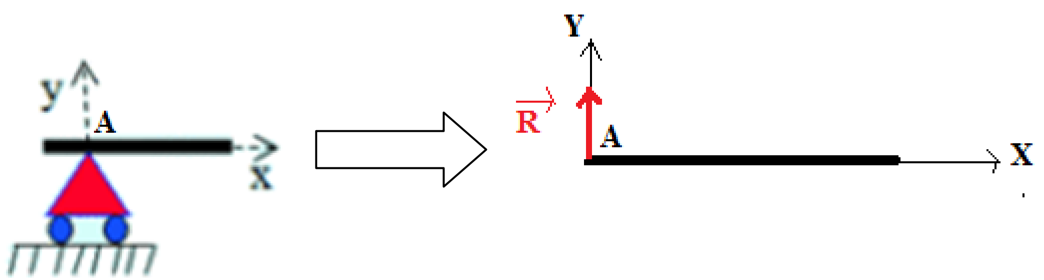


Figure III.1 c

La réaction d'appui en A, B sont perpendiculaires au plan de contact, seule son intensité suivant A_Y est inconnue.

Appui simple est représenté par un triangle avec deux rouleaux. La pointe du triangle symbolise le fait qu'est l'appui ponctuel. Les deux rouleaux signifient que se dernier est glissant.

III.2.1.2 Articulation d'un solide

Dans la pratique, on trouve parfois le corps solide articulé soit par :

- un appui articulé (Figure III.2 a), il est caractérisé par deux inconnues de liaison : R_x, R_y,

- une articulation cylindrique (liaison pivot glissant, liaison linéaire annulaire) (Figure III.2 b), il est caractérisé par deux inconnues de liaison : R_x, R_y,
- ou une articulation sphérique (liaison rotule) (Figure III.2 c), il est caractérisé par trois inconnues de liaison : R_x, R_y,R_z.

Le module et la direction de la réaction **R** dans son plan sont inconnus.

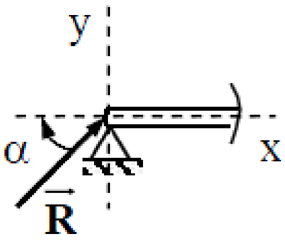


Figure III.2 a

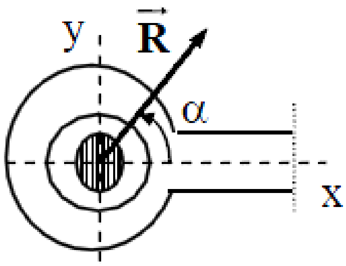


Figure III.2 b

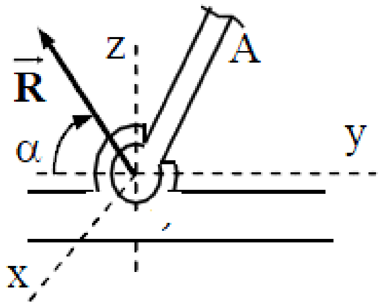
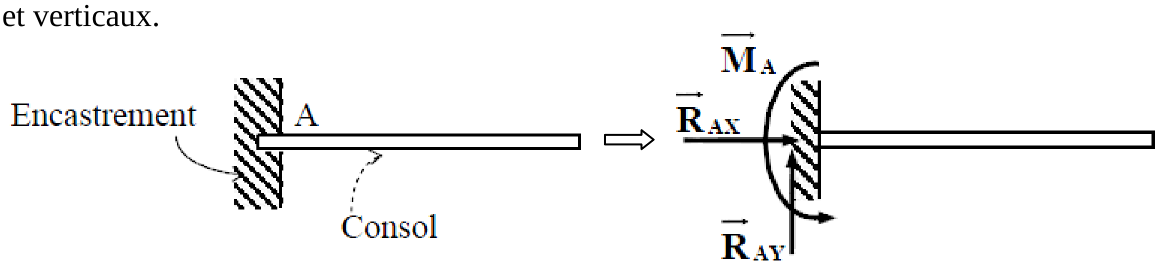


