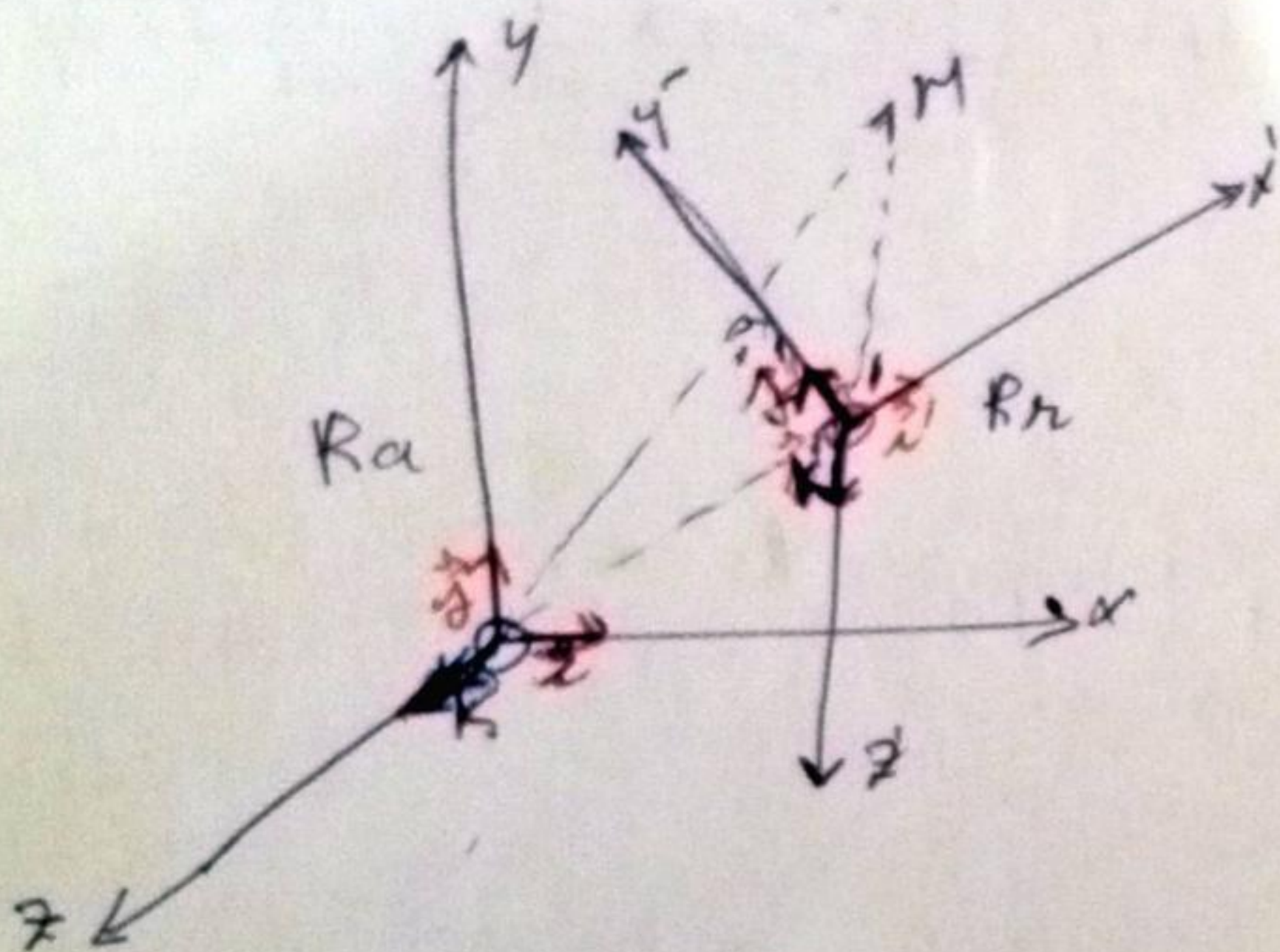


mvmt relatif

3) Mouvement relatif

- Le mouvement d'un solide est dit relatif, s'il est défini ou décrit par rapport à un référentiel relatif
- Un référentiel en mvmt est un référentiel relatif
- A la notion de mvmt relatif, correspondent les notions de vitesse relative et d'accélération relative.

