AVANT PROPOS

Ce polycopié de la physique 4 intitulé **mécanique rationnelle** est une matière de l'unité fondamentale du socle commun du domaine sciences et techniques. Elle s'adresse aux étudiants de troisième semestre licence nouveau régime (LMD). Le contenu de ce polycopié regroupe le programme enseigné dans le département de Génie Mécanique et Génie Civil. Il s'agit en particulier des étudiants de l'institut de science et de Technologie – Centre Universitaire de Relizane (C.U.R). Il est rédigé sous forme des applications résolus et des exercices supplémentaires non résolus.

Ce recueil d'exercices corrigés couvre d'une manière substantielle le programme de deux chapitres. Après un rappel mathématique sur les vecteurs, le chapitre un traite la statique du solide ensuite le chapitre deux concerne les notions sur le centre de masse, le moment d'inertie et le produit d'inertie ; leurs intérêts mécaniques apparaîtront dans l'étude de la cinétique et de la dynamique.

L'objectif de ce polycopié est essentiellement de mettre à la disposition de l'étudiant un document de travail qui lui permet d'illustrer le cours sur la mécanique rationnelle par une série d'exercices types de degré de difficulté variable.

Conscients des erreurs que peut contenir ce polycopié nous tenons à remercier tout ceux qui nous feront part de leurs critiques ou suggestions dans le but d'améliorer son contenu.

Dr.CHAOUCH DJAMEL

Département : Génie Mécanique

Institut : Sciences et de Technologies

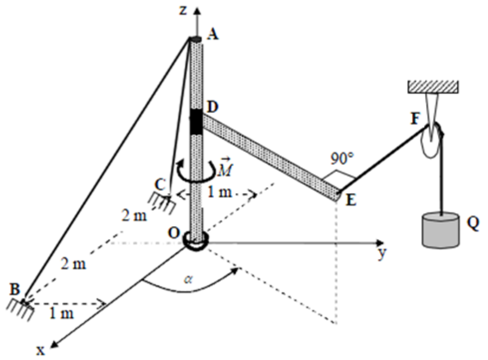
Centre Universitaire – Relizane (CUR)

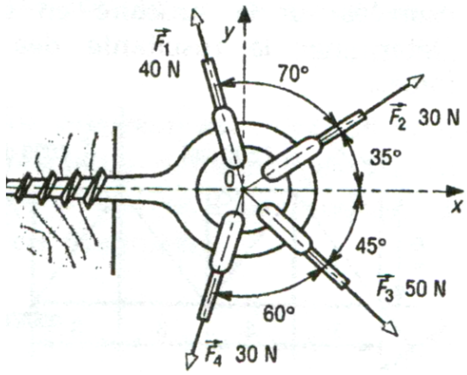
SOMMAIRE

Centre **U**niversitaire de **R**elizane - ahmed zabana

Institut des **S**ciences et **T**echnologies

Département de Génie Mécanique





Polycopie

Mécanique Rationnelle

EXERCICES CORRIGES

(Unité Fondamentale-- Domaine Sciences et Technique – S3 Licence LMD)

Dr. CHAOUCH Djamel

Maître de Conférences "B"

Avril 2016

Exercice 01 :

Soit $\vec{A}(4, 6, -5)$ et $\vec{B}(3, 2, -8)$ calculer : $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{A}-\vec{B}$, $\|\vec{A}\|$, $\|\vec{B}\|$ et $\cos(\vec{A}, \vec{B})$

Solution :

$\vec{A}(4, 6, -5)$; $\vec{B}(3, 2, -8)$

$$\vec{A} + \vec{B} = (4\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}) + (3\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k})$$

$$\vec{A} + \vec{B} = 7\vec{i} + 8\vec{j} - 13\vec{k}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (4\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}) - (3\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k})$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\|\vec{A}\| = A = \sqrt{4^2 + 6^2 + (5)^2} \Rightarrow A = \sqrt{77} = 8,77$$

$$\|\vec{B}\| = B = \sqrt{3^2 + 2^2 + (8)^2} \Rightarrow A = \sqrt{77} = 8,77$$

$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = ?$

Le produit calcaire de deux vecteurs :

$$\vec{A}, \vec{B} = A.B.\cos(\vec{A}, \vec{B}) \Rightarrow \cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{A.B}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (4\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k}).(3\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k}) \Rightarrow \vec{A}.\vec{B} = 64$$

Donc : $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{64}{77} = 0.831$

Exercice2 :

Deux points A et B, ont pour coordonnées cartésiennes dans l'espace : A(2, 3, -3), B(5, 7, 2). Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ ainsi que son module, sa direction et son sens.

Solution :
$A(2,3,-3);\ B(5,7,2)$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5-2\\7-3\\2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{3^2+4^2+5^2} \Longrightarrow \sqrt{50} = 7{,}071$

La direction est détermine par les angles α, β et θ qu'il fait avec chacun des axes du repère.

$$\alpha = (\overrightarrow{AB},\vec{i}):\ \overrightarrow{AB}.\vec{i} = AB.1.\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{i}}{AB} = \frac{3}{7{,}071} \Longrightarrow \alpha = 64{,}89°$$

$$\beta = (\overrightarrow{AB},\vec{j}):\ \overrightarrow{AB}.\vec{j} = AB.1.\cos\beta \Longrightarrow \cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB}.\beta}{AB} = \frac{3}{7{,}071} \Longrightarrow \beta = 55{,}54°$$

$$\theta = (\overrightarrow{AB},\vec{k}):\ \overrightarrow{AB}.\vec{k} = AB.1.\cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{k}}{AB} = \frac{3}{7{,}071} \Longrightarrow \theta = 44{,}99°$$

Exercice 03 :
Soit deux vecteurs $\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{B} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Calculer : $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{A}-\vec{B}$, $\vec{A}.\vec{B}$ et $\vec{A}\wedge\vec{B}$.

Solution :
$\vec{A} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{B} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

$\vec{A} + \vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) + (4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{A} - \vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) - (4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

$\vec{A}.\vec{B} = (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}).(4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) = 1.4 + 3.1 + (-1)(3) = 4$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}) \wedge (4\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k})$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{\imath}[3.3 - 1(-1)] - \vec{\jmath}[1.3 - 4.(-1)] + \vec{k}[1.1 - 4.3]$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = 10\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} - 11\vec{k}$$

Exercice 04 :

Déterminer le vecteur unitaire de la direction du vecteur $\vec{F} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$.

Solution :

$\vec{F} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}$

Le vecteur unitaire de la force $\vec{F}$

$$\vec{F} = F.\vec{U} \Longrightarrow \vec{U} = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 5\vec{k}}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} \Longrightarrow \vec{U} = \frac{3}{\sqrt{50}}\vec{\imath} + \frac{4}{\sqrt{50}}\vec{\jmath} + \frac{5}{\sqrt{50}}\vec{k}$$

$$\vec{U} = 0{,}424\vec{\imath} + 0{,}565\vec{\jmath} + 0{,}707\vec{k}$$

Exercice5 :

Déterminer le vecteur unitaire de la somme des trois vecteurs suivants :

$\vec{A} = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 5\vec{k}$, $\vec{B} = -3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ et $\vec{C} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

Solution:

$\vec{A} = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} - 5\vec{k}$

$\vec{B} = -3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$

$\vec{C} = 2\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

La somme des trois vecteurs $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} \Longrightarrow \vec{S} = 3\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + \vec{k}$$

Vecteur unitaire de la somme $\vec{S}$

$$\vec{S} = S.\vec{U} \Rightarrow \vec{U} = \frac{\vec{S}}{S} = \frac{3\vec{\imath} + 7\vec{\jmath} + \vec{k}}{\sqrt{3^2 + 7^2 + 1^2}} \Rightarrow \vec{U} = \frac{3}{\sqrt{59}}\vec{\imath} + \frac{7}{\sqrt{59}}\vec{\jmath} + \frac{1}{\sqrt{59}}\vec{k}$$

Exercice 6 :

Soit les points A(1, 2, -1), B(0, 3, 4) et C(-2, 2, 1). Déterminer le point D(x, y, z) tel que CD le vecteur unitaire du vecteur AB.

Solution :

$A(1, 2, -1);\ B(0, 3, 4);\ C(-2, 2, 1)$

Détermine le vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{-\imath} + \vec{\jmath} + 5\vec{k}$

$AB = \sqrt{1 + 1 + 25} \Rightarrow AB = \sqrt{27}$

$\overrightarrow{CD}$: Vecteur unitaire du Vecteur $\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = AB.\overrightarrow{CD}$

Donc : $\overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}+5\vec{k}}{\sqrt{27}}$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CD} = -0{,}192\vec{\imath} + 0{,}192\vec{\jmath} + 0{,}962\vec{k} \\ \overrightarrow{CD}(x + 2)\vec{\imath} + (y - 2)\vec{\jmath} + (z - 1)\vec{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = -0{,}192 \\ y - 2 = 0{,}192 \\ z - 1 = 0962 \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point D :

$D(-2{,}192,\ \ 2{,}192,\ \ 1{,}962)$

Exercice 7 :

Déterminer α de manière que les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ soient orthogonaux

$\overrightarrow{V_1} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$; $\overrightarrow{V_2} = \alpha\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$

Solution:

$\overrightarrow{V_1} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$; $\overrightarrow{V_2} = \alpha\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}$

Les vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ soient orthogonaux $\Rightarrow \vec{V_1} \perp \vec{V_2}$

$\vec{V_1} \perp \vec{V_2} \Rightarrow \vec{V_1}.\vec{V_2} = 0$

$\vec{V_1}.\vec{V_2} = (3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}).(\alpha\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 4\vec{k}) = 0$

$\vec{V_1}.\vec{V_2} = 3\alpha + 6 - 4 = 0 \Rightarrow 3\alpha = -2 \Rightarrow \alpha = \frac{-2}{3}$

Exercice 8 :

On donne $\vec{A} = -\vec{\imath} + 5\vec{k}$ et $\vec{B} = 4\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Déterminer y et z pour que les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient colinéaires.

Solution:

$\vec{A} = -\vec{\imath} + 5\vec{k}$; $\vec{B} = 4\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

$\vec{A}$ et $\vec{B}$ soient colineaires $\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = 0$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 5 \\ 4 & y & z \end{vmatrix} = \vec{\imath}(-5y) + \vec{\jmath}(-z - 20) + \vec{k}(-y) = 0$$

Donc : y = 0 et z = -20

Exercice 9 :

Soient deux vecteurs $\vec{U} = (2, -3, 5)$ et $\vec{V} = (3, y, -2)$. Exprimer, y pour que les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient perpendiculaires.

Solution :

$\vec{U} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$

$\vec{V} = 3\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2\vec{k}$

$\vec{U} \perp \vec{V} = 0 \Rightarrow 6 - 3y - 10 = 0 \Rightarrow y = \frac{-4}{3}$

Exercice 10 :

Soient les trois vecteurs : $\vec{P} = 3\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, $\vec{Q} = -\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{R} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

Effectuer les opérations suivantes : $\vec{P}.(\vec{Q} \wedge \vec{R})$; $\vec{P}.(\vec{Q} + \vec{R})$; $\vec{P} \wedge (\vec{Q} + \vec{R})$

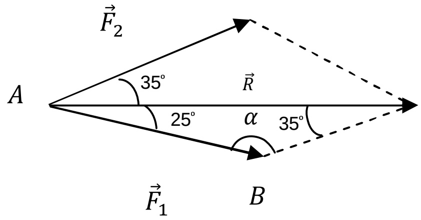
Exercice11 :

Soient deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ faisant chacune respectivement un angle de 25° et 35° avec la résultante $\vec{R}$ qui a une valeur de 400N. Déterminer les modules des deux forces.

Solution :

R= 400N

Utilisons la règle des sinus :



$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 25} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin 35} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin \alpha}$

$\alpha = 180° - (25° + 35°) \Longrightarrow \alpha = 120°$

Tel que $AB \equiv F_1$; $BC \equiv F_2$; $AC \equiv R$

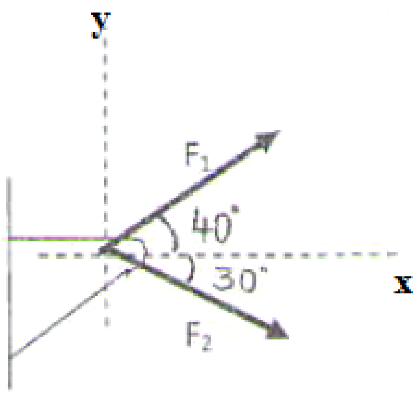
D'où $\frac{F_2}{\sin 25°} = \frac{F_1}{\sin 35°} = \frac{R}{\sin \alpha}$

$F_2 = R.\frac{\sin 25°}{\sin 120°} \Longrightarrow F_2 = 195N$

$F_1 = R.\frac{\sin 35°}{\sin 120°} \Longrightarrow F_1 = 265N$

Exercice12 :

Les forces F_1 et F_2 agissent sur le support comme le montre la figure ci-contre.
$F_1 = 100N$, $F_2 = 80N$
Déterminer la résultante R des deux forces F_1 et F_2.



