Chapitre I : Rappel Mathématique

I.1) Analyse dimensionnelle direction et sens

I.1.1) Grandeurs physiques :

Par exemple on a un cylindre de matière, il possède des propriétés evidents ; les matériaux dont il est constitués, sa longueurs, son diamètre, sa masse, sa dureté ..., ces enoncées sont des propriétés qualitatives alors ces propriétés deviennent des grandeurs physiques si elle sont mesurables.

En physique on utilise deux types de grandeurs

grandeurs physiques scalaires

grandeurs physiques vectoriell.

* grandeurs physiques scalaires

est entièrement défini par un nombre et l'unité

ex : la masse d'un corp (m)

la longueur (ℓ)

Energie d'un système (E)

* grandeurs physique vectoriell

est une quantité spécifie par un nombre, une unité, la direction et le sens ex: la vitesse ($\vec{V}$) ; le poid ($\vec{P}$) ; champ electrique ($\vec{E}$)...

I.1.2) Les Unités fondamentales

Les unités fondamentales dans le SI (système International) est constitue de 7 unités corresponnd à 7 grandeurs physiques.

Grandeurs physiques	Symbole de grandeur	Nom de l'unité	Symbole d'unites
masse	M	kilograme (kg)	kg
longueur	L	mètre (m)	m
temps	T	seconde (s)	s
Intensité du courant	I	Ampère	A
température	θ	kelvin	k
quantité de la matière	N	mole	mol
Intensité de lumière	J	candela	cd

On a aussi les unités derivées, secondaires, supplémentaire

Les unités derivés: toutes les unités des grandeurs physiques derivent des unités fondamentales
ex: Newton (N) Joule (J), ohm (Ω)...

Les unités secondaires: il existe des unités secondaires pour qlq grandeurs ex: temperature (°C) ; volume (ℓ)...

Les unités Supplémentaire: par exemple l'unité officielles pour les angles plans est le Radian (Rd)

I.2) Equation aux dimensions

Les équations aux dimensions permettent ~~de~~ vérifier la cohérence d'une relation et de trouver l'unité d'une grandeur physique.

On appelle les équations aux dimensions de la Grandeur [G], cette grandeur s'écrit sous forme :

$$[G] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma}$$

Pour déterminer l'unité de cette expression on revient à notre tableau : M^{α} : kg^{α}

L^{β} : m^{β}

T^{γ} : s^{γ}

Pour déterminer α, β, γ cette opération s'appelle l'analyse dimensionnelle de la grandeur G

ex 1 déterminer l'éqt aux dimension de la vitesse et l'accélération.

Réponse :

1) vitesse $V = \frac{x}{t} = \frac{\text{longueur}}{\text{temps}} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$

$$[V] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1} \quad \text{l'unité} = ms^{-1}$$

2) accélération :

$$a = \frac{V}{t} \Rightarrow [a] = \frac{[V]}{[t]} = \frac{LT^{-1}}{T^{-1}} = L.T^{-2} \quad \text{l'unité } ms^{-2}$$

Ex2: déterminer l'éqt aux dimensions de la force et le travail et la Puissance.

Reponse:

1) **La force:** $F = m.a \Rightarrow [F] = [m][a] = M.LT^{-2}$

Unité : $kg\,m\,s^{-2}$

2) **Le travail** $W = F.\ell \Rightarrow [W] = [F][\ell] = MLT^{-2}.L = ML^2T^{-2}$

Unité : $kg\,m^2 s^{-2} = J$ (Joule)

3) **La Puissance:** $P = \dfrac{W}{t} \Rightarrow [P] = \dfrac{[W]}{[t]} = \dfrac{ML^2T^{-2}}{T} = ML^2T^{-2}.T^{-1} = ML^2T^{-3}$

Unité: $kg\,m^2 s^{-3}$

3) Généralisation: dans le cas général l'éqt aux dimension s'écrit sous la forme :

$$\boxed{[G] = M^a L^b T^c I^d \theta^e N^f J^g}$$

Symbole dimension de la température

Symbole dimension de Quantité de la matière (كمية المادة)

Symbole dimension de l'intensité lumineuse (الشدة الضوئية)

Remarque:

Les fonctions exponentielles, logarithmique, trigonométrique, ainsi les constantes, et tout ce qui se trouve à l'intérieure de ces fonctions ont pour dimension la valeur 1.

$[x] = 1$ $\quad [\sin\alpha] = 1$ $\quad [\log x] = 1$ $\quad [\pi] = 1$.