Figure III.2 c

III.2.1.3 Liaison Encastrement

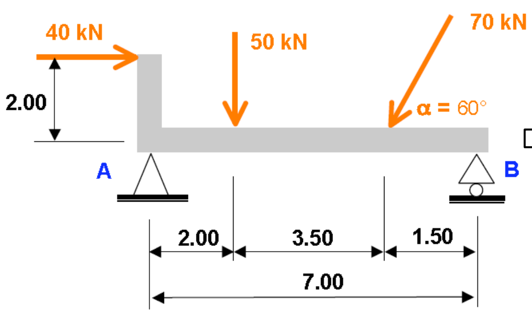
La liaison encastrement ne permet aucun mouvement relatif entre les deux solides. Leurs réactions sont représentées par un moment qui empêche la rotation du solide ($\vec{M}_A$), et des réactions horizontale ($\vec{R}_{AX}$) et verticale ($\vec{R}_{AY}$), qui empêchent les déplacements horizontaux et verticaux.

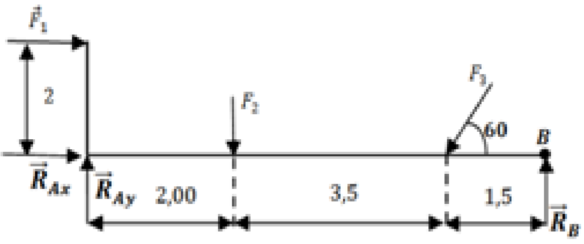


III.3 Axiome des liaisons

Lors d'une étude analytique d'un corps solide lié, il est possible de supprimer les liaisons en les remplaçant par les réactions et, de lui considérer comme un corps solide libre soumis à l'action des forces données et des réactions de liaisons.

Exemple





Corps solide lié **Corps solide libre**

Calculer les réactions d'appuis de la poutre ci-dessus :

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \implies \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

La projection (xx') :

$F_1 - F_3 \cos 60 + R_{AX} = 0 \implies R_{AX} = F_3 \cos 60 - F_1 \implies R_{AX} = -5kN$

La projection (yy') :

$R_{Ay} - F_2 - F_3 \sin 60 + R_{By} = 0 \implies R_{Ay} + R_{By} = F_2 + F_3 \sin 60 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1)$

On a deux inconnues : R_{Ay} et R_{By}

$\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{0} \implies R_{By}.7 - F_3 \sin 60.5,5 - F_2.2 - F_1.2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

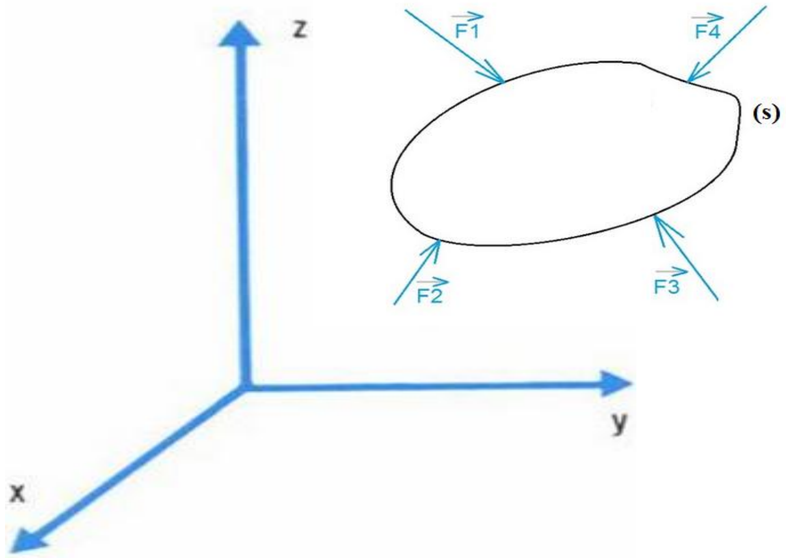
$\implies R_{By}.7 = F_2.2 + F_1.2 + F_3 \sin 60.5,5 \implies R_{By} = 73,6KN$

$(1) : R_{Ay} = 37,4KN$

Nous représentons dans le tableau ci dessous les différents types d'appuis et de liaisons et les composantes des réactions associées à celles-ci.