Solution :

$\overrightarrow{F_1} = 100N$

$\overrightarrow{F_2} = 80N$

1) $\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

$\overrightarrow{F_1} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} \implies \overrightarrow{F_1} = F_1\cos 40°\,\vec{\imath} + F_1\sin 40°\,\vec{\jmath}$

Donc : $\overrightarrow{F_1} = 76{,}60\,\vec{\imath} + 64{,}28\,\vec{\jmath}$

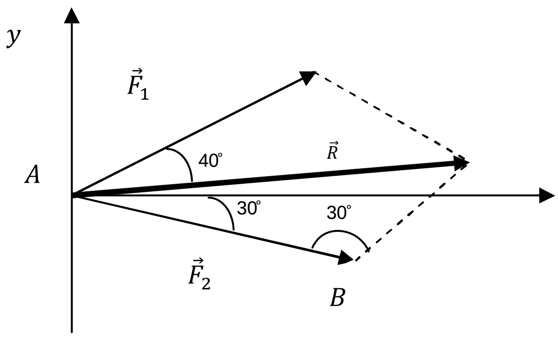
$\overrightarrow{F_2} = F_x\,\vec{\imath} - F_y\,\vec{\jmath} \implies \overrightarrow{F_2} = F_2\cos 30°\,\vec{\imath} - F_2\sin 30°\,\vec{\jmath}$

Donc : $\overrightarrow{F_2} = 69{,}28\,\vec{\imath} - 40\,\vec{\jmath}$

$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \Rightarrow \vec{R} = [76{,}60\,\vec{\imath} + 64{,}28\,\vec{\jmath}\,] + [69{,}28\,\vec{\imath} - 40\,\vec{\jmath}\,]$

$\vec{R} = 145{,}88\,\vec{\imath} + 24{,}28\,\vec{\jmath}$

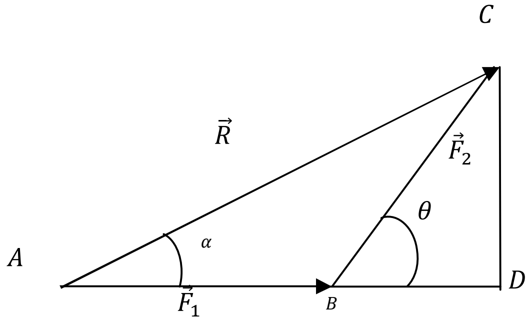
$R = \sqrt{R_X^2 + R_j^2} \Rightarrow R = 147{,}88N$



Exercice13 :

La résultante de deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ est égale à 50N et fait un angle de 30° avec la force F_1 =15N. Trouver le module de la force $\overrightarrow{F_2}$ et l'angle entre les deux forces.

Solution :



$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$R = 50N$

$\alpha = (\vec{R}, \vec{F_1}) = 30°$

$F_1 = 15N$

Selon le triangle ACD

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ tel que $AD = AB + BD = F_1 + F_2\cos\theta$

$DC = F_2 \sin\theta$

On obtient : $R^2 = (F_1 + F_2\cos\theta)^2 + (F_2 \sin\theta)^2$

$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta$……………………………………………………………….(1)

Nous avons aussi $\cos\alpha = \frac{AD}{R} = \frac{F_1 + F_2\cos\theta}{R}$

D'où $\cos\theta = \frac{R\cos\alpha - F_1}{F_2}$ …………………………..(2)

En remplaçante l'expression (2) dans (1) :

$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\left(\frac{R\cos\alpha - F_1}{F_2}\right) \Longrightarrow R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1(R\cos\alpha - F_1)$

D'où : $F_2^2 = R^2 - F_1^2 - 2F_1(R\cos\alpha - F_1)$

$F_2 = \sqrt{R^2 - F_1^2 - 2F_1(R\cos\alpha - F_1)}$

Application numérique :

$F_2 = \sqrt{50^2 - 15^2 - 2.15(50\cos 30° - 15)} \Longrightarrow F_2 = 37{,}76N$

Angle entre les deux forces : "θ"

Selon l'expression (2) : $\cos\theta = \frac{50\cos 30° - 15}{37{,}76} \Longrightarrow \cos\theta = 0{,}749$

Exercice 14 :

La ligne d'une force $\vec{R}$ de 800N, passe par les points A (1,22, 0, 2,74) et B (0, 1,22, 2,74) dans un repère orthonormé. Déterminer les composantes de cette force.

Solution :

R= 800N

A (1,22 0 2,74) ; B (0 1,22 2,74)

Détermination les composantes de la force $\vec{R}$:

$\vec{R}=R.\vec{U}_{AB}$

Tel que $\vec{U}_{AB}$ vecteur unitaire qui donne la direction de la force $\vec{R}$

Nous avons aussi : $\overrightarrow{AB}=AB.\vec{U}_{AB} \Rightarrow \vec{U}_{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$

$\overrightarrow{AB}$=-1,22 $\vec{i}$ + 1,22 $\vec{j}$

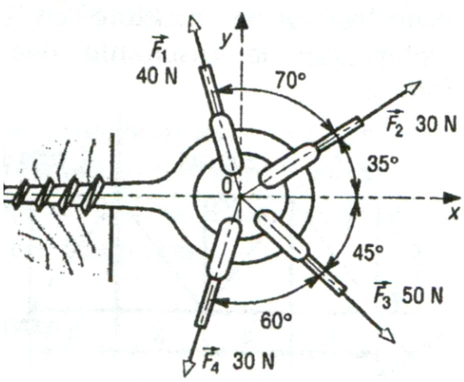
$AB=\sqrt{(-1,22)^2+(1,22)^2} \Rightarrow AB = 1,725$

$\vec{U}_{AB}=\frac{-1,22\,\vec{i}\ +1,22\,\vec{j}}{1,725} \Rightarrow \vec{U}_{AB} = -0,707\,\vec{i}\ +0,707\,\vec{j}$

$\vec{R} = 800N\,(-0,707\,\vec{i}\ +\ 0,707\,\vec{j}) \Rightarrow \vec{R} = -565,6\,\vec{i}\ +\ 565,6\,\vec{j}$

Exercice 15 :

$\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \vec{F_4}$ schématisent les actions exercées par les câbles sur la tête de la vis. Déterminer la résultante des quatre forces.



Solution :

$F_1 = 40N$; $F_2 = 30N$; $F_3 = 50N$; $F_4 = 30N$

La résultante des quatre forces :

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}$ ……………………………………………………………..(I)

1er étape : on doit connaître les composantes de chaque force :

$\vec{F_1} = -\vec{F_x}\,\vec{i} + \vec{F_y}\,\vec{j} \implies \vec{F_1} = -F_1 \sin 15\,\vec{i} + F_1 \cos 15\,\vec{j}$

$\vec{F_1} = -10{,}35\,\vec{i} + 38{,}64\,\vec{j}$

$\vec{F_2} = F_2 \cos 35\,\vec{i} + F_2 \sin 35\,\vec{j} \Rightarrow \vec{F_2} = 24{,}57\,\vec{i} + 17{,}21\,\vec{j}$

$\vec{F_3} = F_3 \cos 45\,\vec{i} - F_3 \sin 45\,\vec{j} \Rightarrow \vec{F_3} = 35{,}35\,\vec{i} - 35{,}35\,\vec{j}$

$\vec{F_4} = -F_4 \sin 15\,\vec{i} - F_3 \cos 15\,\vec{j} \Rightarrow \vec{F_4} = -7{,}76\,\vec{i} - 28{,}98\,\vec{j}$

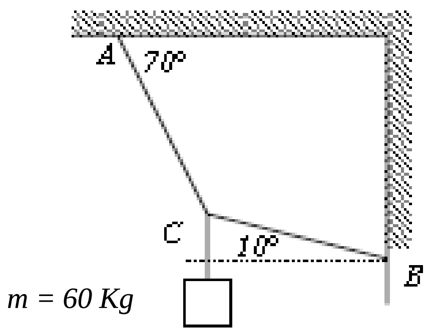
L'expression (I) nous donne : $\vec{R} = 41{,}81\,\vec{i} + 8{,}48\,\vec{j}$

La résultante des quatre forces :

$\vec{R} = \sqrt{(41{,}81)^2 + (8{,}48)^2} \Rightarrow \vec{R} = 42{,}66N$

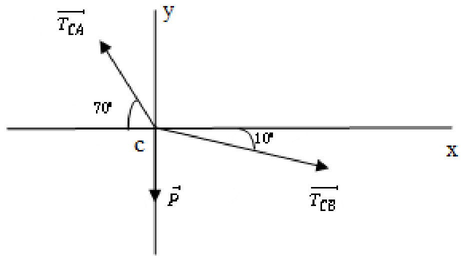
Exercice 16 :

Déterminer les tensions des câbles dans la figure suivante :



Solution :

Au point C nous avons :



$\overrightarrow{T_{CA}} + \overrightarrow{T_{CB}} + \vec{P} = \vec{0}$

La projection sur les axes (C, XY), donne :

$-T_{CA}\cos70° + T_{CB}\cos10° = 0$ ……………………………………………………………(1)

$T_{CA}\sin70° - T_{CB}\sin10° - P = 0$ ……………………………………………………………(2)

(1) : $T_{CA} = T_{CB}\cdot\frac{\cos10}{\cos70} \Longrightarrow T_{CA} = 2{,}88\,T_{CB}$…………………………………………......(3)

En remplaçant l'expression (3) dans (2) :

$2{,}706\,T_{CB} - 0{,}174\,T_{CB} = P \Longrightarrow T_{CB}\,\frac{P}{2{,}532}$

$T_{CA} = 1{,}137P$

Donc : $T_{CA} = 669{,}24N$

$T_{CB} = 232{,}46N$

Exercice 17 :

Dans un repère orthonormé, deux points A et B ont pour coordonnées :

A(2, 2, -3) et B(5, 3, 2) ; Déterminer :

1) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport au centre O du repère ;

2) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la droite Δ passant par le point O et le point C(2, 2, 1)

Solution :

A (2, 2, -3) ; B(5, 3, 2)

1) le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au centre O du repère

$\overrightarrow{AB} = 3\,\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$

$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_{/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 13\,\vec{\imath}\ - 19\,\vec{\jmath}\ - 4\,\vec{k}$

2) le moment du $\overrightarrow{AB}$ par rapport a la droite (Δ) passant par le point 0 et le point C(2 2 1)

$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_{/\Delta} = \left[\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})/_{O}}\,.\vec{U}\right].\vec{U}$

Tel que $\vec{U}$ vecteur unitaire qui donne la direction de la droite (Δ) definie par le point 0 et le point C :

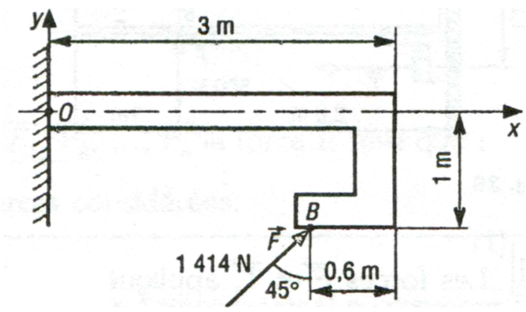
$\vec{U} = \frac{\overrightarrow{OC}}{OC} = \frac{2\,\vec{\imath}\ + 2\,\vec{\jmath}\ + \vec{k}}{3} \Longrightarrow \vec{U} = \frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{1}{3}\vec{k}$

$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_{/\Delta} = \left[13\,\vec{\imath}\ -\ 19\,\vec{\jmath}\ -\ 4\vec{k}\right].\left[\frac{2}{3}\vec{\imath} + \frac{2}{3}\vec{\jmath} + \frac{1}{3}\vec{k}\right]\vec{U}$

$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}/\Delta = -\frac{16}{3}\vec{U}$

Exercice 18 :

Calculer le moment en O de la force $\vec{F}$ agissant au point B.



Solution :

F=1414N

$\overrightarrow{M(\vec{F})/O} = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}$

$\overrightarrow{OB} = 2{,}4\,\vec{\imath}\ -\ \vec{\jmath}$

$\vec{F} = F\ \sin 45\,\vec{\imath} + F\cos 45\ \vec{\jmath} \Longrightarrow \vec{F} = 999{,}85\,\vec{\imath} + 999{,}85\,\vec{\jmath}$

$$\overrightarrow{M(\vec{F})}/O = \begin{pmatrix} 2{,}4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 999{,}85 \\ 999{,}85 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq 3400\vec{k}$$

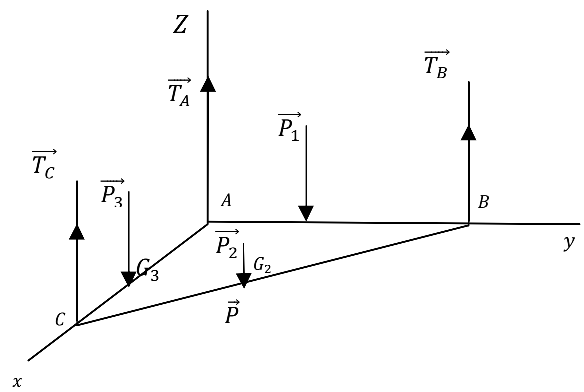
$$\overrightarrow{M(\vec{F})}/O = 3400N.m$$

Exercice 19 :

Une plaque triangulaire ABC de masse négligeable est maintenue dans le plan horizontal (x, y) par trois câbles verticaux attachés aux points A, B et C. trois charges verticales P_1, P_2 et P_3 sont appliquées respectivement aux milieux de AB, BC et AC. On donne : AB=AC=6m et P_1=P_3 =100N, P_2= 145N.