$[\alpha] = 1$ $\quad [e^x] = 1$ $\quad [8] = 1$

3.1) Homogeneité d'une formule.

On dit une formule Homogène si ses deux membres on la m̂ dimension.

ex: verifier si l'égt suivante est Homogène : la periode T_0 d'une pendule simple de masse m de longueur L

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Sol:

T_0 : periode

2π : constante

l : longueur

g : pesanteur Accélération

dimension de:

1er terme :

$[T_0] = T$

2ème terme

$[2\pi] = 1$

$[l] = L$

$[g] = LT^{-2}$

alors : la dimension du 2ème terme est :

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = [2\pi]\,[L]^{1/2}\,[g]^{-1/2}$$

$$= 1 \,.\, L^{1/2}\left(LT^{-2}\right)^{-1/2}$$

$$= \cancel{L^{1/2}} \,.\, \cancel{L^{-1/2}}\, T$$

$$\left[2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right] = T \quad \text{et on a} \quad [T_0] = T$$

alors $T = T$ on dit que $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ est Homogène.

II Erreurs et l'incertitude:

II.1) Erreurs:

Selon le sens général du mot une erreurs est toujours en relation avec quelque chose du vrai en bien just.

II.1.1) Erreurs absolue: (δx)

Par définition l'erreur absolue d'une grandeur physique mesurée est l'ecart qui sépare la valeur experimentale et une valeur considérée vraie

$$\boxed{\delta x = \text{Valeur approchée} - \text{Valeur Réelle}}$$

Ex: $X_0 = 5264$ kg considéré valeur vraie

$X = 5375$ kg valeur experimentale.

$\delta x = X - X_0 = 5375 - 5264 = 111$ kg

1.2) Erreurs relative:

c'est le quotien de l'erreur absolue avec la valeur vraie

$$\boxed{\frac{\delta x}{X_0} = \text{erreurs relative}}$$

II 2.) L'incertitude:

Lors des mesures physiques nous ne possédons pas en général la valeur de Reference, comme celle nous venons de parler, il y existe l'incertitude absolue, l'incertitude relative.

l'incertitude absolue (الارتياب المطلق) Δx

c'est la valeur maximale que peut atteindre l'erreur absolue elle s'exprime par :

$$\delta x \leq \Delta x \Rightarrow \Delta x > 0 \text{ (toujours positive)}.$$

ex 1 : la longueur d'un objet est de 153 ± 1 [mm]
cela signifie qu'avec une incertitude absolue $\Delta L = 1$ [mm], la valeur exacte est comprise entre 152 [mm] et 154 [mm]

ex 2 : La température d'un local est de 22 ± 1 [C°]
ici l'incertitude absolue $\Delta \theta = 1$ [C°] càd la valeur exacte comprise entre 21° et 23°

Important : Nous écrivons toujours le résultat d'une mesure sous la forme.

$$x_0 = (x \pm \Delta x)u$$

x_0 : valeur exacte x : valeur approchée
Δx : incertitude absolue u : unité de la grandeur.

ex 3 : En déterminant la masse M par la méthode de la double pesée, on obtient
$m_1 = 12,762$ g ; $m_2 = 57,327$ sachant que l'incertitude absolue pour m_1 et m_2 est $\Delta m = \pm 2$ mg
calculer M et ΔM

Sol : $M = m_2 - m_1 \Rightarrow M = 44,565$ g
$\Delta M = \Delta m_1 + \Delta m_2 = 4 \text{ mg} = 0,004$ g

$$M = (44,565 \pm 0,004) \text{ g}$$

Incertitude relative : (الارتياب النسبي)

c'est le rapport de l'incertitude absolue et la mesure experimentale, elle indique la qualité de mesure ou bien la précision de mesure.

$$\text{incertitude relative} = \frac{\text{incertitude absolue}}{\text{valeur théorique}} = \frac{\Delta X}{X} = \left|\frac{dX}{X}\right|$$

Remarque :

$$X_{0\,réelle} = X_{mesure} \pm \Delta X$$

X_0 : valeur réelle ou exacte. X : valeur mesuré ou approchée

plus $\frac{\Delta X}{X}$ est petite $\Rightarrow$ plus la précision est grande.

II.3) calcule pour l'incertitude :

a) Addition et soustraction

- Supposons que la grandeur recherchée R soit la somme de deux mesures A et B

$$R = A + B \Rightarrow \boxed{\Delta R = \Delta A + \Delta B}$$

et même pour $R = A - B \Rightarrow \boxed{\Delta R = \Delta A - \Delta B}$

II.4) calcule l'incertitude sur une fonction

considerons une fonction $f(x,y,z)$, Quelle est l'incertitude sur f ?