Type de liaisons	Composantes de la réaction
Appui simple rouleau ou Surface lisse sans frottement :	$\vec{R}$: la réaction est normale au point d'appui.
Appui simple avec frottements	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$: deux composantes dans le plan de contact
Articulation cylindrique d'axe *Oz*	$\vec{R}_x, \vec{R}_y$ avec $\vec{R}_z = \vec{0}$; La composante suivant l'axe de l'articulation est nulle
Articulation sphérique	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$: trois composantes
Encastrement	$\vec{R}_x, \vec{R}_y, \vec{R}_z$ et $\vec{M}_{/A}$ trois composantes plus le moment au point d'encastrement.

III.4 Principe fondamental de la statique



Le solide (S) reste en équilibre sous l'action de n forces extérieures (des actions mécaniques extérieures : $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots \dots \vec{F}_n$) si :

a) $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ext} = 0$, la somme vectorielle des n forces est nulle.

$b)$ $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_O(F_{ext})}$, le moment résultant des n forces en n'importe que point de l'espace est nul.

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_O(F_{ext})} = \overrightarrow{M_O(\vec{F_1})} + \overrightarrow{M_O(\vec{F_2})} + \overrightarrow{M_O(\vec{F_3})} + \dots\dots\dots\dots + \overrightarrow{M_O(\vec{F_n})} = \vec{0}$$

III.4.1 Cas des forces quelconques

Soit un repère orthonormé R(O, XYZ), La projection des forces sur les axes :

Soit $\overrightarrow{F_1}\begin{cases}F_{1x}\\F_{1y}\\F_{1z}\end{cases}$ $\quad\overrightarrow{F_2}\begin{cases}F_{2x}\\F_{2y}\\F_{2z}\end{cases}$ $\quad\overrightarrow{F_3}\begin{cases}F_{3x}\\F_{3y}\\F_{3z}\end{cases}$

Le principe fondamental de la statique se traduit, dans le cas le plus général par les 6 équations scalaires.

- Trois équations liées à la résultante des forces extérieures :

$$\vec{R}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\vec{R}_x=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{ix}=\vec{0}\\ \vec{R}_y=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iy}=\vec{0}\\ \vec{R}_z=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{iz}=\vec{0}\end{cases}$$

Et, trois équations liées au moment des forces par rapport aux axes du repère :

$$\vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}\vec{M}_{Ox}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{ix}\left(\vec{F}_i\right)=\vec{0}\\ \vec{M}_{Oy}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{iy}\left(\vec{F}_i\right)=\vec{0}\\ \vec{M}_{Oz}=\sum_{i=1}^{n}\vec{M}_{iz}\left(\vec{F}_i\right)=\vec{0}\end{cases}$$

III.4.2 Cas des forces concourantes

Dans le cas d'un système de forces concourantes au centre **O (**les forces passent toutes par le même point O), le moment sera nul par rapport à O, il reste seulement trois équations pour la projection de la résultante:

$$\vec{R}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \\ \vec{R}_z = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iz} = \vec{0} \end{cases}$$

III.4.3 Cas des forces planes

Dans le cas d'un problème plan (par exemple X et Y), on aura trois équations d'équilibre.

- Deux équations liées à la résultante statique :

$$\vec{R}=\vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_x = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ix} = \vec{0} \\ \vec{R}_y = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iy} = \vec{0} \end{cases}$$

- Et une équation pour le moment des forces par rapport au centre O : $\vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}$