1) Déterminer les vecteurs moments par rapport à A des forces extérieures s'exerçant sur la plaque.

2) Déterminer les tensions T_A, T_B et T_C.



Solution :

AB = AC = 6m

P_1 = P_3 =100N ; P_2 145N

1) moment des forces $(\overrightarrow{T_C}; \overrightarrow{T_B}; \overrightarrow{T_A}; \overrightarrow{P_1}; \overrightarrow{P_2}; \overrightarrow{P_3})$ par rapport a A

$\overrightarrow{M(\overrightarrow{T_A})}_{/A} = 0$

$\overrightarrow{M(\overrightarrow{T_B})}_{/A} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{T_B}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}$; $T_B\begin{pmatrix}0\\0\\T_B\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{M(\vec{T_B})}_{/A} = \begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\T_B\end{pmatrix} = 6T_B\,\vec{i}$

$\overrightarrow{M(\vec{T_C})}_{/A} = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{T_C} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\T_C\end{pmatrix} = -\,6\,T_C\,\vec{j}$

$\overrightarrow{M(\vec{P_1})}_{/A} = \overrightarrow{AG_1} \wedge \vec{P_1} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\-P_1\end{pmatrix} = -\,3\,P_1\,\vec{i}$

$\overrightarrow{M(\vec{P_2})}_{/A} = \overrightarrow{AG_2} \wedge \vec{P_2} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\-P_2\end{pmatrix} = -\,3\,P_2\,\vec{i} + 3\,P_2\,\vec{j}$

$\overrightarrow{M(\vec{P_3})}_{/A} = \overrightarrow{AG_3} \wedge \vec{P_3} = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\-P_3\end{pmatrix} = 3\,P_3\,\vec{j}$

2) déterminer les tensions T_A; T_B; T_C

On applique le principe fondamental de la statique :

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O} \Longrightarrow \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{P_3} + \vec{T_A} + \vec{T_B} + \vec{T_C} = \vec{O}$……………………………….............(I)

La projection sur les axes :

L'axe (OZ) : $T_C + T_B + T_A = P_1 + P_2 + P_3$ …………………………………………..(1)

$\sum_i \overrightarrow{M(\overrightarrow{F_{ext}})}_{/A} = \vec{O} \;\Longrightarrow\; \overrightarrow{M(\vec{P_1})}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{P_2})}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{P_3})}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{T_B})}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{T_C})}_{/A} = \vec{O}$

La projection sur les axes :

$$\begin{cases} 6T_B - 3P_1 - 3P_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ -6T_C + 3P_2 + 3P_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

D'âpres les équations (2) ; (3) et (1), on obtient :

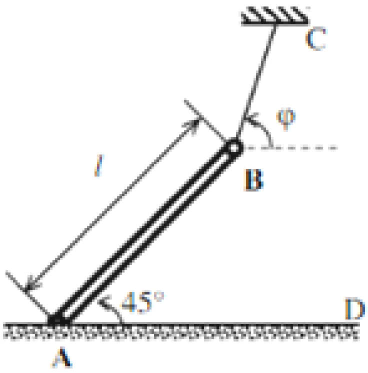
$T_B = \frac{P_1+P_2}{2}$ $\qquad T_B = 122{,}5N$

$T_C = \frac{P_3+P_2}{2}$ $\qquad T_C = 122{,}5N$

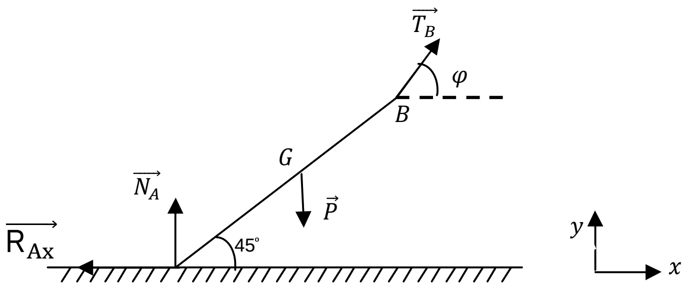
$T_A = (P_1 + P_2 + P_3) - (T_C + T_B)$ $\qquad T_A = 100N$

Exercice 20 :

Une barre homogène AB de poids P et de longueur L. appuyée en A sur une plate forme rugueuse et extrémité B est fixée par le câble BC, inclinée d'un angle de 45^0 avec l'horizontale (voir la figure). Sachant que le coefficient de frottement de la barre avec l'horizontale est f_s. Déterminer l'angle que fait le câble BC avec l'horizontale permettant la barre à glisser vers le point D.



Solution :



On applique les deux principes fondamentales les de la statique :

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0$ et $\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{O}$

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{P} + \vec{T_B} + \overrightarrow{R_{Ax}} + \vec{N_A} = \vec{O}$……………………………………………….(I)

La projection sur les axes :

- (x x') : = $-R_{Ax}+T_B \cos\varphi = 0 \Rightarrow f_s . N_A = T_B \cos\varphi$

Donc on a : $f_s . N_A = \vec{T_B} \cos\varphi$…………………………………………………….(1)

- (y y') : $- P + N_A + T_B \sin\varphi = 0$……………………………………………….(2)

$\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{O} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{M(\vec{P})}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{T_B})}_{/A} = \vec{O}$ ………………………………….(II)

(II): $\overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{T_B} = 0$ ……………………………………………………………….(3)

$$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} \frac{L}{2}\cos 45 \\ \frac{L}{2}\sin 45 \end{pmatrix};\ \vec{P}\ \begin{pmatrix} 0 \\ -p \end{pmatrix};\ AB\begin{pmatrix} L\cos 45 \\ L\sin 45 \end{pmatrix}\ ;\ T_B\begin{pmatrix} T_B\cos\varphi \\ T_B\sin\varphi \end{pmatrix}$$

(3): $- P\frac{L}{2}\cos 45 + LT_B\cos 45\sin\varphi - LT_B\sin 45\cos\varphi = 0$

Remarque : un cas particulier : $\sin 45 = \cos 45$

Donc : $-\frac{P}{2} + T_B\sin\varphi - T_B\cos\varphi = 0 \Rightarrow T_B = \frac{P}{2(\sin\varphi - \cos\varphi)}$ ……………….. (4)

$\sum_i M(\overrightarrow{F_{ext}})_{/B} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{BG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_A} = \vec{O}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{L}{2}\cos 45 \\ -\frac{L}{2}\sin 45 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -L\cos 45 \\ -L\sin 45 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -f_s N_A \\ N_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$+P.\frac{L}{2}\cos 45 - N_A.L\cos 45 - f_s N_A.L\sin 45 = 0 \Rightarrow N_A = \frac{P}{2(1+f_s)}$……………….(5)

En remplaçant l'expression (5) et (4) dans (1) :

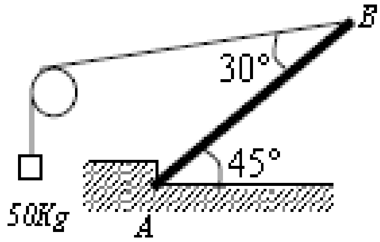
$$f_s = \frac{P}{2(1 + f_s)} = \frac{P\cos\varphi}{2(\sin\varphi - \cos\varphi)} \Rightarrow tg\,\varphi = 2 + \frac{1}{f_s}$$

D'où : $\varphi = \operatorname{arctg}\left(2 + \frac{1}{f_s}\right)$

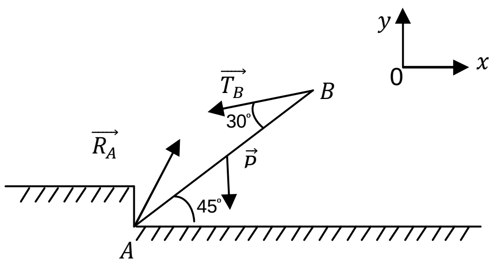
Exercice 21 :

On maintient une poutre en équilibre statique à l'aide d'une charge **P** suspendue à un câble inextensible de masse négligeable, passant par une poulie comme indiqué sur la figure. La poutre a une longueur de **8m** et une masse de **50 Kg** et fait un angle de **45°** avec l'horizontale et **30°** avec le câble.

Déterminer la tension dans le câble ainsi que la grandeur de la réaction en **A** ainsi que sa direction par rapport à l'horizontale.



Solution :



L = 8m ; m = 50kg

Déterminer T_B et R_A

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \implies \overrightarrow{R_A} + \vec{P} + \overrightarrow{T_B} = \vec{O}$ … . (I)

La projection sur les axes :

(x x') : $R_{Ax} - T_B \cos 15 = 0$ … . (1)

(y y') : $R_{Ay} - T_B \sin 15 = P$ … . . (2)

$\sum_i \overrightarrow{M(\overrightarrow{F_{ext}})}_{/A} = \vec{O} \implies \overrightarrow{M(\vec{P}\ )}_{/A} + \overrightarrow{M(\overrightarrow{T_B})}_{/A} = \vec{O}$……………………………………..(II)

(II) : $\overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{T_B} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T_B \cos 15 \\ -T_B \sin 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-2\sqrt{2}P - 4\sqrt{2}\, T_B \sin 45 + 4\sqrt{2}\, T_B \sin 45 = 0$

Donc : $T_B = \frac{P}{2(\cos 15 - \sin 15)}$ ………………………………………………………. (3)

A.N : $T_B = 346{,}89N$

En remplaçant l'expression (3) dans (1) et (2) :

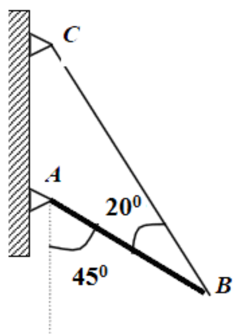
$R_{Ax} = \frac{P\cos 15}{2(\cos 15 - \sin 15)}$ $\Rightarrow$ R_{Ax} = 335N

$R_{Ay} = \frac{P\sin 15}{2(\cos 15 - \sin 15)} + P$ $\Rightarrow R_{Ay}$ = 580,28N

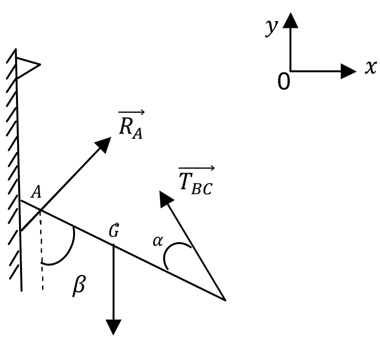
R_A= 670N

Exercice 22 :

Une barre homogène pesant **80 N** est liée par une articulation cylindrique en son extrémité **A** à un mur. Elle est retenue sous un angle de 45° avec la verticale par un câble inextensible de masse négligeable à l'autre extrémité **B**. Le câble fait un angle de 20° avec la barre. Déterminer la tension dans le câble et la réaction au point **A**.



Solution :



La barre : P = 80N ;

Point A : articulation cylindrique $\Rightarrow$ deux forces

D'une façon générale : * La barre fait un angle β avec la verticale

* Le câble fait un angle α avec la barre

Déterminer la tension T_{BC} et R_A :

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \Rightarrow \vec{P} + \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{T_{BC}} = \vec{O}$…………………………………………………….(I)

La projection sur les axes :

(x x') : $R_{Ax} - T_{BC}\sin(\beta-\alpha) = 0 \Rightarrow R_{Ax} = T_{BC}\sin(\beta-\alpha)$…………………………...(1)

(y y') : $-P + T_{BC}\cos(\beta-\alpha) + R_{Ay} = 0 \Rightarrow R_{Ay} = P - T_{BC}\cos(\beta-\alpha)$……………….(2)

$\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{O} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{T_{BC}} = \vec{O}$…………………………………….(II)

$$\begin{pmatrix} \frac{L}{2}\sin\beta \\ \\ -\frac{L}{2}\cos\beta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L\sin\beta \\ -L\sin\beta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T_{BC}\sin(\beta-\alpha) \\ T_{BC}\cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On trouve :

$$\frac{P}{2}\sin\beta = T\underbrace{[\sin\beta\cos(\beta-\alpha) - T\cos\beta\sin(\beta-\alpha)]}_{=\sin\alpha} \Rightarrow T_{BC}\,\frac{P}{2}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \text{………………..(3)}$$

En remplaçant l'expression (3) dans (1) et (2) :

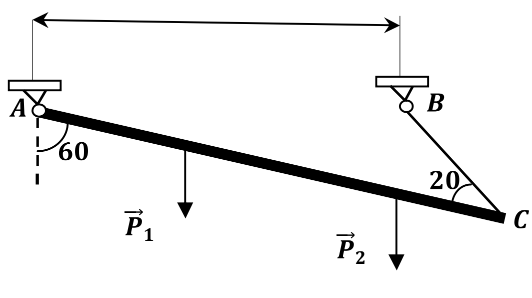
$$R_{Ax} = \frac{P}{2}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin(\beta-\alpha)$$

$$R_{Ay} = P\left[1 - \frac{\sin\beta\cos(\beta-\alpha)}{2\sin\alpha}\right]$$

Application numérique : on remplace $\beta = 45°$; $\alpha = 20°$

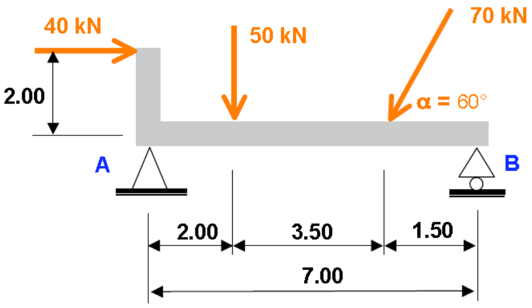
Exercice 23:

Soit une barre AC fixée à l'appui A et au câble BC (voir figure). Déterminer la réaction au niveau de l'appui A et la tension du câble.