1. a vecteur de position



Le vecteur de position $\vec{OM}$ définit la position, à l'instant (t) du point (M) par rapport au repère de référence (fixe) $R(O, x, y, z)$

$$\vec{OM}|_R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Le vecteur de position $\vec{O'M}$ définit la position, à l'instant (t) du point (M) par rapport au repère de référence (mobile) $R'(O', x', y', z')$

$$\vec{O'M}|_{R'} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

Le vecteur position $\vec{O'O}$ définit la position, à l'instant (t) du repère (mobile) $R'(O', x', y', z')$ par rapport au repère de référence (fixe) $R(O, x, y, z)$

$$\vec{O'O} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$$

vector de position:

vector de position $\vec{OM}$

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{O'M}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{O'M}}{dt} = \frac{d(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{O'M}}{dt} = \left[\frac{d(x')}{dt} \vec{i} + \frac{d(y')}{dt} \vec{j} + \frac{d(z')}{dt} \vec{k} \right] + \left[x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt} \right]$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \left[\frac{d(x')}{dt} \vec{i} + \frac{d(y')}{dt} \vec{j} + \frac{d(z')}{dt} \vec{k} \right] + \left[x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt} \right]$$

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \left[\frac{d(x')}{dt} \vec{i} + \frac{d(y')}{dt} \vec{j} + \frac{d(z')}{dt} \vec{k} \right] + \left[\frac{d\vec{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}}{dt} + y' \frac{d\vec{j}}{dt} + z' \frac{d\vec{k}}{dt} \right]$$

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e}$$

- Mouvement du point M par rapport R s'appelle *mv absolute*
- " " " " R' " *mv relative*
- " " " " R " *mv entrainement*

Mouvement de rotation:

cas de mv de rotation:

$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ car ω est variable avec le temps, alors

$\omega(t) = \omega(t) \vec{k}$ représente de rotation instantanée

La vitesse absolue

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{OH}}{dt} \Big|_R$$

La vitesse absolue nous renseigne sur le mouvement (M) par rapport au repère fixe $R(OxyZ)$

La vitesse relative $\vec{V}_R$ nous décrit le mouvement (M) par rapport au repère mobile $R'(O'x'y'z')$

$$\vec{V}_R = \frac{d\vec{OH}}{dt} \Big|_{R'} = \frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}'$$

L'accélération relative

$$\vec{a}_R = \frac{d\vec{V}_R}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2} \vec{k}'$$

La vitesse relative d'entraînement

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} \Big|_R + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}$$

La $\vec{V}_e$ nous permet de déterminer la vitesse du mouvement du repère mobile $R'(O'x'y'z')$ par rapport au repère fixe $R(OxyZ)$.

• Lorsque il y a une rotation $\vec{\omega}$ liée au repère de rotation, la formule de Poisson nous permet d'écrire:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}' \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}' \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}'$$

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + x'(\vec{\omega} \wedge \vec{i}') + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{j}') + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k}')$$

$$\frac{d\vec{OO'}}{dt} + \left[\vec{\omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') \right]$$

$$\boxed{\vec{V}_e = \frac{d\vec{OP}}{dt} + [\vec{\omega} \wedge \vec{OP}]}$$

a. Vitesse $\vec{V}$ de translation et rotation

$$\vec{V}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge \vec{O'H})$$

b. Vitesse $\vec{V}$ de translation pure car il n'y a pas de rotation
 $(\vec{\omega} = \vec{0}) \quad \vec{V}_e = \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_R$

c. Vitesse $\vec{V}$ de rotation pure.