III.5 Frottement

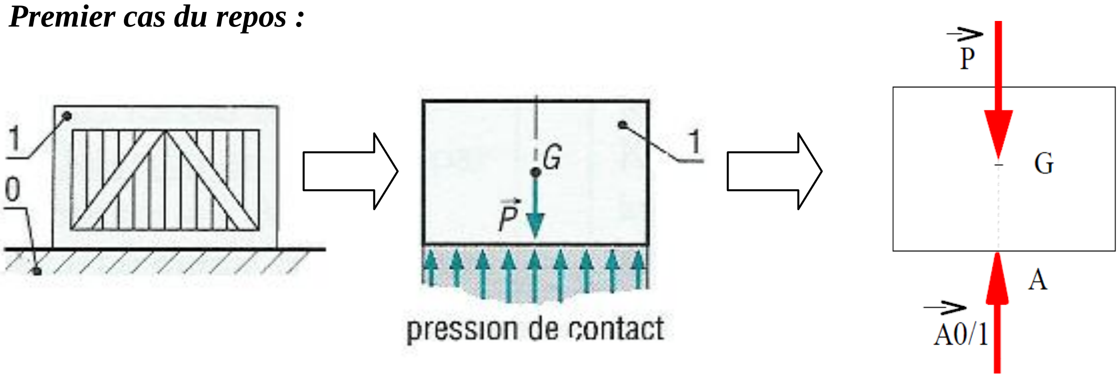
III.5.1 Notion de frottement

Si deux surfaces se déplacent ou glissent l'une par rapport a l'autre, on dit qu'il y a **frottement.**

Si deux surfaces tendent à glisser mais ne se déplacent pas, on dit qu'il y a **adhérence.**

Exemple : Considérons une caisse sur un plan horizontal.

Premier cas du repos :



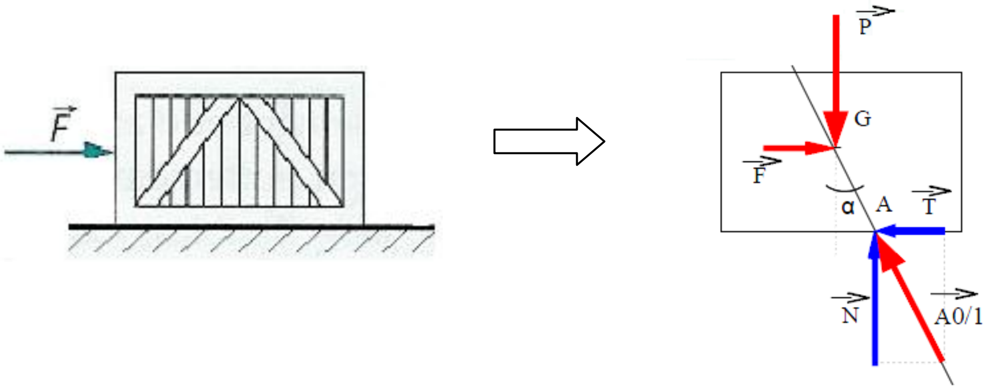
L'action de contact entre deux solides est concentrée est schématisée par une pression de contact (N/m^2). On remplacera l'ensemble des micro-actions par une action unique appliquée au centre de gravité sur une surface, l'action mécanique de la surface ($\overrightarrow{A_{0/1}}$).

La caisse est au repos, sous l'action de deux forces, $\vec{P}$ *et* $\overrightarrow{A_{0/1}}$.

La caisse reste en équilibre tel que La réaction du plan horizontal est égale et opposée au poids de la pièce. : $\vec{P} + \overrightarrow{A_{0/1}} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} = - \overrightarrow{A_{0/1}}$

Deuxième cas de l'adhérence

Maintenant on exerce une force $\vec{F}$ horizontale. Cette force est très petite pour déplacer la caisse.



La caisse reste toujours en équilibre statique sous l'action de trois forces : $\vec{F}$, $\vec{P}$ et $\overrightarrow{A_{0/1}}$.

La caisse ne bougera pas tant que la force $\vec{F}$ est inférieure à une certaine valeur limite. Il existe alors une contre force $\vec{T}$ qui équilibre et s'oppose à cette force $\vec{F}$. $\vec{T}$ est appelée force de frottement statique.

Donc, L'action $A_{0/1}$ s'incline d'un angle α. La composante T s'oppose à F, la composante N s'oppose à P.

$$\tan\alpha = \frac{T}{N} \Longrightarrow T = \tan\alpha \,.\, N \Longrightarrow T = \mu . N$$

T : force de frottement statique

μ : Coefficient de frottement statique

Cette force de frottement statique obéit à la variation représentée sur la figure suivante.

