CHAPITRE II

Cinématique du point matériel

II.1 Cinématique sans changement de référentiel

II.1.1 Définitions Générales

La cinématique est l'étude du mouvement en fonction du temps indépendamment des causes produisant ce mouvement (les forces appliquées au point matériel).

II.1.2 Repère

Pour repérer la position d'une particule, il est nécessaire de définir un repère d'espace. Cela consiste à choisir une origine O et une base$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Le trièdre $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est le repère d'espace.

II.1.3 Référentiel

Un référentiel est un repère spatial muni d'un repère temporel (repère + horloge). Un référentiel est donc un objet par rapport auquel on étudie le mouvement. Tout mouvement est relatif au référentiel utilisé.

II.1.4 Trajectoire

La trajectoire d'un point mobile M dans un repère donné est la courbe formée par l'ensemble des positions successives du point M dans ce repère.
La trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi.

II.1.5 Vecteur vitesse d'un point matériel

Puisque la trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi, les caractéristiques du mouvement doivent changer d'un référentiel à un autre. Une de ces caractéristiques est le vecteur vitesse du point mobile. C'est pour cette raison qu'on utilise la notation $\vec{V}(M/R)$ pour signifier qu'il s'agit de la vitesse du point M par rapport au référentiel R. On utilisera la même notation pour les deux types de vitesse qu'on va traiter dans la suite, la vitesse moyenne et la vitesse instantanée.

☒ **Vitesse moyenne :**

Soit un point matériel décrivant une trajectoire *(C)* dans un référentiel *R*. Le point matériel occupe la position *M* à l'instant *t* et a position *M'* à l'instant *t'=t+Δt*.

La vitesse moyenne du point matériel entre *t* et *t'* est alors donnée par:

$$V(M/R) = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM}'}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse est donc un vecteur qui a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{MM'}$ (si $t' > t$).

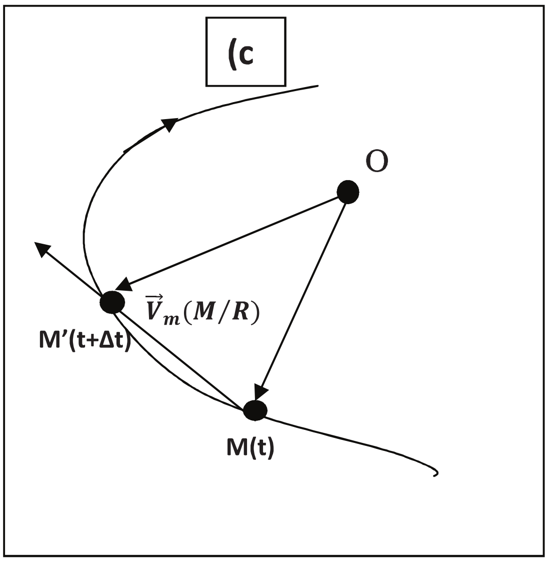

Figure II.1 : Vitesse moyenne

☒ **Vitesse instantanée :**

Le vecteur vitesse instantanée de *M* par rapport au référentiel *R* à un instant *t* est obtenue en prenant la limite *Δt → 0* dans la définition de la vitesse moyenne, (*c.à.d.* les points *M* et *M'* sont infiniment proche):

$$V(M/R) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}' - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

Propriétés du vecteur vitesse instantanée

- Son origine est la position de la particule à l'instant *t*.
- Sa direction est tangente à la trajectoire à la position considérée.
- Son sens est donné par le sens de parcours de la trajectoire.

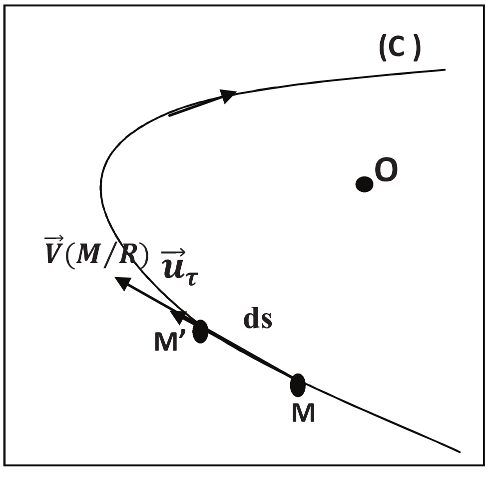

Figure II.2 : vitesse instantanée

- Son module est $\frac{ds}{dt}$ représente le déplacement curviligne élémentaire. On peut résumer ces propriétés dans l'expression :

$$V(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{ds}{dt}\,\vec{u}_\tau$$

où $\vec{u}_\tau$ dénote le vecteur unitaire tangent à la trajectoire de même sens que le sens du mouvement.