Soit une grandeur $g = f(x,y,z)$ sa differentielle totale s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz} \\ \boxed{\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| dx + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| dy + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| dz} \end{array}\right\} \Delta f = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

Rappel Mathematique

$\log(a.b) = \log(a) + \log(b)$

$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$

$\ln x^2 = 2\ln x$

$\ln f = \frac{f'}{f} = \frac{df}{dt}$

ex: $f = x^2 + y + z^2$

$\frac{df}{dx} = 2x + y + z$ $\quad \frac{df}{dy} = x^2 + z^2$ $\quad \frac{df}{dz} = 2z + x^2 + y$

- Il existe deux methode pour calculer l'incertitude relative

1er methode logarithmique.

2eme methode de differentielle totale.

Ex: calculer l'incertitude relative par les deux méthodes pour la fonction $\varphi = \frac{\pi R \Delta^2}{4L}$

1ère méthode logarithmique :

$$\varphi = \frac{\pi R \Delta^2}{4L}$$

l est une fonction de 5 paramètres, on doit déterminer qui est variable et qui est constant on a :

3 variables : R, Δ, L

deux constant : $\pi, 4$

$$\varphi = \frac{\pi R \Delta^2}{4L}$$

1ère Introduire logarithme dans la fonction et simplifier :

$$\log(\varphi) = \log\left(\frac{\pi R \Delta^2}{4L}\right)$$

$$\log(\varphi) = \log(\pi) + \log(R) + \log(\Delta^2) - \log(4) - \log(L)$$

$$\boxed{\log(\varphi) = \log(\pi) + \log(R) + 2\log(\Delta) - \log(4) - \log(L)}$$

2ème Introduire la dérivée pour la fonction simplifiée :

$$[\log(\varphi)]' = \cancel{[\log(\pi)]'}^{0} + [\log(R)]' + [2\log(\Delta)]' - \cancel{[\log(4)]'}^{0} - [\log(L)]'$$

$$\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{dR}{R} + 2\frac{d\Delta}{\Delta} + \frac{dL}{L}$$

3ème Passons à la notion absolue :

$$\left|\frac{d\varphi}{\varphi}\right| = \left|\frac{dR}{R}\right| + 2\left|\frac{d\Delta}{\Delta}\right| + \left|\frac{dL}{L}\right|$$

$$\boxed{\frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{2\Delta\Delta}{\Delta} + \frac{\Delta L}{L}} \quad \cdots (1)$$

2ème Méthode différentielle totale :

$$\varphi = \frac{\pi R \Delta^2}{4L}$$

On a trois variables : Δ, R, Δ et deux constantes $4, \pi$

$$d\varphi(\pi, R, L, 4, \Delta) = \cancel{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \pi}\right) d\pi} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) dR + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \Delta}\right) d\Delta \cancel{+ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial 4}\right) d4} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial L}\right) dL$$

$$d\varphi(R, \Delta, L) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) dR + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \Delta}\right) d\Delta + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial L}\right) dL$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = \frac{\pi \Delta^2}{4L} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \Delta} = \frac{2\pi R \Delta}{4L} = \frac{\pi R \Delta}{2L} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial L} = \frac{-\pi R \Delta^2}{4L^2}$$

alors $d\varphi = \frac{\pi \Delta^2}{4L} dR + \frac{\pi R \Delta}{2L} d\Delta - \frac{\pi R \Delta^2}{4L} dL$

On passe à la notion absolue :

$$|d\varphi| = \left|\frac{\pi \Delta^2}{4L}\right| \Delta R + \left|\frac{\pi R \Delta}{2L}\right| \Delta \Delta + \left|-\frac{\pi R \Delta^2}{4L^2}\right| \Delta L$$

$$\Delta \varphi = \frac{\pi \Delta^2}{4L} \Delta R + \frac{\pi R \Delta}{2L} \Delta \Delta + \frac{\pi R \Delta^2}{4L^2} \Delta L$$

$$\frac{\Delta \varphi}{\varphi} = \frac{1}{\varphi}\left[\frac{\pi \Delta^2}{4L} \Delta R + \frac{\pi R \Delta}{2L} \Delta \Delta + \frac{\pi R \Delta^2}{4L^2} \Delta L\right]$$

$$= \frac{\cancel{4L}}{\cancel{\pi} R \cancel{\Delta^2}} \cdot \frac{\cancel{\pi \Delta^2}}{\cancel{4L}} \Delta R + \frac{\cancel{4L}^{2}}{\cancel{\pi R} \Delta^2} \cdot \frac{\cancel{\pi R \Delta}}{\cancel{2L}} \Delta \Delta + \frac{\cancel{\pi R \Delta^2}}{\cancel{4} L^2} \cdot \frac{\cancel{4} L}{\cancel{\pi R \Delta^2}} \Delta L$$

