

Solution Fiche TD N°3

Ex 1:

1) Tracer $a_x(t)$

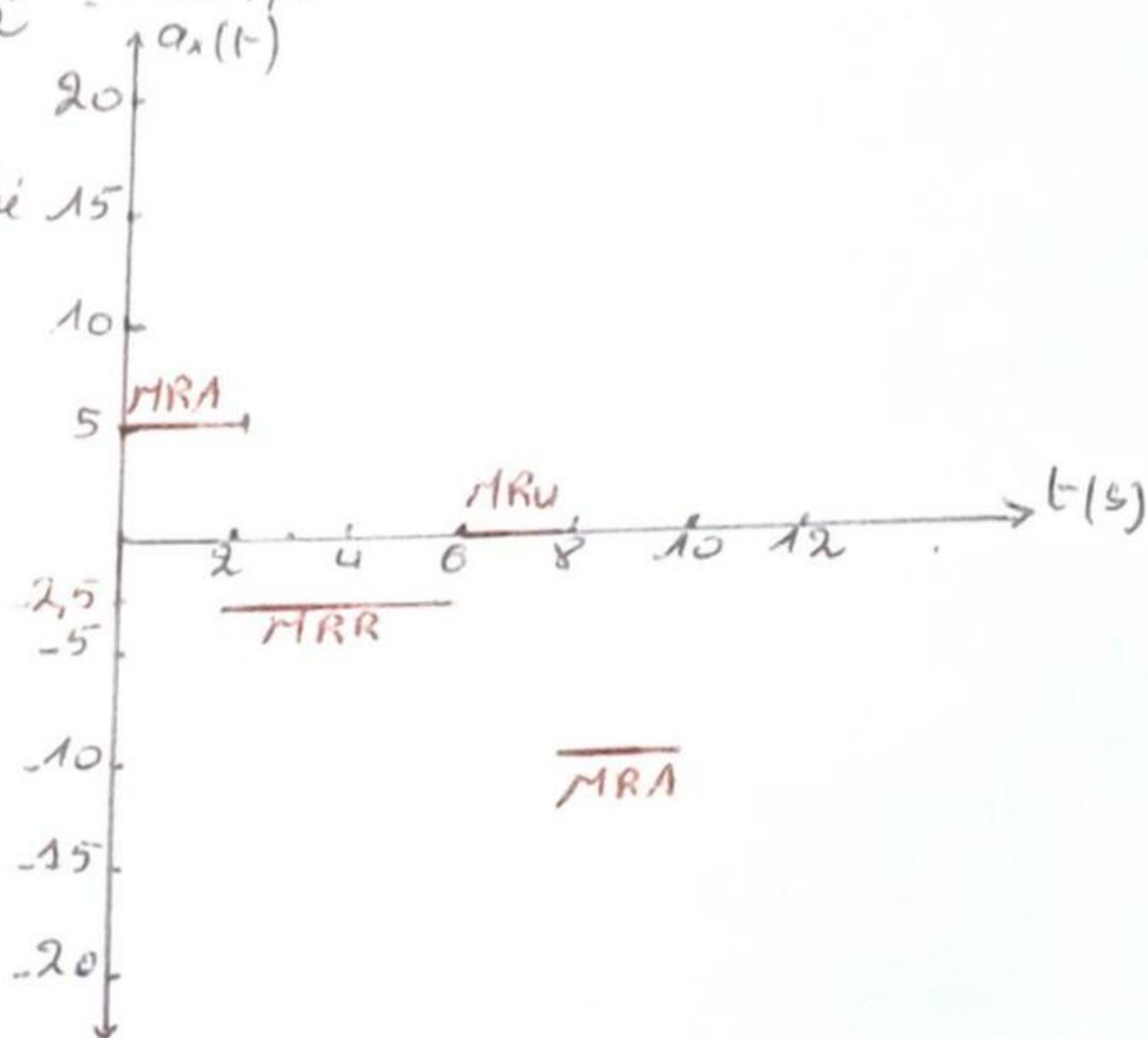
$a_x(t)$: l'accélération

$$t \in [0, 2] : a_{1x} = \frac{\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{10 - 0}{2 - 0} = 5 \text{ m/s}$$

$$t \in [2, 6] : a_{2x} = \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = \frac{0 - 10}{6 - 2} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} = -2,5 \text{ m/s}$$

$$t \in [6, 8] : a_{3x} = \frac{\Delta V_3}{\Delta t} = 0 \text{ m/s}$$

$$t \in [8, 10] : a_{4x} = \frac{\Delta V_4}{\Delta t} = \frac{-20 - 0}{10 - 8} = -\frac{20}{2} = -10 \text{ m/s}$$