Exercice 24 :

Calculer les réactions d'appuis de la poutre ci-dessous.



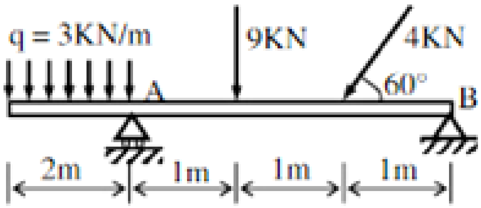
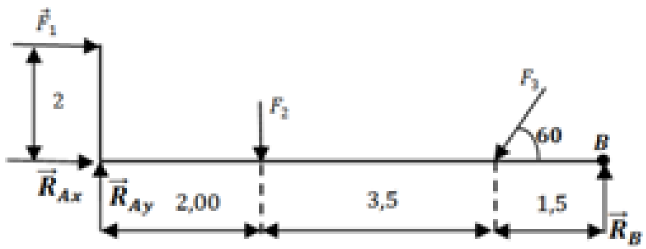


Figure 01 **Figure02**

Solution :

Figure 01



$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \implies \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

La projection (xx') :

$F_1 - F_3 \cos 60 + R_{AX} = 0 \implies R_{AX} = F_3 \cos 60 - F_1 \implies R_{AX} = -5kN$

La projection (yy') :

$R_{Ay} - F_2 - F_3 \sin 60 + R_{By} = 0 \implies R_{Ay} + R_{By} = F_2 + F_3 \sin 60 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (1)$

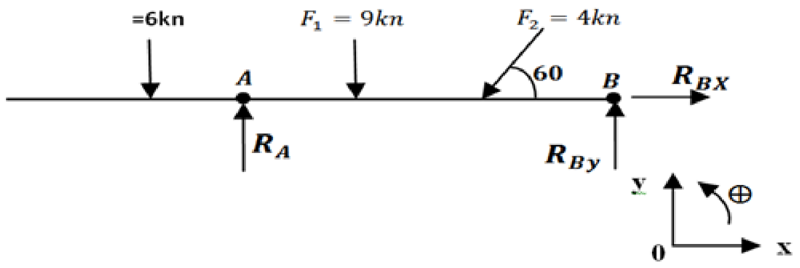
On a deux inconnues : R_{Ay} et R_{By}

$\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{0} \implies R_{By}.7 - F_3 \sin 60.5{,}5 - F_2.2 - F_1.2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

$\implies R_{By}.7 = F_2.2 + F_1.2 + F_3 \sin 60.5{,}5 \implies R_{By} = 73{,}6KN$

(1) : $R_{Ay} = 37{,}4KN$

Figure 02



$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \implies \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{Q} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = \vec{0}$ … … … … … … … … … … … … … … … … (I)

La projection (xx') :

$R_{Bx} - F_2 \cos 60 = 0 \implies R_{Bx} = F_2 \cos 60 \implies R_{Bx} = 2KN$

La projection (yy') :

$-Q - F_1 - F_2 \sin 60 + R_{By} + R_A = 0$ … … … … … … … … … … … … … … … … … (1)

$\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{O} \implies R_{By}.3 - F_2 \sin 60 .2 - F_1.1 + Q.1 = 0$

$$\implies R_{By} = \frac{2F_2 \sin 60 + F_1 - Q}{3}$$

Donc : $R_{By} = \frac{4.\sqrt{3}+9-6}{3} \implies R_{By} = 3{,}31KN$

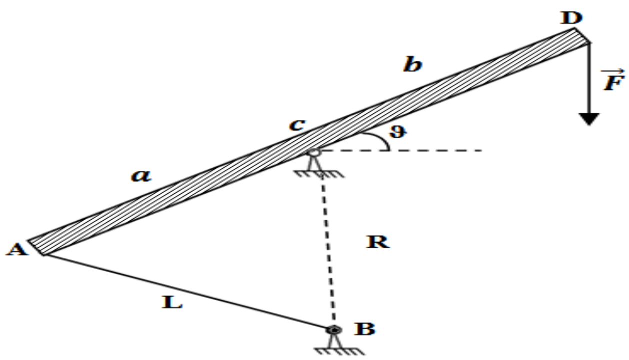
(1) : $R_A = Q + F_1 + F_2 \sin 60 - R_{By}$

$R_A = 15{,}15KN$ avec $R_B = 3{,}87KN$

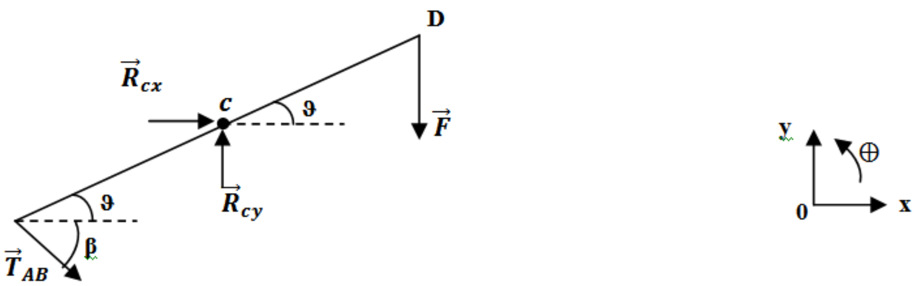
Exercice 25:

Déterminer la tension dans le câble AB et la réaction d'appui (voir figure).

On donne : a, b, ϴ, R.



Solution :



$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \Longrightarrow \vec{T}_{AB} + \vec{R}_C + \vec{F} = \vec{0} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .. (I)$

Les vecteurs de charges :

$$\vec{F}\begin{pmatrix}0\\-F\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{R}_C\begin{pmatrix}R_{cx}\\R_{cy}\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{T}_{AB}\begin{pmatrix}T_{AB}\cos\beta\\-T_{AB}\sin\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$(I): \begin{cases} R_{cx} + T_{AB}\cos\beta = 0 \\ R_{cy} - F - T_{AB}\sin\beta = 0 \end{cases} \Longrightarrow \qquad \begin{matrix} R_{cx} = -T_{AB}\cos\beta \dots\dots\dots\dots (1) \\ R_{cy} = F + T_{AB}\sin\beta \dots\dots (2) \end{matrix}$$

Nous avons deux équations (1) et (2) avec trois inconnues :

$$\sum_i \overrightarrow{M(\overrightarrow{F_{ext}})}_{/c} = \vec{O} \Longrightarrow \overrightarrow{M(\vec{T}_{AB})}/C + \overrightarrow{M(\vec{F}\ )}/C = \vec{0} \dots\dots\dots\dots\dots\dots . (II)$$

$$\overrightarrow{M(\vec{T}_{AB})}/C = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{T}_{AB} = \begin{pmatrix}a\cos\vartheta\\-a\sin\vartheta\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}T_{AB}\cos\beta\\-T_{AB}\sin\beta\\0\end{pmatrix}$$

$$= a\,T_{AB}(\cos\vartheta\sin\beta + \cos\beta\sin\vartheta)\vec{k} = a\,T_{AB}\sin(\vartheta + \beta)$$

$$\overrightarrow{M(\vec{F}\ )}/C = \overrightarrow{CD} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix}b\cos\vartheta\\b\sin\vartheta\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-F\\0\end{pmatrix} = \vec{k}[-F.b\cos\vartheta]$$

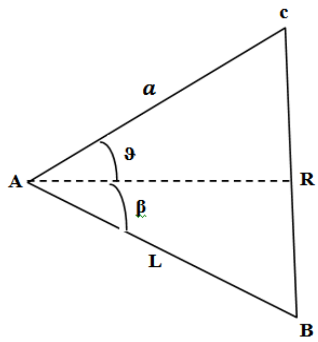
$$(II):\ aT_{AB}(\cos\vartheta\sin\beta + \cos\beta\sin\vartheta) = Fb\cos\vartheta$$

$$\text{Donc } T_{AB} = \frac{F.b\cos\vartheta}{a\sin(\vartheta + \beta)}$$

$$(1) : R_{cx} = -T_{AB}\cos\beta = \frac{-F.b\cos\vartheta\cos\beta}{a\sin(\vartheta+\beta)}$$

$$R_{cy} = F + T_{AB}\sin\beta = F\left(1 + \frac{b\cos\vartheta\sin\beta}{a\sin(\vartheta + \beta)}\right)$$

Remarque : l’angle β est inconnu :



$$L^2 = a^2 \cos^2 \vartheta + (R - a \sin \vartheta)^2 = a^2 + R^2 - 2aR \sin \vartheta$$

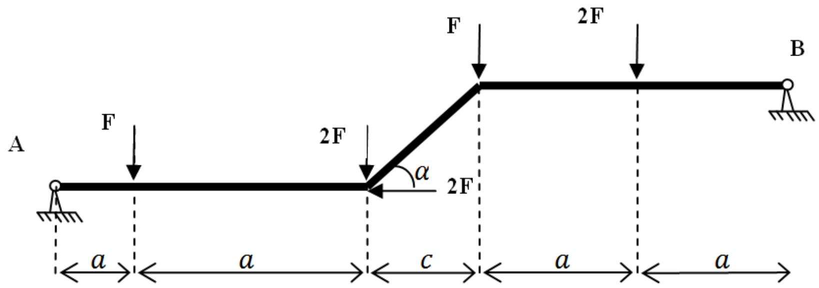
$$L = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \sin \vartheta}$$

$$\sin \beta = \frac{R - a \sin \vartheta}{L} \Rightarrow \sin \beta = \frac{R - a \sin \vartheta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \sin \vartheta}}$$

$$\beta = \arcsin \left[\frac{R - a \sin \vartheta}{\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR \sin \vartheta}} \right]$$

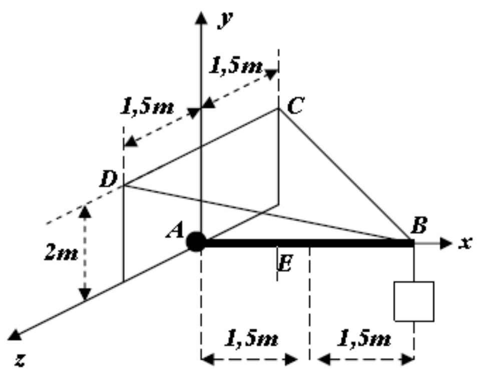
Exercice 26:

Déterminer les réactions au niveau des appuis de la poutre suivante :

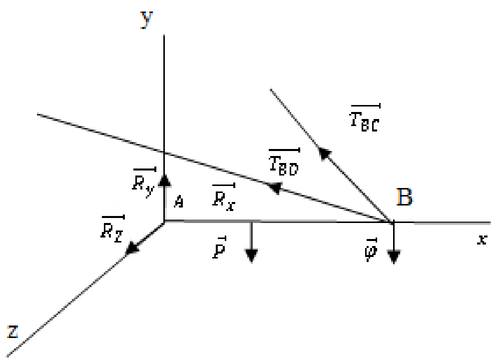


Exercice 27 :

Une poutre de poids **P = 300N** et de longueur **2L** est maintenue en position horizontale par deux câbles **DB** et **CB** comme indiqué sur la figure. On suspend à son extrémité une charge **Q = 500N**. L’articulation au point A est sphérique. Déterminer les tensions dans les deux câbles et la réaction au point A.



Solution :



P = 300N ; 2L

Q = 500N

Point A : articulation sphérique : 03 forces

*déterminer : T_{BC} ; T_{BD} ; R_A

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}0\\2\\-1{,}5\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}0\\2\\1{,}5\end{pmatrix}$; $E\begin{pmatrix}1{,}5\\0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{P} = -P\vec{J}$

$\vec{T}_{BC} = T_{BC}.\vec{U}_{BC}$

$$\vec{U}_{BC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{BC} = \frac{-3\vec{\imath} + 2\vec{J} - 1{,}5\vec{k}}{\sqrt{15{,}25}} = -0{,}76\vec{\imath} + 0{,}5\vec{J} - 0{,}38\vec{k}$$

$\vec{T}_{BC} = T_{BC}(-0{,}76\vec{\imath} + 0{,}5\vec{J} - 0{,}38\vec{k})$

$T_{BD} = T_{BD}.\vec{U}_{BC}$

$$\vec{U}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = \frac{-3\vec{\imath} + 2\vec{J} + 1{,}5\vec{k}}{\sqrt{15{,}25}} = -0{,}76\vec{\imath} + 0{,}5\vec{J} + 0{,}38\vec{k}$$

$\vec{T}_{BD} = T_{BD}(-0{,}76\vec{\imath} + 0{,}5\vec{J} + 0{,}38\vec{k})$

En A liaison sphérique : R_{Ax} ; R_{Ay} ; R_{Az}

La poutre est en équilibre statique :

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0$ et $\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{O}$

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{R_A} + \vec{P} + \vec{Q} + \overrightarrow{T_{BC}} + \vec{T}_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$

La projection sur les axes :

$R_{Ax} - 0{,}76T_{BC} - 0{,}76\ T_{BD} = 0$ ……………………(1)

$R_{Ay} + 0{,}5\ T_{BC} + 0{,}5\ T_{BD} - Q - P = 0$ ……………..…(2)

$R_{Az} - 0{,}38T_{BC} + 0{,}38\ T_{BD} = 0$ ……………………(3)

$\sum_i \overrightarrow{M(\overrightarrow{F_{ext}})}_{/A} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{AE} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AB} \wedge \left(\overrightarrow{T_{BC}} + \vec{T}_{BD}\right) + \left(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{Q}\right) = \vec{O} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$

$$\text{II}: \begin{pmatrix}1{,}5\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-P\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-0{,}76\ T_{BC}\\0{,}5\ T_{BC}\\-0{,}38T_{BC}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}-0{,}76\ T_{BD}\\0{,}5\ T_{BD}\\0{,}38T_{BD}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\-Q\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ 3\,.\,0{,}38T_{BD} - 3\,.\,0{,}38T_{BC} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5) \\ -1{,}5P - 3\,Q + 3.\,0{,}5\ T_{BD} + 3\,.\,0{,}5\ T_{BC} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6) \end{cases}$$

(5): $T_{BC} = T_{BD} = T$

(6): $T_{BC} = T_{BD} = \frac{1{,}5P+3Q}{3}$

(1): $R_{Ax} = 1{,}52T$

(2): $R_{Ay} = P + Q - T$

(3) : $R_{Az} = 0$

$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2}$

A.N : $T = 650N$; $R_{Ax} = 988N$; $R_{Ay} = 150N$; $R_{Az} = 0$, $R_A = 999{,}32N$

Exercice 28 :

Une barre ABC coudée à 90^0 en B est fixée au mur par Une articulation sphérique (A). Elle est maintenue dans sa position horizontale par trois câbles DB, EB et FC.