II.1.6 Vecteur accélération

Une autre caractéristique du mouvement d'un point matériel est le vecteur accélération. On utilise une notation similaire à celle pour la vitesse,$\vec{\gamma}(M/R)$, pour signifier qu'il s'agit de l'accélération du point M par rapport au référentiel R.
Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, ou de façon équivalente la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|$$

On peut définir le vecteur accélération moyenne aussi de façon similaire au vecteur vitesse. Il mesure alors la variation moyenne de la vitesse sur un intervalle de temps Δt.

II.1.7 Systèmes de coordonnées
II.1.7.1 Coordonnées Cartésiennes
II.1.7.1.1 Définitions

Soit le repère fixe orthonormé directe *R(O;X,Y,Z)* de base orthonormé directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. La position d'un point *M* peut être repérer par ses trois composantes cartésiennes (x,y,z), projection orthogonales sur les trois axes du repère :
Le vecteur position s'écrit alors:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}}$$

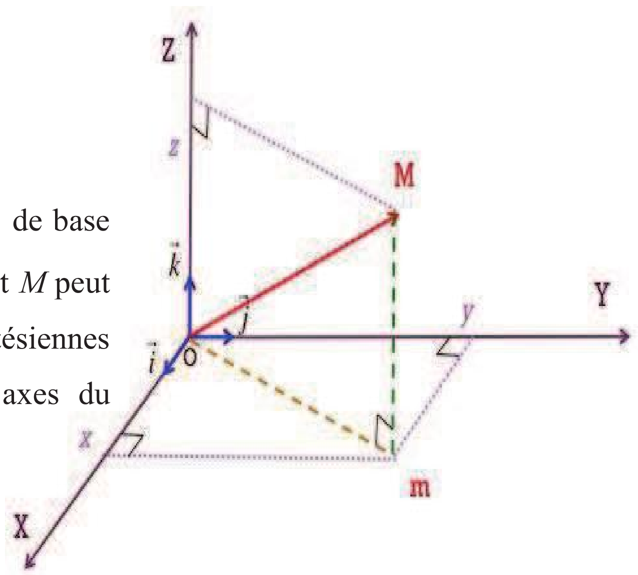

Figure II.3 : Coordonnées Cartésiennes

II.1.7.1.2 Vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes

En dérivant l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes par rapport au temps, on obtient l'expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ des coordonnées cartésiennes étant fixes, leurs dérivées par rapport au temps sont nulles:

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

On utilise aussi la notation suivante

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$$

où le point sur la variable signifie la dérivée par rapport au temps.

II.1.7.1.3 Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

Pour obtenir les expressions des composantes du vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées il faut dériver les expressions du vecteur vitesse obtenues dans le paragraphe précédent

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}\,(M/R)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

En utilisant l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k})}{dt}$$

Puisque les vecteurs de la base des coordonnées cartésiennes sont fixes, on dérive seulement les composantes du vecteur vitesse, ce qui donne

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

On utilise parfois la notation suivante

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

où les deux points sur une variable signifie la dérivée seconde de la variable par rapport au temps.

II.1.7.2 Coordonnées polaires

II.1.7.2.1 Définitions

C'est un système de coordonnées utilisé pour repérer la position d'un point M à deux dimensions. Ainsi, la position du point M, est repérée par la donnée de la distance r, qui le sépare de l'origine O et de l'angle θ que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe *(OX)*.