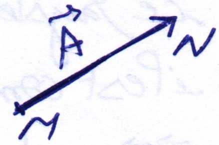
$$\boxed{\frac{\Delta \varphi}{\varphi} = \frac{\Delta R}{R} + \frac{2\Delta \Delta}{\Delta} + \frac{\Delta L}{L}} \quad \ldots (2)$$

On constate que les deux méthodes mènent au même résultat.

III Les vecteurs :

1) Définition d'un vecteur

Un vecteur $\vec{MN}$ un segment orienté qui possède de :



* Une origine M
* Un module $\vec{MN}$
* Une direction : celle de la droite (MN)
* Un sens : de M vers N

Remarque : $\vec{A} = \vec{MN}$ on peut désigner un vecteur par une seule lettre

2) Propriétés d'un vecteur :

1- Deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont égaux : s'ils ont la même direction, le même module et le même sens.

2- Deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont opposées s'ils ont la même direction, même module mais des sens opposés

3- La somme de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

4- La différence de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$

5- Le produit d'un vecteur $\vec{A}$ par scalaire P est un vecteur

Si P positif alors $\vec{C} = P\vec{A}$ où $\vec{C}$ à même sens de $\vec{A}$

Si P négatif alors $\vec{C} = -P\vec{A}$ où $\vec{C}$ sens opposé de $\vec{A}$

Si $P = 0$ alors $\vec{C} = \vec{0}$ ($\vec{0}$: vecteur nul).

Remarque :

$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \longrightarrow$ commutative

$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \longrightarrow$ Associative

$P(\vec{A} + \vec{B}) = P\vec{A} + P\vec{B} \longrightarrow$ distributive

3) Intensité (Module) :

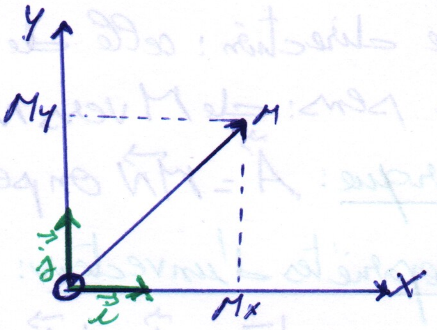
On appelle le module d'un vecteur $\vec{AB}$ désigné $|\vec{AB}| = \|\vec{AB}\|$ la longueur de AB

cas particulier : Si $|\vec{AB}| = 1$ donc $\vec{AB}$ est un vecteur unitaire (ڤوحدى)

4) Système de coordonnées cartésienne :

a- Système de coordonnés bidimentionnel :

ce système est utilisé pour repérer d'un point dans le plan, il est composé de deux axes orthogonaux du plan OX et OY $\vec{i},\vec{j}$ vecteur unitaire respectivement dans les direction des deux vecteurs (axes) OX et OY alors :

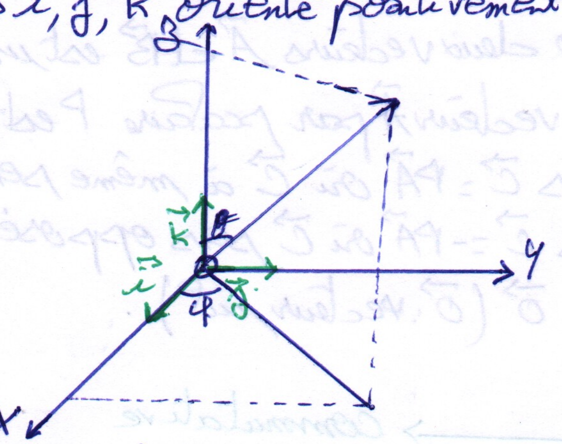


$$\vec{OM} = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y$$

$$\begin{cases} OM_x = x\vec{i} \\ OM_y = y\vec{j} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}}$$

b- Système de coordonnés tridimentionnelles :