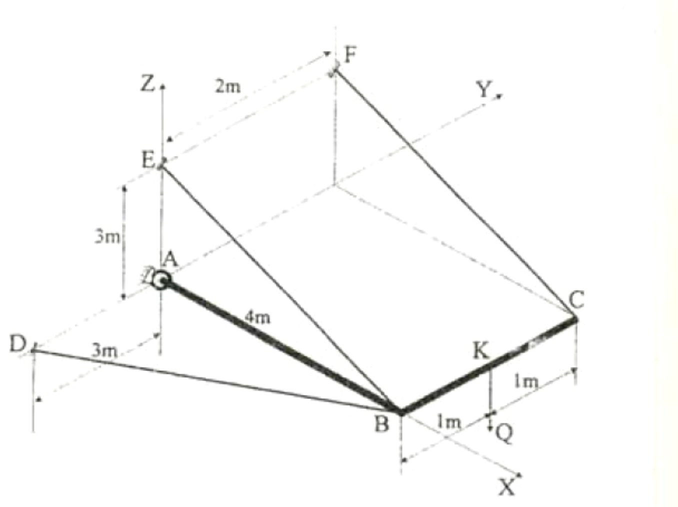
Au point K, on applique sur la barre une charge verticale Q=200N.

On donne AB= 4m ; BK=KC=1m ; AD=AE=3m.

Les poids des morceaux AB et BC de la barre sont respectivement P_1=800N et P_2= 400N.

1- Etablir les équations scalaires d'équilibre statique de la barre ABC.

2- En déduire les valeurs des tensions des câbles et de la réaction d'appui au point A.



Solution :

Liaison sphérique En A: R_{Ax} ; R_{Ay} ; R_{Az}

$Q = 200N$

$P_1 = 800N$; $P_2 = 400N$

$AB = 4m$; $BK = KC = 1m$

$AD = AE = 3m$

1) établir les équations scalaires d'équilibre statique de la barre ABC :

$\overrightarrow{P_1} = -P_1\vec{k}$; $\overrightarrow{P_2} = -P_2\vec{k}$; $\vec{Q} = -Q\vec{k}$

$\vec{T}_{BD} = T_{BD}.\vec{U}_{BD}$

$\vec{U}_{BD}$: Vecteur unitaire qui donne la direction de $\vec{T}_{BD}$

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$; $E\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$; $F\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$; $K\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$

$$\vec{U}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = \frac{-4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}}{\sqrt{16+9}} = -\frac{4}{5}\vec{\imath} - \frac{3}{5}\vec{\jmath}$$

$$\vec{T}_{BD} = T_{BD}\left(-\frac{4}{5}\vec{\imath} - \frac{3}{5}\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{T}_{BE} = T_{BE}.\vec{U}_{BE}$$

$$\vec{U}_{BE} = \frac{\overrightarrow{BE}}{BE} = \frac{-4\vec{\imath} + 3\vec{k}}{\sqrt{16+9}} = -\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{k}$$

$$\vec{T}_{BE} = T_{BE}\left(-\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{k}\right)$$

$$\vec{T}_{CF} = T_{CF}.\vec{U}_{CF}$$

$$\vec{U}_{CF} = \frac{\overrightarrow{CF}}{CF} = \frac{-4\vec{\imath} + 3\vec{k}}{\sqrt{16+9}} = -\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{k}$$

$$\vec{T}_{CF} = T_{CF}\left(-\frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{k}\right)$$

La barre ABC est en équilibre statique :

$$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O} \text{ et } \sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{O}$$

$$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{R_A} + \vec{T}_{BD} + \vec{T}_{BE} + \vec{T}_{CF} + \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{Q} = \vec{O} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

La projection sur les axes :

$$\begin{cases} R_{Ax} + 0 + 0 + 0 - \frac{4}{5}T_{BD} - \frac{4}{5}T_{BE} - \frac{4}{5}T_{CF} = 0 \\ R_{Ay} + 0 + 0 + 0 - \frac{3}{5}T_{BD} - 0 - 0 = 0 \\ R_{Az} - P_1 - P_2 - Q + 0 + \frac{3}{5}T_{BE} + \frac{3}{5}T_{CF} = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} R_{Ax} - \frac{4}{5}(T_{BD} + T_{BE} + T_{CF}) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ R_{Ay} - \frac{3}{5}T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ R_{Az} + \frac{3}{5}(T_{BE} + T_{CF}) = P_1 + P_2 + Q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$$\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \left(\overrightarrow{T_{BD}} + \overrightarrow{T_{BE}}\right) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{T}_{CF} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P_1} + \overrightarrow{AK} \wedge \vec{P_2} + \overrightarrow{AK} \wedge \vec{Q} = \vec{O}$$

D'âpres calcul vectoriel ; on obtient :

$$\frac{6}{5}T_{CF} - P_2 - Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\frac{12}{5}T_{BE} + \frac{12}{5}T_{CF} - 2P_1 - 4P_2 - 4Q = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$-\frac{12}{5}T_{BD} - \frac{8}{5}T_{CF} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Donc, il existe 06 équations scalaires d'équilibre statique

2) déduire les valeurs des tensions T_{BD}, T_{BE}, T_{CF} et R_A

(4) : $T_{CF} = \frac{5}{6}(P_2 + Q) \implies T_{CF} = 500N$

(5) : $T_{BE} = \frac{5}{6}(P_1 + P_2 + Q) \implies T_{BE} = 1166{,}67N$

(6) : $T_{BD} = \frac{5}{9}(P_2 + Q) \implies T_{BD} = 333{,}33N$

(1) : $R_{Ax} = 1600N$; $R_{Ay} = 200N$; $R_{Az} = 400N$

Exercice 29 :

Un mât vertical de poids négligeable est soumis à une force horizontale F de 4 KN (parallèle à l'axe y) et est maintenue à la vertical par deux câbles BC et BD et par une liaison rotules (sphérique) en A.

1) Exprimer vectoriellement la force F et les deux tensions T_{BC} et T_{BD} agissant sur le mât en fonction de i, j et k.

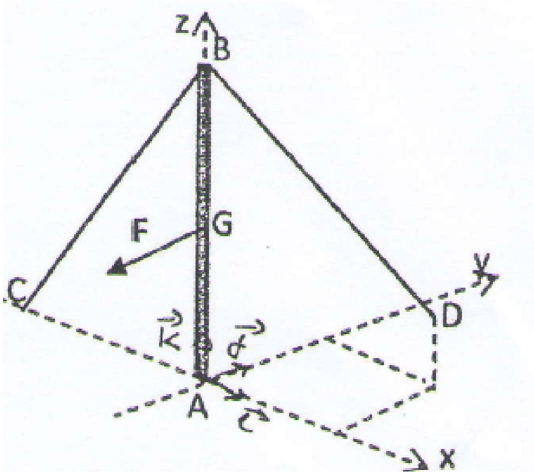
2) Ecrire l'équation vectorielle exprimant la première condition d'équilibre du mât désignant une résultante nulle. Déduire les équations projetées selon les trois axes x, y et z.

3) Déterminer les vecteurs moments par rapport à A de F, T_{BC} et T_{BD}.

4) Donner les équations d'équilibre, projetées selon les trois axes, caractérisant un moment résultants nul.

5) Déduire les deux tensions T_{BC} et T_{BD} ainsi que la réaction R_A.

on donne B (0, 0, 6) ; C(-4,0, 0) ; D(3, 3, 1) ; G(0, 0, 3)



Solution :

$F = 4KN$

$B(0\ 0\ 6); C(-4\ 0\ 0); D(3\ 3\ 1); G(0\ 0\ 3)$

Liaison sphérique En A: R_{Ax} ; R_{Ay} ; R_{Az}

1) Exprimer vectoriellement la force F et T_{BC} ; T_{BD}

$\vec{F} = -F\vec{J}$

$\vec{T}_{BC} = T_{BC}.\vec{U}_{BC}$

$\vec{U}_{BC}$: Vecteur unitaire qui donne la direction de $\vec{T}_{BC}$

$\vec{U}_{BC} = \frac{\overrightarrow{BC}}{BC} = \frac{-4\vec{\imath}-6\vec{k}}{\sqrt{16+36}} = -0{,}447\vec{\imath} - 0{,}894\vec{k}$

$\vec{T}_{BC} = T_{BC}\left(-0{,}447\vec{\imath} - 0{,}894\vec{k}\right)$

$\vec{T}_{BD} = T_{BD}.\vec{U}_{BD}$

$\vec{U}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = \frac{3\vec{\imath}+3\vec{J}-5\vec{k}}{\sqrt{9+9+25}} = 0{,}458\vec{\imath} + 0{,}458\vec{J} - 0{,}763\vec{k}$

$\vec{T}_{BD} = T_{BD}.\left(0{,}458\vec{\imath} + 0{,}458\vec{J} - 0{,}763\vec{k}\right)$

2) les équations d'équilibre :

La barre en équilibre statique : $\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O}$

$\vec{F} + \vec{T}_{BD} + \vec{T}_{BC} + \vec{R}_A = \vec{O}$

$$\begin{cases} R_{Ax} - 0{,}447T_{BC} + 0{,}458T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (1) \\ R_{Ay} - F + 0{,}458\, T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ R_{Az} - 0{,}894\, T_{BC} - 0{,}763\, T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

Déterminer les vecteurs moments par rapport à A :

$$\overrightarrow{M(\vec{F}\ )}_{/A} = \overrightarrow{AG} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{F}\ )}_{/A} = 3F\vec{\imath}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BC})}_{/A} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0{,}447\, T_{BC} \\ 0 \\ 0{,}894\, T_{BC} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BC})}_{/A} = = 2{,}682\, T_{BC}\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BD})}_{/A} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T}_{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0{,}458\, T_{BD} \\ 0{,}458\, T_{BD} \\ -0{,}763\, T_{BD} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M(\vec{T}_{BD})}_{/A} = -2{,}748\, T_{BD}\vec{\imath} + 2{,}748 T_{BD}\vec{\jmath}$$

4) Donner les équations d'équilibre, projetées selon les trois axes, caractérisant un moment résultants nul.

$$\overrightarrow{M(\vec{F}_{ext})}_{/A} = \vec{O} \Longrightarrow \overrightarrow{M(\vec{F}\ )}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{T}_{BC})}_{/A} + \overrightarrow{M(\vec{T}_{BD})}_{/A} = 0$$

$$\begin{cases} 3F - 2{,}748\, T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ 2{,}748\, T_{BC} + 2{,}748\, T_{BD} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (5) \end{cases}$$

5) Déduire les deux tensions T_{BC} et T_{BD} ainsi que la réaction R_A

(4): $T_{BD} = \frac{3}{2{,}748} F \Longrightarrow T_{BD} = 1{,}09F$

$T_{BD} = 4{,}37KN$

$$T_{BC} = \frac{2{,}748}{2{,}682} T_{BD} \Longrightarrow T_{BC} = 1{,}02\, T_{BD} \Longrightarrow T_{BC} = 4{,}48kN$$

$(1): R_{Ax} = 0{,}447 T_{BC} - 0{,}458 T_{BD} \Rightarrow R_{Ax} \simeq 0$

$(2): R_{Ay} = -F + 0{,}458\, T_{BD} \Rightarrow R_{Ay} = 2kN$

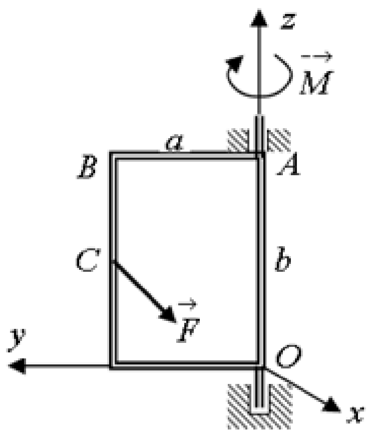
$(3): R_{Az} = 0{,}894\, T_{BC} - 0{,}763\, T_{BD} \Rightarrow R_{Az} = 0{,}671kN$

Exercice 30 :

Une porte métallique rectangulaire de densité uniforme de dimensions **a** x **b**, de poids **P**, est maintenue en position verticale par deux articulations, l'une sphérique au point **O** et l'autre cylindrique au point **A**. Une force **F** est appliquée perpendiculairement au plan de la porte au point **C** milieu de la longueur. Afin de maintenir cette porte en position fermée, on applique un moment **M** au point **A**.