Les deux repères sont superposés, et les ont la même origine

$$(\vec{O} = \vec{O'} = \vec{OO'} = \vec{0}) \quad \vec{V}_e = \vec{\omega} \wedge \vec{O'H} \Big|_{R'}$$

Vecteurs accélérations

Accélération absolue

$$\vec{y}_a = \left. \frac{d^2 \vec{OH}}{dt^2} \right|_R = \left. \frac{d\vec{V}_a}{dt^2} \right|_R$$

Accélération relative

$$\vec{y}_r = \left. \frac{d^2 \vec{O'H}}{dt^2} \right|_{R'} = \left. \frac{d\vec{V}_r}{dt^2} \right|_{R'}$$

Accélération d'entraînement

$$\vec{y}_e = \left. \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} \right|_R + \left. \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'H} \right) \right|_R + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'H}) \Big|_R$$

Accélération de Coriolis

cette accélération est due à l'effet de rotation du repère

$$\vec{y}_c = \left. (2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r) \right|_{R'}$$

Relation entre les accélérations:

$$\underbrace{\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}}_{\vec{y}_a} \Big|_R = \underbrace{\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}}_{\vec{y}_r} \Big|_{R'} + \underbrace{\frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2}}_{\vec{y}_e} \Big|_R + \underbrace{\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} \right)}_{\vec{y}_c} \Big|_R + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) \Big|_{R'}$$

$$+ 2 \underbrace{(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r)}_{\vec{y}_c} \Big|_{R'}$$

$$\boxed{\vec{y}_a = \vec{y}_r + \vec{y}_e + \vec{y}_c}$$

Démonstration:

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} + \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt} \vec{k}' \right) \right\} + \left\{ \frac{d}{dt} \left(x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) \right\}$$

$$= \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} + \left\{ \left(\frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}' \right) + \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) + \left(x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \right) \right\}$$

$$\underbrace{\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}}_{\vec{y}_a} = \underbrace{\frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2}}_{\vec{y}_e} + \underbrace{\left(x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} \right)}_{\vec{y}_c} + \underbrace{\left(\frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}' \right)}_{\vec{y}_r} + \underbrace{\left\{ 2 \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) \right\}}_{\vec{y}_c}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot x' \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2} &= x' \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{i}}{dt} \right) + y' \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{j}}{dt} \right) + z' \frac{d}{dt} \left(\frac{d \vec{k}}{dt} \right) \\
 &= x' \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + y' \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + z' \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{k}) \\
 &= \left(\frac{d\omega}{dt} \wedge x' \vec{i} \right) + \left(\frac{d\omega}{dt} \wedge y' \vec{j} \right) + \left(\frac{d\omega}{dt} \wedge z' \vec{k} \right) \\
 &\quad + (x' \cdot [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{i})]) + (y' \cdot [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{j})]) + (z' \cdot [\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{k})]) \\
 &= \left[\frac{d\omega}{dt} (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}) \right] + \left[\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k})) \right] \\
 &= x' \frac{d^2 \vec{i}}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}}{dt^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{d\omega}{dt} (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k}) \right] + \left[\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (x' \vec{i} + y' \vec{j} + z' \vec{k})) \right] \\
 \vec{y}_R &= \left(\frac{d\omega}{dt} \wedge \vec{O'H} \right) + \left(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'H}) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cdot 2 \left[\frac{dx'}{dt} \frac{d \vec{i}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d \vec{j}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d \vec{k}}{dt} \right] &= 2 \left[\frac{dx'}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{i}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{dy'}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + \frac{dz'}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{k}) \right] \\
 &= 2 \left[\vec{\omega} \wedge \frac{dx'}{dt} \vec{i} + \vec{\omega} \wedge \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \vec{\omega} \wedge \frac{dz'}{dt} \vec{k} \right] \\
 &= 2 \left[\vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt} \vec{i} + \frac{dy'}{dt} \vec{j} + \frac{dz'}{dt} \vec{k} \right) \right] \\
 \vec{y} &= 2(\vec{\omega} \wedge \vec{V}_R)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{also } \vec{y}_a &= \vec{y}_R + \left\{ \frac{d^2 \vec{O'O}}{dt^2} + \left[\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O'H} \right) + \left(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'H}) \right) \right] \right\} \\
 \vec{y} &= \vec{y}_R + \vec{y}_e + \vec{y}_a \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{O'O} = at \vec{i} \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \omega \vec{k} \\ \vec{O'H} = bt^2 \vec{j} \quad \vec{\omega} = \omega \vec{k} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$