Si μ est le coefficient de frottement statique (*dépend uniquement de la nature des surfaces de contact)* nous pouvons écrire :

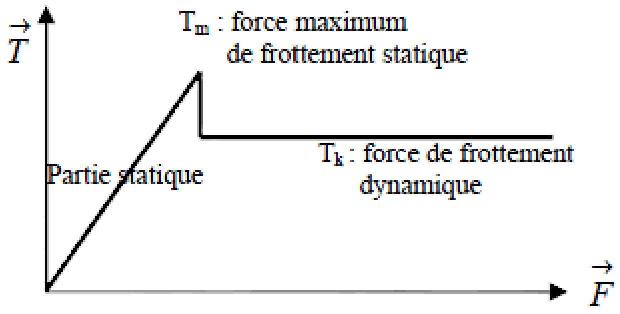


Figure III.3

- Pour que l'équilibre statique soit réalisable il faut que : $|\vec{T}| < \mu\ |\vec{N}|$
- A l'équilibre limite on aura : $|\vec{T}| = \mu\ |\vec{N}|$

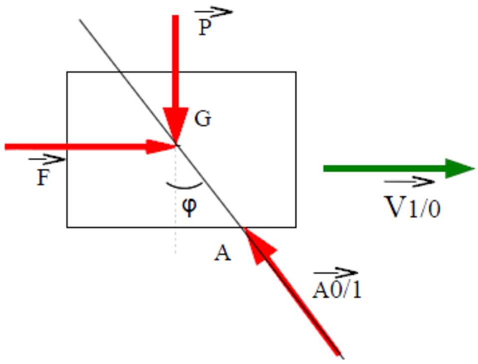
On augmente l'intensité de l'action F, la valeur de T augmente donc. L'angle α augmente également, pour atteindre une valeur limite **α** =φ.

On dit qu'il y a alors équilibre strict. La caisse ne se déplace pas.

- Si $|\vec{F}| > |\overrightarrow{T_m}|$: On augmente encore l'intensité de la force $\vec{F}$.

La caisse se met en mouvement. Donc l'effort F est suffisant pour vaincre l'adhérence.

Le problème n'est plus statique, mais dynamique.



Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{1/0}}$ caracterise la **vitesse de glissement** de la caisse 1 par rapport au plan 0. Ce vecteur est contenu dans le plan tangent au contact.

$|\vec{T}| = k\ |\vec{N}|$ avec k < μ et $\tan\varphi = \frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|} = k$

Ce coefficient **k** indépendant du temps est appelé coefficient de frottement dynamique, il est aussi indépendant de la vitesse.

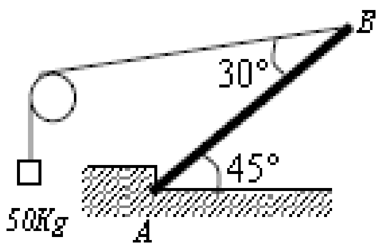
Ce tableau reprend quelques coefficients de frottement statiques et dynamiques des surfaces de matériaux en contact :

	Coefficient de frottement statique μ_0	Coefficient de frottement dynamique k
Acier / Acier	Mouillé 0.1 A sec 0.6	0.05 0.4
Bois / Bois	Mouillé 0.5	0.3
Métal / glace	0.03	0.01
Téflon / Acier	0.04	0.04
Cuivre / Acier	A Sec 0.5	0.4

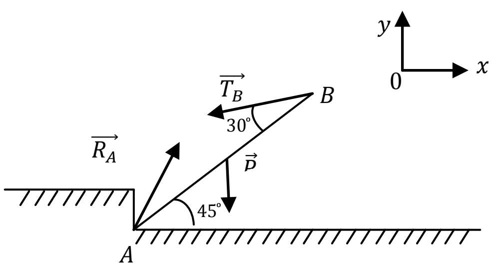
Exemple

On maintient une poutre en équilibre statique à l'aide d'une charge **P** suspendue à un câble inextensible de masse négligeable, passant par une poulie comme indiqué sur la figure. La poutre a une longueur de **8m** et une masse de **50 Kg** et fait un angle de **45°** avec l'horizontale et **30°** avec le câble.