Déterminer les réactions au niveau des articulations **O** et **A** ainsi que la force **F** pour ouvrir la porte.

On donne : **a= 2m, b= 3m, BC= b/2, M= 400N, P= 800N**



Solution :

Une porte : a.b

a = 2m ; b = 3m ; BC = b/2

M = 400N.m ; P = 800N

Liaison sphérique en O: R_{Ox} ; R_{Oy} ; R_{Oz}

Liaison cylindrique en A : R_{Ax} ; R_{Ay}

La porte est en équilibre statique : $\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O}$ et $\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/O} = \vec{O}$

1) $\vec{P} = -P\vec{k}$

$\vec{F} = F\vec{i}$

$\vec{R}_o = R_{Ox}\vec{i} + R_{Oy}\vec{j} + R_{Oz}\vec{k}$

$\vec{R}_A = R_{Ax}\vec{i} + R_{Ay}\vec{j}$

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}_O + \vec{R}_A = \vec{O}$…………………………………………………………..(I)

$R_{Ox} + R_{Ax} + F = 0$ ……………………………………………………………………………. (1)

$R_{Oy} + R_{Ay} = 0$ ……………………………………………………………………………………. (2)

$R_{Oz} - P = 0$ ……………………………………………………………………………………… (3)

$\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/O} = \vec{O} \Longrightarrow \overrightarrow{OA} \wedge \vec{R}_A + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} + \vec{M} = \vec{O}$ ………………………………. (II)

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}0\\0\\b\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\a\\\frac{b}{2}\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OG}\begin{pmatrix}0\\\frac{a}{2}\\\frac{b}{2}\end{pmatrix}$

$$(II) : \begin{pmatrix}0\\0\\b\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}R_{Ax}\\R_{Ay}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\a\\\frac{b}{2}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}F\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\frac{a}{2}\\\frac{b}{2}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\0\\-P\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\-M\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -bR_{Ay} - \frac{a}{2}P = 0 \text{ ……………………………………………………………….. (4)} \\ bR_{Ax} + \frac{b}{2}F = 0 \text{ ………………………………………………………………….. (5)} \\ -aF - M = 0 \text{ ……………………………………………………………………. (6)} \end{cases}$$

(6) : $F = -\frac{M}{a} \Longrightarrow F = -200N$

(5) : $R_{Ax} = -\frac{F}{2} \Longrightarrow R_{Ax} = 100N$

(4) : $R_{Ay} = -\frac{aP}{2b} \Longrightarrow R_{Ay} = -266{,}67N$

(3) : $R_{Oz} = P \Longrightarrow R_{Oz} = 800\ N$

(2) : $R_{Oy}=-R_{Ay} \Longrightarrow R_{Oy} = 266{,}67N$

(1) : $R_{Ox}=-F - R_{Ax} \Longrightarrow R_{ox} = 100N$

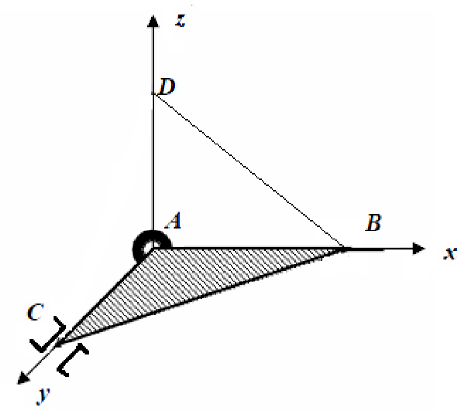
Exercice 31 :

Une plaque triangulaire, homogène, de poids P, est maintenue en équilibre statique dans la position horizontale, par une corde inextensible BD, de masse négligeable, comme indiqué sur la figure.

- Déterminer la tension dans la corde et les réactions aux points A et C sachant que la liaison en point A est sphérique et en point C cylindrique.

  On donne: AB=AC= AD=a

  /Le centre de masse de la plaque est le point G de coordonnées (a/3, a/3, 0)



Solution :

AB = AC = AD = a

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}$; $C\begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}$; $D\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}$

Le centre de gravité de la plaque triangulaire ABC : G (a/3, a/3,0)

Liaison en A sphérique : R_{Ax} ; R_{Ay} ; R_{Az}

Liaison en C cylindrique : R_{Cx} ; R_{Cz}

Déterminer T_{BD} ; R_A et R_c

La plaque est en équilibre statique : $\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O}$ et $\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{O}$

$\sum_i \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{O} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T}_{BD} + \vec{R}_A + \vec{R}_C = \vec{O}$

$\vec{P} = -P\vec{k}$

$\vec{T}_{BD} = T_{BD}.\vec{U}_{BD}$

$\vec{U}_{BD} = \frac{\overrightarrow{BD}}{BD} = \frac{-a\vec{i} + a\vec{k}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} = -0{,}707\vec{i} + 0{,}707\vec{k}$

$\vec{T}_{BD} = T_{BD}\left(-0{,}707\vec{i} + 0{,}707\vec{k}\right)$

La projection sur les axes :(0,XYZ)

$$\begin{cases} R_{Ax} - 0{,}707\, T_{BD} + R_{Cx} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ R_{Ay} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ -P + 0{,}707\, T_{BD} + R_{CZ} + R_{AZ} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

$\sum_i \overrightarrow{M(F_{ext})}_{/A} = \vec{O} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge T_{BD} + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{AC} + R_C = 0 \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (II)

$$(II) \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0{,}707\, T_{BD} \\ 0 \\ 0{,}707\, T_{BD} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{3} \\ \frac{a}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R_{Cx} \\ 0 \\ R_{Cz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{3}P + aR_{Cz} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\ 0{,}707\, a\, T_{BD} + \frac{a}{3}P = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5) \\ -aR_{Cx} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6) \end{cases}$$

(6) : $R_{Cx} = 0$

(5) : $T_{BD} = 0{,}471\, P$

(4) : $R_{Cz} = \frac{P}{3}$

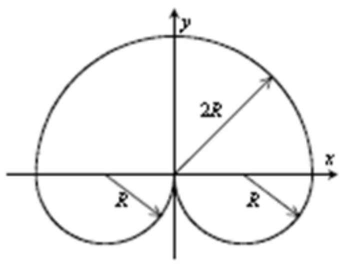
(3) : $R_{AZ} = 0{,}334\, P$

(2) : $R_{Ay} = 0$

(1) : $R_{Ax} = 0{,}333\, P$

$T_{BD} = 0{,}471\, P$; $R_A = 0{,}471\, P$; $R_{Cz} = \frac{P}{3}$

Exercice 32 :
Une tige courbe homogène est formé par trois cercles (un cercle de rayon 2R et deux cercles rayon R). Déterminer les coordonnées de son centre de masse.



Solution :

1) centre d'inertie d'un demi-cercle de rayon 2R :

L'axe (O_y) est un axe de symétrie, donc :

$X_{1G} = 0$

$y_{G1} = \frac{1}{m_1}\int ydm$. (le centre de masse du solide est situé sur l'axe O_y)

Le solide est linéaire, sa masse est donné par :

$m_1 = \int \lambda d\ell$ où λ est la densité linéaire et $d\ell$ un élément de longueur.

$d\ell \begin{cases} x = 2R\cos\theta \\ y = 2R\sin\theta \end{cases}$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$

$m_1 = \lambda \int d\ell = \lambda \int 2Rd\theta \Rightarrow m_1 = \lambda 2R \int_0^\pi d\theta \Rightarrow m_1 = \lambda\pi 2R$.

$y_{1G} = \frac{1}{m}\int ydm = \frac{1}{m_1}\int 2R\sin\theta\,\lambda 2Rd\theta \Rightarrow y_{1G} = \frac{1}{\lambda 2R\pi}.4R^2\lambda\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta$

$y_{1G} = \frac{2R}{\pi}[-\cos\theta]_0^\pi \Rightarrow y_{1G} = \frac{4R}{\pi}$

$G_1 \begin{cases} x_{1G} = 0 \\ y_{1G} = \frac{4R}{\pi} \end{cases}$ avec $m_1 = \lambda 2\pi R$

b) centre d'inertie d'un demie cercle (2) rayon R :

Masse d'un demi-cercle :

$dm_2 = \lambda d\ell_2$

Même méthode : $m_2 = \lambda\pi R$

$x_{2G}=\frac{1}{m_2}\int xdm$ tel que : $d\ell\begin{cases} x = -R\cos\theta \\ y = -R\sin\theta \end{cases}$ $0 \le \theta \le \pi$

$y_{2G}=\frac{1}{m_2}\int ydm$

$x_{2G}=\frac{1}{\lambda\pi R}\int R\cos\theta\, dm = \frac{1}{\lambda\pi R}\int_0^{\pi} R\cos\theta\,.\lambda Rd\theta$

$x_{2G}=\frac{\lambda R^2}{\lambda\pi R}\int_0^{\pi}\cos\theta \Rightarrow x_{2G}\,\frac{R}{\pi}[\sin\theta]_0^{\pi} = 0$

$y_{2G}=\frac{1}{m_2}\int ydm = \frac{1}{\lambda\pi R}\int -R\sin\theta\,\lambda Rd\theta = \frac{-R}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta$

$y_{2G}=-\frac{R}{\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi} \Rightarrow y_{2G}=-\frac{2R}{\pi}$

Remarque : par la symétrie « demi-cercle 2 et 3 », on trouve :

$y_{2G}=y_{3G} = -\frac{2R}{\pi}$ ainsi $m_2=m_3=\lambda\pi R$

Le solide est homogène, alors les coordonnées du centre d'inertie du solide qui est un système composé seront données par les relations suivantes :

Sur l'axe des x : $x_G=\frac{m_1x_{1G}+m_2x_{2G}+m_3x_{3G}}{m_1+m_2+m_3}$

D'où : $x_G = 0$

De même sur l'axe des y :

$y_G=\frac{m_1y_{1G}+m_2y_{2G}+m_3y_{3G}}{m_1+m_2+m_3}$

D'où :

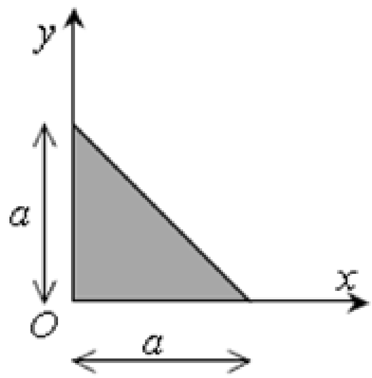
$y_G = \frac{\frac{4R}{\pi}.2\pi R+\left(-\frac{2R}{\pi}\right)(\pi R)-\frac{2R}{\pi}(\pi R)}{2\pi R+\pi R+\pi R}$

$y_G = \frac{R}{\pi}$

Les coordonnes du centre d'inertie du solide composé sont : $G\left(0, \frac{R}{\pi}\right)$.

Exercice 33 :
Déterminer les coordonnées du centre de masse de la surface du triangle isocèle

présenté ci-contre :



Solution :

Soit S : la surface du triangle

dS = dxdy : la droite limitant le triangle a pour équation :

y=-x+a ; où x=-y+a

$S = \int \mathrm{dxdy} = \int_0^a dx \,.\int_0^{a-x} dy = \int_0^a (a-x)dx = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\mathrm{dm}=\sigma \mathrm{\ ds} \Rightarrow m = \sigma . \mathrm{S} \Rightarrow m = \sigma \frac{a^2}{2}$

$\mathrm{x_G}=\frac{1}{\mathrm{m}}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{\sigma\, a^2}\int x\sigma\, dx\, dy = \frac{2}{a^2}\int_0^a xdx \int_0^{a-x} dy$

$\mathrm{x_G}=\frac{2}{a^2}\int x(\mathrm{a}-\mathrm{x})\mathrm{dx} \Rightarrow \mathrm{x_G}=\frac{2}{a^2}\left[\int_0^a axdx - \int_0^a x^2dx\right]$

$\mathrm{x_G}=\frac{2}{a^2}\left[\frac{a^3}{6}\right] \Rightarrow \mathrm{x_G} = \frac{a}{3}$

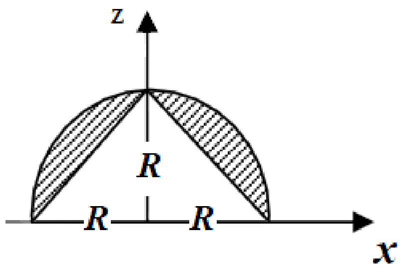
$\mathrm{y_G}=\frac{1}{\mathrm{m}}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{\sigma\, a^2}\int y\sigma\, dx\, dy = \frac{2\sigma}{\sigma\, a^2}\int_0^a ydy \int_0^{a-y} dx$

$\mathrm{y_G}=\frac{2}{a^2}\int y(\mathrm{a}-\mathrm{y})\mathrm{dy} \Rightarrow \mathrm{y_G} = \frac{a}{3}$

Les coordonnées du centre de masse du triangle isocèle : $\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$

Exercice 34 :

Déterminer les coordonnées du centre d'inertie de la figure suivante par intégration et par le théorème de Guldin.