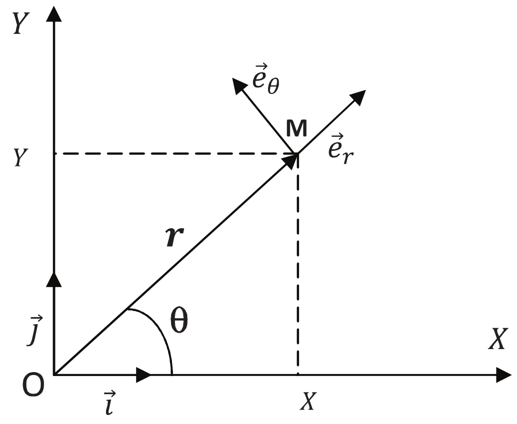

Figure II.4 : Coordonnés polaires

On a donc

$$r = |\overrightarrow{OM}| \; ; \quad 0 < r < +\infty$$

$$\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{\imath}}\right) \; ; \quad 0 < \theta < 2\pi$$

☒ **Règles de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :**

En utilisant le schéma dans la figure ci-dessus on peut trouver les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = r \, cos \, \theta \\ y = r \, sin \, \theta \end{cases}$$

Ou inversement

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

On définit la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associées aux coordonnées polaires. Le vecteur $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{OM}$, et le vecteur $\vec{e}_\theta$ est le vecteur directement perpendiculaire à $\vec{e}_r$. Cette base est reliée à la base $\overrightarrow{(\imath, \jmath)}$:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos\theta \, \vec{\imath} + \sin\theta \, \vec{\jmath} \\ \vec{e}_\theta = -\sin\theta \, \vec{\imath} + \cos\theta \, \vec{\jmath} \end{cases}$$

☒ **Le vecteur position :**

Le vecteur position en coordonnées polaire s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

II.1.7.2.2 Vecteur vitesse en coordonnées polaires

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires on dérive le vecteur position en coordonnées polaires :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{d(r)}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d(\vec{e}_r)}{dt}$$

$$\Longrightarrow \vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

En effet, $\vec{e}_r$ dépend de façon implicite de *t*, à travers sa dépendance de l'angle θ. Ainsi

$$\frac{d(\vec{e}_r)}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

On obtient alors pour le vecteur vitesse:

$$\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

II.1.7.2.3 Vecteur accélération en coordonnées polaires

En coordonnées polaires le vecteur accélération est donné par l'expression suivante :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + (2\,\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Preuve :

On dérive l'expression du vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right)}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dt}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \frac{d\dot{\theta}}{dt}r\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

Sachant que :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \;\; et \;\; \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

En remplaçant dans l'expression de l'accélération ci-dessus, on obtient :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{\theta}r\,\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

Finalement

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta$$

II.1.7.3 Coordonnées cylindriques

II.1.7.3.1 Définitions

Il est possible de repérer la position, dans l'espace, d'un point *M* en utilisant le système de coordonnées cylindriques. Dans ce système la position du point est repérée par la donnée de la composante *z* (comme dans les coordonnées cartésiennes) et de ses coordonnées polaires qui permettent de repérer la position de la projection orthogonale du point *M* sur le plan horizontale.

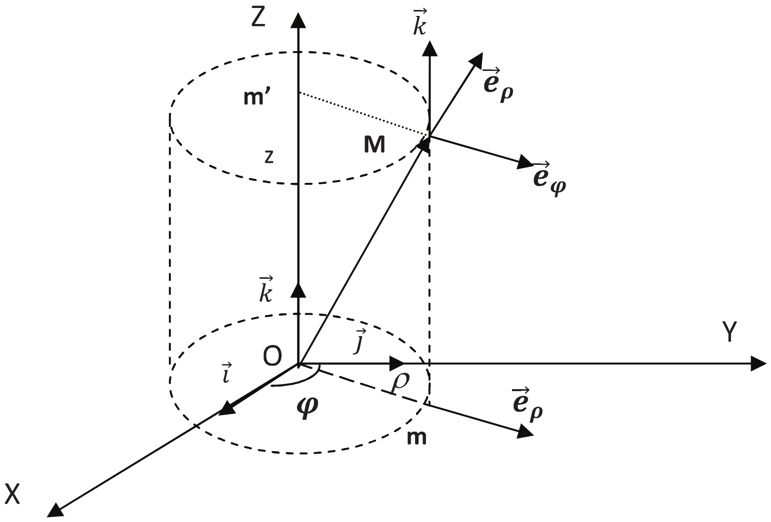

Figure II.5 : Coordonnés cylindriques

On a dons d'après la figure précédente

$$\begin{cases} \rho = \overline{|\overrightarrow{om}|} \quad ; \quad 0 \ \leq \rho < \ +\infty \\ \varphi = (\widehat{\overrightarrow{om}, \vec{\imath}}) \quad ; \quad 0 \ \leq \ \varphi \leq 2\pi \\ z = \overline{om'} \quad ; \quad -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