$a \cdot v > 0 \xrightarrow{\text{MRA}}$ mouvement rectiligne accéléré

$a \cdot v < 0 \xrightarrow{\text{MRR}}$ " " " " retardé

$a \cdot v = 0 \xrightarrow{\text{MRU}}$ " " " " Uniforme

2) Ecrire l'éq. de $v_x(t)$ et $x(t)$

Avec $t_0 = 0 \text{ s}$ et $x_0 = 0 \text{ m}$

$$t \in [0, 2] : a_1 = 5 \text{ m/s}$$

$$a_1 = \frac{dv_1(t)}{dt} \Rightarrow dv_1(t) = a_1 dt \Rightarrow \int_{t_0}^t dv_1(t) = \int_{t_0}^t a_1 dt \Rightarrow \int_{t_0}^t dv_1(t) = \int_{t_0}^t 5 dt$$

$$\Rightarrow [v(t)]_{t_0}^t = 5 [t]_{t_0}^t \Rightarrow v(t) - v(t_0) = 5(t - t_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = 5t}$$

$$v_1(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} \Rightarrow dx_1(t) = v_1(t) dt \Rightarrow \int_{t_0}^t dx_1(t) = \int_{t_0}^t v_1(t) dt = \int_{t_0}^t 5t dt$$

$$\Rightarrow [x_1(t)]_{t_0}^t = \frac{1}{2} 5(t^2 - t_0^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1(t) = \frac{5}{2} t^2}$$

de la même manière on trouve:

$$t \in [2, 6] \quad v_2(t) = -\frac{5}{2}t + 15$$

$$x_2(t) = -\frac{5}{4}t^2 + 15t - 15$$

$$t \in [6, 8] \quad v_3(t) = 0 \text{ m/s}$$

$$x_3(t) = x_2(6) = 30 \text{ m} = \text{constante}$$

$$t \in [6, 10] : v_4(t) = -10t + 80$$

$$x_4(t) = -5t^2 + 80t - 290$$

3) grapher $x(t)$

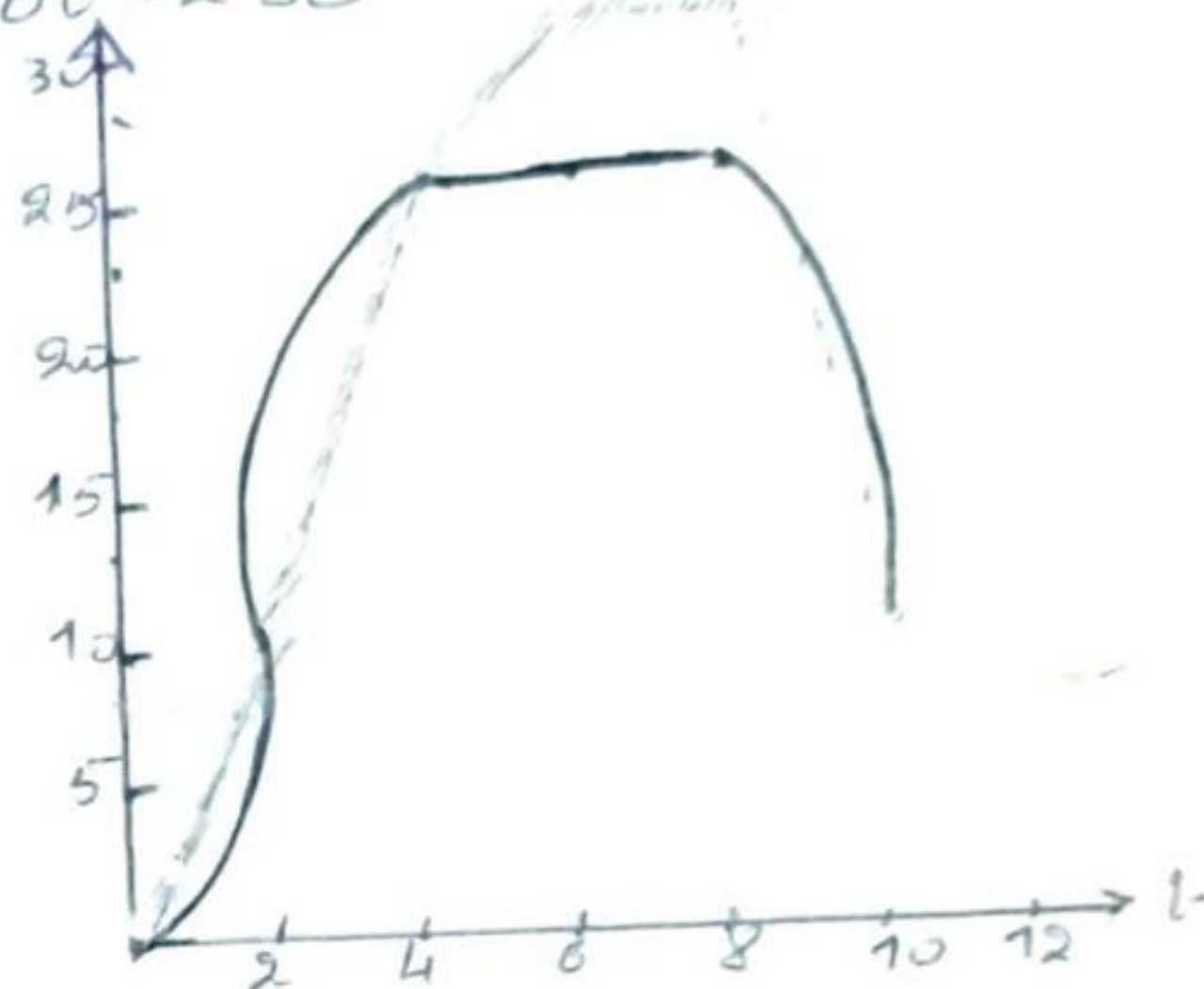
$$x(2) = x_1(2) = 10 \text{ m}$$

$$x(4) = x_2(4) = 25 \text{ m}$$

$$x(6) = x_2(6) = 30 \text{ m}$$

$$x(8) = x_3(8) = 30 \text{ m}$$

$$x(10) = x_4(10) = 10 \text{ m}$$



4) $x(t) = 0$?

graphiquement le point où $x(t) = 0$ est pour $t = 0$

Analytiquement:

$$t \in [0, 2] \quad x_1(t) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2}t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$t \in [2, 6] \quad x_2(t) = 0 \Rightarrow -\frac{5}{4}t^2 + 15t - 15 = 0$$

$$\Delta = 150 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1,89 \notin [2, 6] \\ t_2 = 4,10 \in [2, 6] \end{cases}$$

$$t \in [6, 8] \quad x_3(t) = \text{constante} = 30 \text{ m} \neq 0$$

$$t \in [8, 10] \quad x_4(t) = 0 \Rightarrow -5t^2 + 80t - 290 = 0 \Rightarrow \Delta = 600$$

$$\Delta \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 10,44 \notin [8, 10] \\ t_2 = 5,55 \notin [8, 10] \end{cases}$$

donc le seul point pour $x(t) = 0$ est $t = 0$

leur vitesse aux instants $t=4s$ et $t=9s$.

$$\begin{aligned} V(4) &= V_2(t) = -\frac{5}{2}t + 15 \text{ ou} \\ &= V_2(4) = -\frac{5}{2}(4) + 15 \\ &= V_2(4) = 5 \text{ m/s alors } \boxed{\vec{V}(4) = 5 \vec{i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(9) &= V_4(t) = -10t + 80 \text{ ou} \\ &= V_4(9) = -10(9) + 80 \\ &= V_4(9) = -10 \text{ m/s alors } \boxed{\vec{V}(9) = -10 \vec{i}} \end{aligned}$$

• distance parcourue de $t \in [0, 10]$

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + |\Delta x_4| + |\Delta x_5| \\ &= |10| + |5| + |5| + |0| + |-20| = 40 \text{ m} \end{aligned}$$

Ex 2: Le mouvement d'un point matériel est défini dans un repère cartésien par ses deux équations horaires :

$$x = a \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y = a \cos(\omega t + \varphi)$$

Que est la trajectoire suivie?

• On relève au carré les deux équations puis on fait la somme membre à membre pour aboutir à l'équation d'un cercle de rayon a .

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \\ y^2 &= a^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \end{aligned} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

$$\text{parce } \sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1$$

$$\begin{aligned} M(t) = \begin{cases} x = 3 \sin(\omega t) \Rightarrow \sin 3\omega t = \frac{x}{3} \Rightarrow \sin^2(3\omega t) = \frac{x^2}{9} \\ y = 3 \cos(\omega t) \Rightarrow \cos 3\omega t = \frac{y}{3} \Rightarrow \cos^2(3\omega t) = \frac{y^2}{9} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\sin^2(3\omega t) + \cos^2(3\omega t) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 9}$$

c'est une équation d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 3.