Solution :

1) Par intégration :

L'axe (Oz) est un axe de symétrie ; donc :

$x_G=0$; $z_G=\frac{1}{m}\int z\mathrm{d}m$

a)centre de mase du demi-disque de rayon R :

$m_1=\int \sigma\, \mathrm{d}S$ où σ : est la densité surfacique

ds : l'élément de surface à pour coordonnée :

ds $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases}$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq r \leq R$

$m_1=\sigma \int rdrd\theta = \sigma \int_0^R rdr \int_0^\pi d\theta \Rightarrow m_1 = \sigma\,.\pi\,\frac{R^2}{2}$

$z_{1G}=\frac{1}{m_1}\int zdm = \frac{2}{\sigma\,\pi R^2}\int \mathrm{r}\sin\theta\,.\,\sigma\, rdrd\theta$

$z_{1G}=\frac{2}{\pi R^2}\,\frac{R^3}{3}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \Rightarrow z_{1G} = \frac{2R}{3\pi}[-\cos\theta]_0^\pi$

$z_{1G}=\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}$ $G_1\left(0,\frac{4R}{3\pi}\right)$

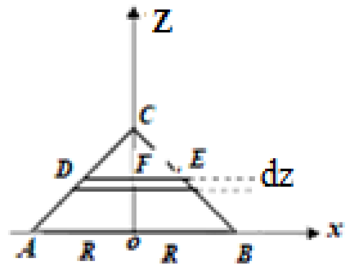
b) centre de masse d'un triangle :

Masse du triangle :

$m_2 = \sigma\, S_2=\sigma\, 2.\frac{1}{2}R^2 \Rightarrow m_2 = \sigma\, R^2$

$z_{2G}=\frac{1}{m_2}\int zdm = \frac{1}{m_2}\int z\ \sigma\ \mathrm{ds}$

L'élément de surface est donné par : dS_2=DE.dz =L.d z



Les triangles ABC et DEC sont semblables, on a alors :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{FC}{OC} \Leftrightarrow \frac{L}{2R} = \frac{R-z}{R} \Longrightarrow L = 2(R-z)$$

Donc : $dS_2 = 2(R-z)dz$ avec $0 \leq z \leq R$

$$z_{2G}=\frac{1}{\sigma\, R^2}\int z\,\sigma\, dS_2 = \frac{1}{\sigma\, R^2}\int_0^R \sigma\, z.2(R-z)dz \Rightarrow z_{2G}=\frac{R}{3}$$

Centre d'inertie du solide est donné par la relation suivante :

$$z_G=\frac{m_1 z_{1G}-m_2 z_{2G}}{m_1-m_2} = \frac{s_1 z_{1G}-s_2 z_{2G}}{s_1-s_2}$$

$$z_G = \frac{\frac{\pi R^2}{2}.\frac{4R}{3\pi}-\frac{R^2}{1}.\frac{R}{3}}{\frac{\pi R^2}{2}-R^2} \Longrightarrow z_G = \frac{2}{3}.\frac{R}{\pi-2}$$

Le centre d'inertie du solide :

$$G_1\left(0, \quad \frac{2}{3}\frac{R}{\pi-2}\right)$$

2) Par le théorème de Guldin :

Relation par rapport a l'axe OX , donne la coordonnée z_G :

$$z_G=\frac{V_{tot}/x}{2\pi.S_{tot}}$$

Par le théorème de Guldin, en faisant tourner le solide autour des axes, nous déduisons le centre d'inertie du solide composé :

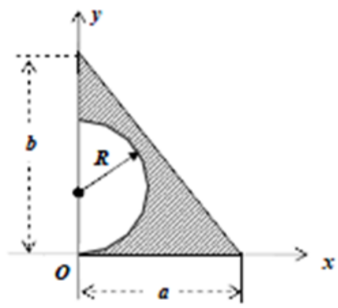
Demi-disque (surface) → une sphère (volume)

Triangle (surface) → 2 cônes (volume)

$$z_G=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - 2\pi.\frac{R}{3}.R^2}{2\pi(\frac{\pi R^2}{2}-R^2)} \Longrightarrow z_G = \frac{2}{3}.\frac{R}{\pi-2}$$

Exercice 35 :

Déterminer le centre d'inertie du système ci-dessous par intégration et par le théorème de Guldin.



Solution

1) Par l'intégration :

a) soit S_1 la surface du triangle :

dS_1 = dxdy ; la droite limitant le triangle a pour équation :

$y = \frac{b}{a}(-x + a)$; où $x = \frac{a}{b}(b - y)$

$$S_1 = \int dxdy = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}(-x+a)} dy = \int_0^a \frac{b}{a}(-x + a)dx$$

$$S_1 = b.\frac{a}{2}$$

$$x_{1G} = \frac{1}{m_1}\int xdm = \frac{1}{\sigma S_1}\int x\sigma\, dS_1 = \frac{1}{S_1}\int xdS_1$$

$$x_{1G} = \frac{2}{b.a}\int xdxdy = \frac{2}{b.a}\int_0^a xdx \int_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dy$$

$$x_{1G} = \frac{2}{b.a}\int_0^a x\frac{b}{a}(a - x)dx \Rightarrow x_{1G} = \frac{2}{b.a}.\frac{b}{a}\int_0^a x(a - x)dx$$

$$x_{1G} = \frac{2}{a^2}\left[a.\frac{x^2}{2}\Big|_0^a - \frac{x^3}{3}\Big|_0^a\right] \Rightarrow x_{G1} = \frac{a}{3}$$

$$y_{1G} = \frac{1}{m_1}\int ydm = \frac{1}{\sigma S_1}\int y\sigma\, dS_1 = \frac{1}{S_1}\int ydS_1$$

$$y_{1G} = \frac{2}{b.a}\int ydxdy = \frac{2}{b.a}\int_0^b ydy \int_0^{\frac{a}{b}(b-y)} dx$$

$y_{1G}=\frac{2}{b.a}\int_0^b y\frac{a}{b}(b-y)dy=\frac{2}{b.a}.\frac{a}{b}\int_0^b y(b-y)dy$

$y_{1G}=\frac{2}{b^2}\left[b.\frac{y^2}{2}\Big|_0^b-\frac{y^3}{3}\Big|_0^b\right]\Rightarrow y_{1G}=\frac{b}{3}$

2) soit S_2 la surface du demi-disque :

$dS_2 = rdrd\theta \qquad 0 \le r \le R \quad \text{et} \; -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$S_2 = \int dS_2 = \int rdrd\theta = \int_0^R rdr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi\frac{R^2}{2}$$

$x_{2G}=\frac{1}{m_2}\int xdm=\frac{2}{\sigma\,\pi R^2}\int r\cos\theta\,\sigma\, rdrd\theta$

$x_{2G}=\frac{2}{\pi R^2}\;\frac{R^3}{3}\;\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta \Rightarrow x_{2G}=\frac{4R}{3\pi}$

Donc : centre d'inertie du demi-disque : $\begin{cases} x_{2G} = \frac{4R}{3\pi} \\ y_{2G} = R \end{cases}$

Le centre d'inertie du solide :

$$x_G=\frac{m_1x_{1G}-m_2x_{2G}}{m_1-m_2}=\frac{S_1x_{1G}-S_2x_{2G}}{S_2-S_1}$$

$$x_G=\frac{\frac{ab}{2}.\frac{a}{3}-\frac{\pi R^2}{2}.\frac{4R}{3\pi}}{\frac{ab}{2}-\frac{\pi R^2}{2}}\Rightarrow x_G=\frac{\frac{a^2b}{6}-\frac{2R^3}{3}}{\frac{1}{2}(ab-\pi R^2)}$$

$$x_G=\frac{a^2b-4R^3}{3(ab-\pi R^2)}$$

$$y_G=\frac{m_1y_{1G}-m_2y_{2G}}{m_1-m_2}=\frac{S_1y_{1G}-S_2y_{2G}}{S_1-S_2}$$

$$y_G=\frac{\frac{ab}{2}.\frac{b}{3}-\frac{\pi R^2}{2}.R}{\frac{ab}{2}-\frac{\pi R^2}{2}}=\frac{\frac{ab^2}{6}-\frac{\pi R^3}{2}}{\frac{1}{2}-(ab-\pi R^2)}$$

$$y_G=\frac{ab^2-3\pi R^3}{3(ab-\pi R^2)}$$

Le centre d'inertie du solide (S) composé : $G\left(\frac{a^2b-4R^3}{3(ab-\pi R^2)}\,,\;\frac{ab^2-3\pi R^3}{3(ab-\pi R^2)}\right)$

2) par théorème de Guldin :

Par le théorème de Guldin, en faisant tourner le solide autour des axes, nous déduisons le centre d'inertie du solide compose :

Rotation du solide pour rapport a l'axe OX, donne la coordonnée y_G:

$$y_G = \frac{V_{tot}/x}{2\pi S_{tot}} = \frac{V_{cone} - V}{2\pi\left(S_{triangle} - S_{demi-disque}\right)}$$

$$y_G = \frac{\frac{1}{3}\pi b^2 a - 2\pi.R\frac{\pi R^2}{2}}{2\pi\left(\frac{ab}{2} - \frac{\pi R^2}{2}\right)} \Rightarrow y_G = \frac{b^2 a - 3\pi R^2}{3(ab - \pi R^2)}$$

Rotation du solide pour rapport a l'axe OY, donne la coordonnée x_G:

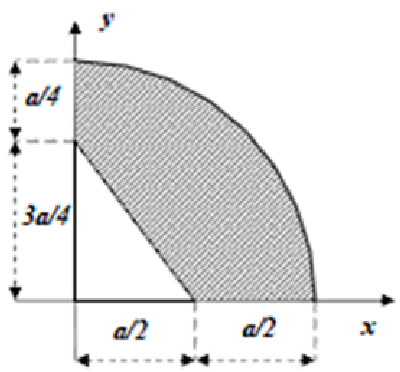
$$x_G = \frac{V_{tot}/y}{2\pi S_{tot}} = \frac{V_{cone} - V_{sphere}}{2\pi\left(\frac{ab}{2} - \frac{\pi R^2}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{3}\pi a^2 b - \frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi\left(\frac{ab}{2} - \frac{\pi R^2}{2}\right)}$$

$$x_G = \frac{a^2 b - 4R^2}{3(ab - \pi R^2)}$$

Exercice 36 :

Le système suivant est composé d'un quart de disque homogène évidé d'un triangle rectangle.

Déterminer le centre d'inertie du solide en utilisant le théorème de Guldin.



Solution :

Par théorème de Guldin, en faisant le solide autour des axes, nous déduisons le centre d'inertie du solide compose :

1) la rotation du solide par rapport a l'axe OY , donne la coordonnée x_G

$$x_G = \frac{V_{tot}/y}{2\pi S_{tot}} = \frac{V_{demi-sphere} - V_{cone}}{2\pi\left(S_{\frac{1}{4}disque} - S_{triangle}\right)}$$

$$x_G = \frac{\frac{1}{2}\ \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{3a}{4}}{2\pi\left[\frac{\pi a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}\right]} \Longrightarrow x_G = 0{,}506\ a$$

2) la rotation du solide par rapport à l'axe OX, donne la coordonnée y_G :

$$y_G = \frac{V_{tot}/x}{2\pi S_{tot}} = \frac{V_{demi-sphere} - V_{cone}}{2\pi\left(S_{\frac{1}{4}disque} - S_{triangle}\right)}$$

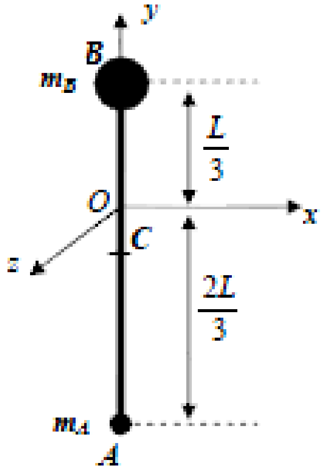
$$y_G = \frac{\frac{1}{2}\ \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi\ \left(\frac{3a}{4}\right)^2 \frac{a}{2}}{2\pi\left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}\right)} = 0{,}479\ a$$

Le centre d'inertie du solide compose $\left(\frac{1}{4}\text{disque} - \text{triangle}\right)$:

$$G\begin{cases} 0{,}506\ a \\ 0{,}479\ a \end{cases}$$

Exercice 37 :

On considère la tige AB homogène et de masse M avec les masse m_A et m_B aux extrémités. Calculer en fonction de m, L et M le centre de masse du système par rapport au repère (OXYZ).