-ce système est utilisé pour repérer d'un point dans l'espace, il est composé de trois axes du plan OX, OY et OZ mené par des vecteurs unitaires $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ orienté positivement.



$$\vec{OM} = \vec{OM}_x + \vec{OM}_y + \vec{OM}_z$$

$$\begin{cases} \vec{OM}_x = x\vec{i} \\ \vec{OM}_y = y\vec{j} \\ \vec{OM}_z = z\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

c- composants d'un vecteur :

Soit un vecteur $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ où A_1, A_2, A_3 sont les composantes du vecteur $\vec{A}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^3}$$

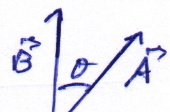
ex: $\vec{A} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

5) Produit scalaire :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est défini par :

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\underbrace{(A.B)}_{\theta}$$



$$\vec{A} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k} \qquad \vec{A}\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k} \qquad \vec{B}\begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}).(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k})$$

$$= x_a x_b \cancelto{1}{\vec{i}\vec{i}} + x_a y_b \cancelto{0}{\vec{i}\vec{j}} + x_a z_b \cancelto{0}{\vec{i}\vec{k}} + y_a x_b \cancelto{0}{\vec{j}\vec{i}} + y_a y_b \cancelto{1}{\vec{j}\vec{j}} + y_a z_b \cancelto{0}{\vec{j}\vec{k}}$$

$$+ z_a x_b \cancelto{0}{\vec{k}\vec{i}} + z_a y_b \cancelto{0}{\vec{k}\vec{j}} + z_a z_b \cancelto{1}{\vec{k}\vec{k}}$$

où

$$\vec{i}\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\cos(\vec{i},\vec{i}) = 1$$

$$\vec{i}\vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\cos(\vec{i},\vec{j}) = 0$$

$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}$$

cas particulier : Si $\vec{A} = \vec{0}$ ou $\vec{B} = \vec{0}$ alors $\vec{A}.\vec{B} = 0$

$\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow (\vec{A},\vec{B}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 0$

$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow (\vec{A},\vec{B}) = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = A.B$

Propriétés du produit scalaire :

commutatif $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

distributif $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}.\vec{B}) + (\vec{A}.\vec{C})$

Exemple produit scalaire :

Soit deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$
$$\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

calculer l'angle entre $(\hat{A.B})$?

Sol :

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \cos(\hat{A.B})$$

$$\cos(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|\,|\vec{B}|}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = 3\times(-1) + 2\times 2 + (-1)\times 3 = -2$$

$$\cos(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{-2}{14} \Rightarrow \theta = 98°$$

6. Produit vectoriel :

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \wedge \vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}| \sin(\vec{A}.\vec{B})$$

$$\vec{A} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$$
$$\vec{B} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\vec{i}} & \overset{-}{\vec{j}} & \overset{+}{\vec{k}} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{i}(y_a z_b - z_a y_b) - \vec{j}(x_a z_b - z_a x_b) + \vec{k}(x_a y_b - y_a x_b)}$$

Exemples produit vectoriel :

Soit deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i}\left(3\times2-(-1)\times2\right) - \vec{j}\left(3\times3-(-1)\times(-1)\right) + \vec{k}\left(3\times2-(-1)\times2\right)$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = 8\vec{i} - 8\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$|\vec{A}.\vec{B}| = \sqrt{64+64+64} = \sqrt{192} = 13{,}85$$

$$\sin(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{|\vec{A}||\vec{B}|}{|\vec{A}\wedge\vec{B}|} = \frac{14}{13{,}85} = 1{,}01$$

Remarque :

1- $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$ ⟶ Anticommutatif (ضد تبديلي)

2- $\vec{A} \wedge (\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A} \wedge \vec{B}) + (\vec{A} \wedge \vec{C})$ ⟶ Distributif

3- le produit vectoriel est un vecteur et non scalaire

4- Si $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ et si les deux vecteurs ne sont pas nuls alors $\vec{A} // \vec{B}$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j} \end{cases}$$

7. Dérivé d'un vecteur :

Soit $\vec{A}(x) = A_1(x)\vec{i} + A_2(x)\vec{j} + A_3(x)\vec{k}$

La dérivé de $\vec{A}(x)$ par rapport à la variable x est :

$$\boxed{\frac{d\vec{A}(x)}{dx} = \frac{d_1(x)}{dx}\vec{i} + \frac{d_2(x)}{dx}\vec{j} + \frac{d_3(x)}{dx}\vec{k}}$$