à $t=0$ départ

$$\text{à } t=0 \quad M_0 \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ y=3 \end{array} \right.$$



Pour le sens on a:

$$\text{à } t = \frac{\pi}{2} \quad M_1 \left\{ \begin{array}{l} x=3 \\ y=0 \end{array} \right. \text{ on } t_1 > t_2$$

2) calculer la module de la vitesse

$$\vec{OM} \left\{ \begin{array}{l} x(t) = 3 \sin 3\omega t \\ y(t) = 3 \cos 3\omega t \end{array} \right.$$

$$\vec{V} \left\{ \begin{array}{l} v_x(t) = 9\omega \cos 3\omega t \\ v_y(t) = -9\omega \sin 3\omega t \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 9\omega \text{ m/s}$$

3) calculer a_T et a_N

la composante tangentielle : $a_T = \frac{dV}{dt} = 0$

la composante Normale : $\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \chi \vec{a}_N = \vec{a}$

$$\vec{a} \left\{ \begin{array}{l} a_x(t) = -27\omega^2 \sin 3\omega t \\ a_y(t) = -27\omega^2 \cos 3\omega t \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = (3\sqrt{3})\omega^2 = 27\omega^2 \text{ m/s}^2$$

avec le mouvement uniforme pour $a_T = 0$.

Sol Ex3. O se déplace par l'axe Oy avec une accélération
 alors: $\boxed{\vec{OO'} = \frac{1}{2}at^2 \vec{e}_y}$

la vitesse angulaire constante autour de l'axe Oz

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \omega \vec{u}_z$$

$$\vec{OM} \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \vec{OM} = t^2 \vec{u}_x + t \vec{u}_y$$

déterminer dans le repère mobile la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

1) vitesse relative

$$\vec{v}_r = \frac{d\vec{OM}}{dt} = 2t \vec{u}_x + \vec{u}_y$$

vitesse d'entraînement

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{OA}}{dt} + x \frac{d\vec{e}_1}{dt} + y \frac{d\vec{e}_2}{dt} + z \frac{d\vec{e}_3}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v}_e = \frac{d\vec{OA}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge \vec{AM})}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{AM}}{dt} + \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge \vec{AM}) \right)$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = at \vec{e}_y + \omega t^2 \vec{u}_y - \omega t \vec{u}_x$$

$$= at [\sin(\omega t) \vec{u}_x + \cos(\omega t) \vec{u}_y] + \omega t^2 \vec{u}_y - \omega t \vec{u}_x$$

$$\boxed{\vec{v}_e = (at \sin(\omega t) - \omega t + 2t) \vec{u}_x + (at \cos(\omega t) - \omega t^2 + t) \vec{u}_y}$$

absolue

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r = (\alpha t \sin(\omega t) - \omega t + 2t) \vec{u}_x + (\alpha t \cos(\omega t) - \omega t^2 + 1) \vec{u}_y$$

Accélération d'entraînement

$$\begin{aligned} \vec{a}_e &= \frac{d^2 \vec{O} \vec{O}'}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{O} \vec{O}' \right) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O} \vec{O}') \\ &= \frac{d^2 \vec{O} \vec{O}'}{dt^2} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O} \vec{O}') \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}_e = a \vec{j} - \omega^2 t^2 \vec{u}_x - \omega^2 t \vec{u}_y}$$

$$\vec{a}_e = a (\sin(\omega t) \vec{u}_x + \cos(\omega t) \vec{u}_y) - \omega^2 t^2 \vec{u}_x - \omega^2 t \vec{u}_y$$

$$\boxed{\vec{a}_e = a (\sin(\omega t) + \omega^2 t^2) \vec{u}_x + (a \cos(\omega t) - \omega^2 t) \vec{u}_y}$$

Accélération de Coriolis

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2\omega \vec{u}_z \wedge (2t \vec{u}_x + \vec{u}_y)$$

$$\boxed{\vec{a}_c = 4\omega t \vec{u}_y - 2\omega \vec{u}_x}$$

Accélération absolue:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\boxed{\vec{a}_a = (\alpha \sin(\omega t) - \omega^2 t^2 + 2 - 2\omega t) \vec{u}_x + (\alpha \cos(\omega t) - \omega^2 t + 4\omega t) \vec{u}_y}$$