Déterminer la tension dans le câble ainsi que la grandeur de la réaction en **A** ainsi que sa direction par rapport à l'horizontale.



Solution :



$L = 8m$; $m = 50kg$

Déterminer T_B et R_A

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{R_A} + \vec{P} + \overrightarrow{T_B} = \vec{O}$ ………………………………………………………………(I)

La projection sur les axes :

(x x') : $R_{Ax} - T_B \cos 15 = 0$ ……………………………………………………………(1)

(y y') : $R_{Ay} - T_B \sin 15 = P$ ……………………………………………………………(2)

$\sum_i \overrightarrow{M(\overrightarrow{F_{ext}})}_{/A} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{M(\vec{P}\ )}_{/A} + \overrightarrow{M(\overrightarrow{T_B})}_{/A} = \vec{O}$……………………………………………(II)

(II) : $\overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{T_B} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T_B \cos 15 \\ -T_B \sin 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-2\sqrt{2}P - 4\sqrt{2}\, T_B \sin 45 + 4\sqrt{2}\, T_B \sin 45 = 0$

Donc : $T_B = \frac{P}{2(\cos 15 - \sin 15)}$ ……………………………………………………(3)

A.N : $T_B = 346{,}89N$

En remplaçant l'expression (3) dans (1) et (2) :

$R_{Ax} = \frac{P \cos 15}{2(\cos 15 - \sin 15)} \Rightarrow R_{Ax} = 335N$

$R_{Ay} = \frac{P \sin 15}{2(\cos 15 - \sin 15)} + P \Rightarrow R_{Ay} = 580{,}28N$

$R_A = 670N$

Exemple

Un mât vertical de poids négligeable est soumis à une force horizontale F de 4 KN (parallèle à l'axe y) et est maintenue à la vertical par deux câbles BC et BD et par une liaison rotules (sphérique) en A.

1) Exprimer vectoriellement la force F et les deux tensions T_{BC} et T_{BD} agissant sur le mât en fonction de i, j et k.

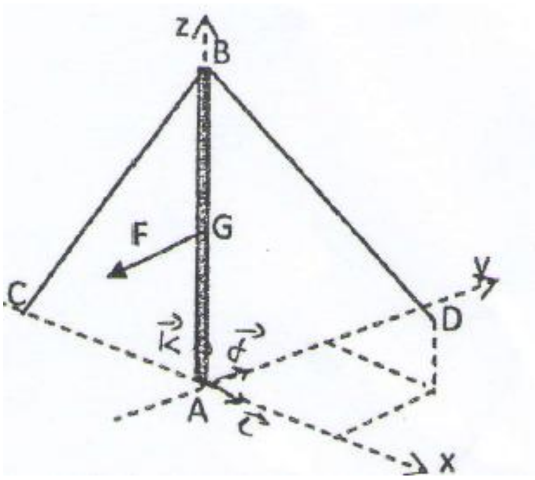
2) Ecrire l'équation vectorielle exprimant la première condition d'équilibre du mât désignant une résultante nulle. Déduire les équations projetées selon les trois axes x, y et z.

3) Déterminer les vecteurs moments par rapport à A de F, T_{BC} et T_{BD}.

4) Donner les équations d'équilibre, projetées selon les trois axes, caractérisant un moment résultants nul.

5) Déduire les deux tensions T_{BC} et T_{BD} ainsi que la réaction R_A.

on donne B (0, 0, 6) ; C(-4,0, 0) ; D(3, 3, 1) ; G(0, 0, 3)



Solution :

$F = 4KN$

$B(0\ 0\ 6); C(-4\ 0\ 0); D(3\ 3\ 1); G(0\ 0\ 3)$

Liaison sphérique En A: R_{Ax} ; R_{Ay} ; R_{Az}

1) Exprimer vectoriellement la force F et T_{BC} ; T_{BD}

$\vec{F} = -F\vec{J}$

$\vec{T}_{BC} = T_{BC}.\vec{U}_{BC}$

$\vec{U}_{BC}$: Vecteur unitaire qui donne la direction de $\vec{T}_{BC}$

$\vec{U}_{BC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{BC} = \frac{-4\vec{\imath} - 6\vec{k}}{\sqrt{16+36}} = -0{,}447\vec{\imath} - 0{,}894\vec{k}$