- Pour la derivé seconde:

$$\boxed{\frac{d^2A(x)}{d^2(x)}=\frac{d_1^2(x)}{d^2x}\vec{i}+\frac{d_2^2(x)}{d^2x}\vec{j}+\frac{d_3^2(x)}{d^2x}\vec{k}}$$

exemple:

$$A(x)=(2x^2-3x)\vec{i}+5\cos(x)\vec{j}-3e^{2x}\vec{k}$$

$$\frac{dA(x)}{dx}=(4x-3)\vec{i}-5\sin(x)\vec{j}-6e^{2x}\vec{k}$$

$$\frac{d^2A(x)}{dx}=4\vec{i}-5\cos(x)\vec{j}-12e^{2x}\vec{k}$$

7.a) Les caractéristiques des derivées d'un vecteur:

$$\frac{d(\vec{A}+\vec{B})}{dx}=\frac{d\vec{A}}{dx}+\frac{d\vec{B}}{dx}$$

$$\frac{d(\lambda\vec{A})}{dx}=\lambda.\frac{d\vec{A}}{dx}+\frac{d\lambda}{dx}\vec{A}$$

$$\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{dx}=\frac{d\vec{A}}{dx}\vec{B}+\frac{d\vec{B}}{dx}\vec{A}$$

$$\frac{d(\vec{A}\wedge\vec{B})}{dx}=\frac{d\vec{A}}{dx}\wedge\vec{B}+\frac{d\vec{B}}{dx}\wedge\vec{A}$$

$$\frac{d\vec{A}(\vec{B}\wedge\vec{C})}{dx}=\frac{d\vec{A}}{dx}(\vec{B}\wedge\vec{C})+\vec{A}\left(\frac{d\vec{B}}{dx}\wedge\vec{C}\right)+\vec{A}\left(B\wedge\frac{d\vec{C}}{dx}\right)$$

8) Opération physique:

On definit nabla $\vec{\nabla}$ (nabla est un vecteur) par:

$$\boxed{\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

où $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$ sont respectivement les derivés partielles par rapport à x, y, z

Le Gradient (التدرج)

$f(x,y,z)$ est une fonction scalaire, son gradient est un vecteur défini comme suit:

$$\boxed{\vec{grad}\,f=\vec{\nabla}(f)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}$$

Ex: calculer le gradient de la fonction $f(x,y,z) = f = 3x^2y^3z$

Sol:

$$\vec{grad}(f) = \vec{\nabla}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}(f) = 6xy^3z\vec{i} + 9x^2y^2z\vec{j} + 3x^2y^3\vec{k}$$

Le divergence: (التباعد)

Si $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ est une fonction vectorielle, sa divergence est un scalaire écrit comme suit:

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla}.\vec{A}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{div(\vec{A}) = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}}$$

ex: calculer la divergence de la fonction vectorielle.

$$\vec{V}(x,y,z) = 2xy\vec{i} - 3yz^2\vec{j} + 9xy^3\vec{k}$$

$$div(\vec{V}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2xy \\ -3yz^2 \\ 9xy^3 \end{pmatrix} = \frac{\partial 2xy}{\partial x} - \frac{\partial 3yz^2}{\partial y} + \frac{\partial 9xy^3}{\partial z}$$

$$= 2y - 3z^2 + 0$$

alors $\boxed{div(\vec{V}) = 2y - 3z^2}$

Rotationnel (الدوار):

Si $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ est une fonction vectorielle son rotationnel est un vecteur défini par:

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{+}{\vec{i}} & \overset{-}{\vec{j}} & \overset{+}{\vec{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

ex: (TD)

Moment d'un vecteur:

On appelle le moment d'un vecteur $\vec{A}$ par rapport au point O le produit vectoriel

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

Les points O et A et le vecteur $\vec{F}$ appartient au plan (π) et $\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} \perp (\pi)$

ex: $\vec{F} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

$\vec{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} = \vec{OA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{\vec{F}/O} = (4.4 - (-3)\times 5)\vec{i} - (2\times 4 - 2\times 5)\vec{j} + (2\times(-3) - 2\times 4)\vec{k}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{O} = 31\vec{i} + 2\vec{j} - 14\vec{k}$$

Le Laplacien :

Le laplacien d'une fonction scalaire est égal à la divergence de son gradient :

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla}^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Le laplacien d'une fonction vectorielle est égal à la divergence de son gradient :

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{\nabla}(\vec{V}) = \vec{\nabla}^2(\vec{V}) = \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\vec{k}}$$