- **Règles de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques :**

On peut passer du système de coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes en utilisant les relations :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Ou inversement

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

On associe la base orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ aux coordonnées cylindriques, où le vecteur $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{om}$, et le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est défini de tel sorte à ce que le trièdre $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ soit directe.

Cette base est reliée à la base des coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

☒ **Vecteur position**

Dans cette base le vecteur position s'écrit de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{om} + \overrightarrow{mM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}$$

II.1.7.3.2 Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques on dérive le vecteur position en coordonnées cylindriques :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho + \ z\overrightarrow{k)}}{dt}$$

$$= \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Sachant que $\vec{k}$ est un vecteur fixe sa dérivée est nulle $\frac{d\vec{k}}{dt} = 0$. Le vecteur $\vec{e}_\rho$étant mobile, sa dérivée n'est pas nulle en générale. En effet, $\vec{e}_\rho$ dépend de façon implicite de *t*, à travers sa dépendance de l'angle φ. Ainsi

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

En utilisant l'expression du vecteur $\vec{e}_\rho$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on obtient

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\rho$$

ou encore

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

On obtient alors pour le vecteur vitesse:

$$\boxed{\vec{V}\,(M/R) = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k}}$$

Ou encore

$$\boxed{\vec{V}\,(M/R) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}}$$

II.1.7.3.3 Vecteur accélération en coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques le vecteur accélération est donné par l'expression suivante :

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\rho - \ddot{\rho}\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$$

<u>Preuve:</u>

On utilise l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\dot{\rho})}{dt}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\frac{d\dot{\varphi}}{dt}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{k}$$

On avait obtenu l'expression de la dérivée par rapport au temps du vecteur $\vec{e}_\rho$:

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

On obtient de façon similaire la dérivée du vecteur $\vec{e}_\varphi$:

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(-\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath})}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = (-\cos\varphi\,\vec{\imath} - \sin\varphi\,\vec{\jmath})\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

En remplaçant dans l'expression de l'accélération ci dessus on obtient :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}}$$

II.1.7.4 Coordonnées sphériques

II.1.7.4.1 Définitions

Dans l'espace à trois dimensions on peut utiliser le système des coordonnées sphériques, dont la base associée est une base mobile. Ce système de coordonnées est adéquat dans les cas où le système étudié présente un point particulier *O*, de symétrie autour duquel les rotations sont privilégiées.

La position du point matériel est alors repéré par la distance *r* et deux angles φ et θ. *r* étant la distance qui sépare le point matériel M du point particulier *O* (l'origine). L'angle φ appelé *longitude* ou *azimut* est l'angle que fait la projection du vecteur position sur le plan horizontal avec l'axe *(OX)* (similaire au cas du système de coordonnées cylindriques). L'angle θ, appelé *colatitude*, est l'angle que fait le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe *(OZ)*.

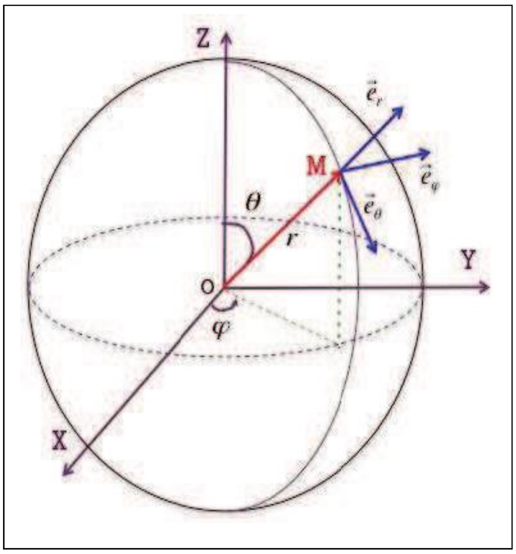

Figure II.6 : Coordonnées sphériques

On a donc

$$\begin{cases} r = \left|\overrightarrow{oM}\right| \quad ; \quad 0 \leq r < +\infty \\ \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{om}, \vec{\imath}}\right) \quad ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \vec{k}}\right) \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