$\vec{T}_{BC} = T_{BC}\left(-0{,}447\vec{\imath} - 0{,}894\vec{k}\right)$

$\vec{T}_{BD} = T_{BD}.\vec{U}_{BD}$

$\vec{U}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = \frac{3\vec{\imath} + 3\vec{J} - 5\vec{k}}{\sqrt{9+9+25}} = 0{,}458\vec{\imath} + 0{,}458\vec{J} - 0{,}763\vec{k}$

$\vec{T}_{BD} = T_{BD}.\left(0{,}458\vec{\imath} + 0{,}458\vec{J} - 0{,}763\vec{k}\right)$

2) les équations d'équilibre :

La barre en équilibre statique : $\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O}$

$\vec{F} + \vec{T}_{BD} + \vec{T}_{BC} + \vec{R}_A = \vec{O}$

$$\begin{cases} R_{Ax} - 0{,}447T_{BC} + 0{,}458T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ R_{Ay} - F + 0{,}458\,T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ R_{Az} - 0{,}894\,T_{BC} - 0{,}763\,T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Déterminer les vecteurs moments par rapport à A :

$\overrightarrow{M(\vec{F}\ )}_{/A} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{M(\vec{F}\ )}_{/A} = 3F\vec{\imath}$

$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BC})}_{/A} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0{,}447\,T_{BC} \\ 0 \\ 0{,}894\,T_{BC} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BC})}_{/A} = = 2{,}682\,T_{BC}\vec{J}$

$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BD})}_{/A} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0{,}458\,T_{BD} \\ 0{,}458\,T_{BD} \\ -0{,}763\,T_{BD} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BD})}_{/A} = -2{,}748\ T_{BD}\vec{\imath} + 2{,}748 T_{BD}\vec{\jmath}$

4) Donner les équations d'équilibre, projetées selon les trois axes, caractérisant un moment résultants nul.

$\overrightarrow{M(\vec{F}_{ext})}_{/A} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{M(\vec{F}\ )}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{T}_{BC})}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{T}_{BD})}_{/A} = 0$

$$\begin{cases} 3F - 2{,}748\ T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ 2{,}748\ T_{BC} + 2{,}748\ T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5) \end{cases}$$

5) Déduire les deux tensions T_{BC} et T_{BD} ainsi que la réaction R_A

$(4)\colon\ T_{BD} = \frac{3}{2{,}748} F \Rightarrow\ T_{BD} = 1{,}09F$

$T_{BD} = 4{,}37KN$

$T_{BC} = \dfrac{2{,}748}{2{,}682}\ T_{BD} \Rightarrow\ T_{BC} = 1{,}02\ T_{BD} \Rightarrow\ T_{BC} = 4{,}48kN$

$(1)\colon R_{Ax} = 0{,}447T_{BC} - 0{,}458T_{BD}\ \Rightarrow R_{Ax} \simeq 0$

$(2)\colon\ R_{Ay} = -F + 0{,}458\ T_{BD} \qquad \Rightarrow R_{Ay} = 2kN$

$(3)\colon R_{Az} = 0{,}894\ T_{BC} - 0{,}763\ T_{BD} \qquad \Rightarrow R_{Az} = 0{,}671kN$

Exercice 3

Une échelle de longueur ***20 m*** pesant ***400 N*** est appuyée contre un mur parfaitement lisse en un point situé à ***16 m*** du sol. Son centre de gravité est situé à ***1/3*** de sa longueur à partir du bas. Un homme pesant ***700 N*** grimpe jusqu'au milieu de l'échelle et s'arrête. On suppose que le sol est rugueux et que le système reste en équilibre statique.

Déterminer les réactions aux points de contact de l'échelle avec le mur et le sol.