Solution :

1) on détermine la position de la masse m_A et m_B et la barre :

$$m_A\begin{cases}0\\-\frac{2L}{3}\\0\end{cases}\qquad m_B\begin{cases}0\\\frac{L}{3}\\0\end{cases}\qquad M\begin{cases}0\\y_M\\0\end{cases}$$

Le centre d'inertie de la barre

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CA}\\\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{CB}\end{array}\right\}\Longrightarrow 2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\Longrightarrow\overrightarrow{OC}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

Donc $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\\frac{-L}{6}\\0\end{pmatrix}$

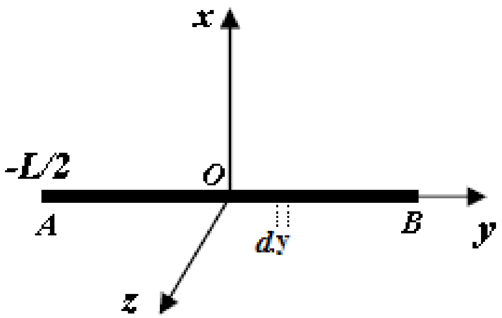
Le centre d'inertie de système :

$$y_G=\frac{m_A y_A+m_B y_B+M.y_G}{m_A+m_B+M}=\frac{\left(-\frac{2L}{3}\right)m+\left(\frac{L}{3}\right)3m+\left(-\frac{L}{6}\right)M}{m+3m+M}$$

$$y_G=\frac{2m-M}{4m+M}.\frac{L}{6}$$

Exercice 38 :

Déterminer la matrice d'inertie en O, par rapport a un repère orthonormé (O, xyz) d'une barre AB rectiligne, de longueur L, de milieu O, l'axe OY est porte par la barre.



Solution :

Le tenseur d'inertie en O d'un corps solide :

$$I_0 = \begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

Les éléments de la matrice d'inertie s'écriraient sous la forme :

$I_{xx} = \int_{(s)}(y^2 + z^2)dm$ Moment d'inertie par rapport à l'axe OX.

$I_{yy} = \int_{(s)}(x^2 + z^2)dm$ Moment d'inertie par rapport à l'axe Oy.

$I_{zz} = \int_{(s)}(x^2 + y^2)dm$ Moment d'inertie par rapport à l'axe OZ.

Les produits d'inertie sont donnés par :

$I_{xy} = \int_{(s)} xydm$; $I_{xz} = \int_{(s)} xz\, dm$; $I_{yz} = \int_{(s)} yzdm$

Sur la barre AB, nous avons : x=0 et z = 0

Donc : $I_{xx} = \int y^2dm$; $I_{yy} = 0$; $I_{zz} = \int y^2dm$

Par raison de symétrie par rapport aux axes OX et OZ :

$I_{xx}=I_{zz}$ et $I_{yy} = 0$

Aussi :

$I_{xy}=I_{xz} = I_{yz} = 0$

Donc, on aurra : $I_0 = \begin{vmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{vmatrix}$

1)$I_{zz} \int y^2 dm$

Soit λ la densité linéique de la barre, nous avons alors : dm=λdy

$$M = \int dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \lambda dy = \lambda L \implies \lambda = \frac{M}{L}$$

$$I_{zz} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y^2 \lambda dy \Rightarrow I_{zz} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} y^2 dy = \lambda \frac{y^3}{3}\Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \lambda \frac{L^2}{12}$$

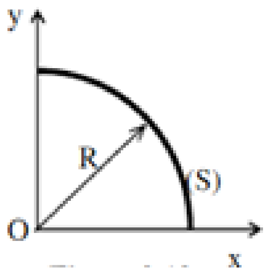
$$I_{zz} = \frac{ML^2}{12}$$

La matrice d'inertie par rapport au repère (O, XYZ) s'écrira :

$$I_0 = \begin{vmatrix} \frac{ML^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ML^2}{12} \end{vmatrix}$$

Exercice 39 :

Déterminer Le tenseur d'inertie en O, relativement au repère orthonormé (O, XYZ) du solide homogène: quart de disque de rayon R.



Solution :

le solide (quart de disque) se trouve dans le plan (O,XY) : z=0

$I_{xx} = \int y^2 dm$; $I_{yy} = \int x^2 dm$; $I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = I_{xx} + I_{yy}$

Les produit d'inertie sont donnes par :

$I_{xy} = \int xydm$; $I_{xz} = I_{yz} = 0$

La matrice d'inertie est de la forme :

$$I_0 = \begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{vmatrix}$$

$dm = \sigma\, dS = \sigma\, r dr\, d\theta \qquad 0 \leq r \leq R \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$dS \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$M = \sigma \int_0^R r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \Rightarrow M = \sigma\, \pi \frac{R^2}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{4M}{\pi 4}$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 dm = \int r^2 \sigma\, dS = \int r^2 \sigma\, r dr d\theta$$

$$I_{zz} = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \Rightarrow I_{zz} = \sigma \left[\frac{R^4}{4}\right] \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_{zz} = \frac{4M}{\pi R^2} . \frac{R^4}{4} . \frac{\pi}{2}$$

$$I_{zz} = M \frac{R^2}{2}$$

Les axes (OX) et (OY) jouent le même rôle : $I_{xx} = I_{yy}$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \Rightarrow I_{xx} = \frac{I_{zz}}{2} \quad \text{et } I_{yy} = \frac{I_{zz}}{2}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{MR^2}{4}$$

$$I_{xy} = \int xy\ dm = \int r^2 \cos\theta \sin\theta\, \sigma\, r dr d\theta$$

$$I_{xy} = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\, d\theta \Rightarrow I_{xy} = \sigma \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

<u>Remarque</u> :

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \Rightarrow \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$I_{xy} = \sigma \frac{R^4}{4} . \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\, d\theta \Rightarrow I_{xy} = \frac{\sigma R^4}{8} \left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

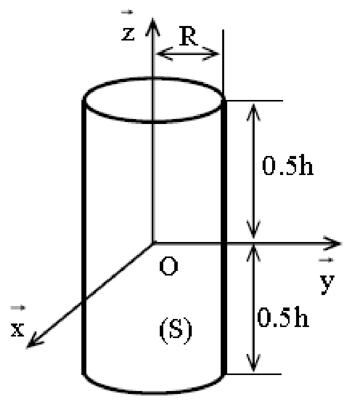
$$I_{xy} = \frac{M}{2\pi} R^2$$

La matrice d'inertie par rapport au repère (O,XYZ) :

$$I_0 = \begin{vmatrix} \frac{MR^2}{4} & -\frac{MR^2}{2\pi} & 0 \\ -\frac{MR^2}{2\pi} & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{vmatrix}$$

Exercice 40 :

Déterminer la matrice d'inertie en O, par rapport a un repère orthonormé (O, XYZ), d'un cylindre homogène (S) et de rayon R.



Solution :

La matrice d'intérêt dans le centre 0 du cylindre, s'écrit :

$$I_0 = \begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

On remarque que l'axe OZ est un axe révolution, donc tout plan contenant l'axe OZ est un plan de symétrie, en particulier : (OXZ) et (OYZ), les produits d'inertie sont nuls :

$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Les deux axes (OX) et (OY) jouent le même rôle : $I_{xx} = I_{yy}$

Puisque x=y, la base du cylindre forme l'équation du cercle : $x^2 + y^2 = r^2$

$$\mathrm{I}_{zz} = \int_{(s)} (x^2 + y^2)dm = \int_{(s)} r^2 dm$$

- Détermination la masse du cylindre :

$dm = \rho dV = \rho r dr d\theta\, dz$

$0 \leq r \leq R \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad ; -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$

$$M = \int \rho dV \Longrightarrow M = \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \Longrightarrow M = \rho\pi R^2 h$$

$$\mathrm{I}_{zz} = \int_{(s)} r^2 dm = \int_{(s)} r^2 \rho r dr d\theta\, dz = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz$$

$$\mathrm{I}_{zz} = \rho \frac{R^4}{4} . 2\pi . h \Longrightarrow \mathrm{I}_{zz} = \frac{MR^2}{2}$$

Détermination : I_{xx} ou I_{yy}

$$\mathrm{I}_{xx} = \int (y^2 + z^2)dm ; \mathrm{I}_{yy} = \int (x^2 + z^2)dm ; \mathrm{I}_{zz} = \int (x^2 + y^2)dm$$

On peut écrire : $\mathrm{I}_{xx} + \mathrm{I}_{yy} = \int_{(s)} (x^2 + y^2)dm + 2\int_{(s)} z^2 dm$

Tel que : $\mathrm{I}_{xx} = \mathrm{I}_{yy}$

Donc : $\mathrm{I}_{xx} = \mathrm{I}_{yy} = \frac{\mathrm{I}_{zz}}{2} + \int_{(s)} z^2 dm = \frac{MR^2}{4} + \mathrm{I}'$

$$\mathrm{I}' = \int z^2 dm = \int_{(s)} z^2 \rho r dr d\theta\, dz = \rho \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\, dz = \rho \frac{R^2}{2} . 2\pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$\mathrm{I}' = \rho R^2 \frac{\pi}{3} . \frac{h^3}{4} \Longrightarrow \mathrm{I}' = M\frac{h^2}{12}$$

$$\mathrm{I}_{xx} = \mathrm{I}_{yy} = \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12}$$

La matrice d'inertie du cylindre dans le centre 0, s'écrit :

$$I_0 = \begin{vmatrix} \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} + \frac{Mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{vmatrix}$$

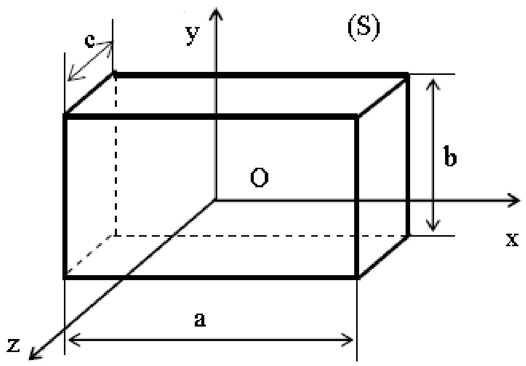
Exercice 41 :

On considère un parallélépipède(s) de cotés a, b et c, les axes OX, Oy et OZ passent par le centre O et son parallèles aux cotés du parallélépipède.

1) déterminer la matrice en O, par rapport a un repère orthonormé (O,XYZ).

2) Déduire la matrice d'inertie d'une plaque rectangulaire sans épaisseur et de coté a et b.

3) déterminer le moment d'inertie par rapport à une diagonale(Δ) de la plaque.



Solution :

1) tenseur d'inertie du parallélépipède :

Les plans XOZ et YOZ sont des plans de symétrie, alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

On choisit un petit élément de volume dV=dxdydz   tel que :

$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$; $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$; $-\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}$

Masse du parallélépipède : dm=ρdV

$$M = \rho\int_{(s)} dV = \rho\int dxdydz \Rightarrow m = \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \Rightarrow M = \rho a.b.c$$

Pour calculer les moments d'inertie, nous allons d'abord calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{(s)} x^2 dm = \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \Rightarrow \int_{(s)} x^2 dm = \rho\frac{a^3 bc}{12} = \frac{Ma^2}{12}$$

$$\int_{(s)} y^2 dm = \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz \Rightarrow \int_{(s)} y^2 dm = \rho\frac{b^3 ac}{12} = \frac{Mb^2}{12}$$

$$\int_{(s)} z^2 dm = \rho\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz \Rightarrow \int_{(s)} z^2 dm = \rho\frac{c^3 a.b}{12} = \frac{Mc^2}{12}$$

D'où :

$$I_{xx} = \int_{(s)} (z^2 + y^2) dm = \int y^2 dm + \int z^2 dm = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)$$

$$I_{yy} = \int_{(s)} (x^2 + z^2) dm = \int x^2 dm + \int z^2 dm = \frac{M}{12}(a^2 + c^2)$$

$$I_{zz} = \int_{(s)} (x^2 + y^2) dm = \int x^2 dm + \int y^2 dm = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$$

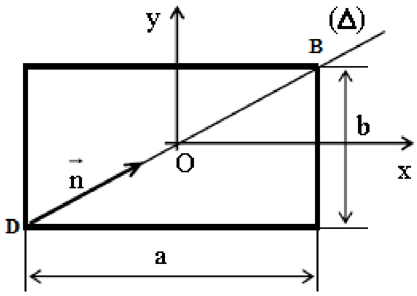
Donc la matrice d'inertie au centre O du parallélépipède de coté a, b et c, s'écrit :

$$I_0 = \frac{M}{12}\begin{vmatrix} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & (a^2 + c^2) & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{vmatrix}$$

2) la matrice d'inertie d'une plaque d'épaisseur négligeables ($c \simeq 0$)

$$I_0 = \frac{M}{12}\begin{vmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{vmatrix}$$

3) le moment d'inertie par rapport a un diagonale (Δ) de la plaque :



Le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par le centre de solide, est donne par la relation :

$I_\Delta = \vec{n}^t . I_0 . \vec{n}$

$\vec{n}$: vecteur unitaire qui qui donne la direction du l'axe(Δ)

$\vec{n}^t$: est le transposé du vecteur $\vec{n}$

I_0 : le moment d'inertie par rapport au centre O.

- détermination du vecteur unitaire $\vec{n}$

$\vec{n}(\alpha \quad \beta \quad 0)$

$$\overrightarrow{DB} = DB\vec{n} \Longrightarrow \vec{n} = \frac{\overrightarrow{DB}}{DB}$$

$D(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$; $B(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{a\,i} + \overrightarrow{b\,j}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\vec{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} ; \vec{n}^t \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$I_\Delta = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0\right) . \frac{M}{12} \begin{vmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_\Delta = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.\frac{Mb^2}{12}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{Ma^2}{12}, 0\right)\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$I_\Delta = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}.\frac{Mb^2}{12}, \frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{Ma^2}{12} + 0\right) \Longrightarrow I_\Delta = \frac{M}{6}.\frac{a^2+b^2}{12}$$