☒ **Règles de passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques :**

On peut passer du système de coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes en utilisant les relations :

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Ces relations peuvent être inversées, pour exprimer les coordonnées sphériques en termes des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

La base orthonormée associées aux coordonnées sphériques est notée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Le vecteur $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de $\overrightarrow{OM}$. $\vec{e}_\theta$ est le vecteur unitaire obtenu par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ à partir de $\vec{e}_r$ dans le plan *(OZ, OM)*. Le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est défini de tel sorte à ce que le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ soit directe.

Cette base est reliée à la Base des coordonnées cartésiennes par les relations:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta \cos\varphi\, \vec{\imath} + \sin\theta \sin\varphi\, \vec{\jmath} + \cos\theta\, \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi\, \vec{\imath} + \cos\theta \sin\varphi\, \vec{\jmath} - \sin\theta\, \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{\imath} + \cos\varphi\, \vec{\jmath} \end{cases}$$

☒ **Vecteur position**

Dans cette base, le vecteur position s'écrit de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

II.1.7.4.2 Vecteur vitesse en coordonnées sphériques

Le vecteur position en coordonnées sphériques dépend du vecteur $\vec{e}_r$. Ce dernier dépend des angles θ et φ, donc sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

En utilisant les expressions des vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en fonction des vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ données précédemment, on montre que

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad et \quad \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \sin\theta\, \vec{e}_\varphi$$

Ainsi

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\, \vec{e}_\varphi$$

Le vecteur vitesse est obtenu en dérivant le vecteur position :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Ainsi, en coordonnées sphériques, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

Ou encore

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\,\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

II.1.7.4.3 Vecteur accélération en coordonnées sphériques

Le vecteur accélération en coordonnées sphériques est :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right)\vec{e}_r$$
$$+(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta$$
$$+(2\dot{r}\dot{\varphi}\,\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi$$

Preuve :

On utilise l'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi)}{dt}$$

Pour dériver les vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ on utilise leurs expressions en fonctions des vecteurs de la base $((\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On obtient alors :

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r\ , \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi} = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi, \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho = -(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$

Les dérivées temporelles des vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sont alors données par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\ \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e}_\theta}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\ \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\ \vec{e}_\theta$$

Ainsi en dérivant les composantes du vecteur vitesse en coordonnées sphériques ainsi que les vecteurs de la base, on obtient alors l'expression finale du vecteur accélération en coordonnées sphériques donnée ci dessus.

II.1.8 Repère de Frenet

Dans le cas d'un mouvement plan on peut définir en chaque point M de la trajectoire la base de Frenet. Pour cela on définit en tout point M un vecteur $\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T}$, tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de celle ci, et on définit le vecteur $\vec{\mathcal{U}}_n$ perpendiculaire à $\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T}$ et orienté vers la concavité de la trajectoire. Pour compléter le trièdre on définit un vecteur $\vec{B}$ tel que le trièdre $(\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T}, \vec{\mathcal{U}}_n, \vec{B})$ est un trièdre directe *c.à.d.* $\vec{B} = \vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} \wedge \vec{\mathcal{U}}_n$. Le trièdre $(\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T}, \vec{\mathcal{U}}_n, \vec{B})$ est appelé repère de Serret-Frenet.

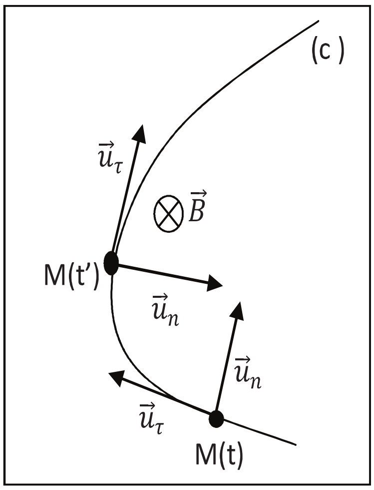

Figure II.7 : base de Frenet

Abscisse curviligne :

Dans le cas d'un mouvement curviligne il est parfois utile d'utiliser l'abscisse curviligne pour repérer la position du point matériel. Pour cela, on fixe un point *A* de la trajectoire (voir la *figure II.8*). L'abscisse curviligne s(t) est alors définie comme étant la distance curviligne du point fixe *A* au point *M(t)* qu'occupe le point matériel à l'instant t :

$$\widehat{AM} = arc(AM) = s(t)$$

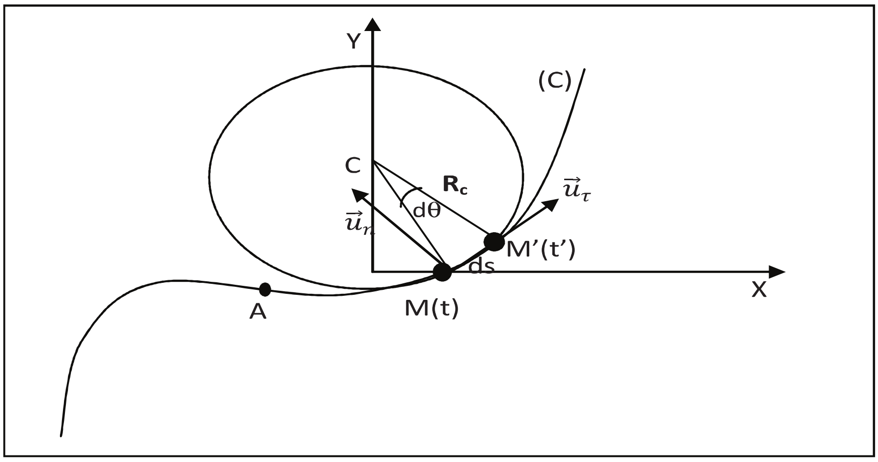

Figure II.8 : Abscisse curviligne

l'instant *t' =t+dt*, le point matériel occupant la position *M'(t')* on aura le vecteur position:

$$\widehat{AM'} = arc(AM') = s(t') \quad ; \quad t' = t + dt$$

Le déplacement élémentaire s'écrit alors :

$$\widehat{MM'} = arc(MM') = s(t') - s(t) = ds$$

ds est un arc de cercle de centre *C* et de rayon R_C , appelé rayon de courbure.

Les vecteurs $\vec{u}_T$ et $\vec{u}_n$ peuvent alors être obtenue de façon analytique de la façon suivante

$$\vec{u}_T = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \; ; \; \vec{u}_n = R_C \frac{d\vec{u}_T}{ds}$$

Preuve :

On a $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$,ce qui donne la définition du vecteur tangent $\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$.

Pour le vecteur normal, on remarque d'abord d'après le figure II.8 que $\vec{\mathcal{U}}_n$ est le vecteur directement perpendiculaire au vecteur $\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$ on a donc :

$$\vec{\mathcal{U}}_n = \frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{d\theta}$$

D'autre part on a $ds = R_C\,d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{ds}{R_C}$ .Ce qui donne pour $\vec{\mathcal{U}}_n$ l'expression

$$\vec{\mathcal{U}}_n = R_C\frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{ds}$$

II.1.8.1 Vecteur vitesse dans le repère de Frenet :

En dérivant le vecteur position par rapport au temps on trouve l'expression du vecteur vitesse dans la base de Frenet :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$$

En effet, on a déjà vu que $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$ ce qui donne pour le vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$$

II.1.8.2 Vecteur accélération dans le repère de Frenet :

Le vecteur accélération dans la base de Frenet est donné par :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}} + \frac{V^2}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_n$$

Preuve :

Pour dériver l'expression du vecteur vitesse obtenue ci-haut, on doit dériver, entre autres, le vecteur tangentielle $\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$ par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Sachant que $\frac{ds}{dt} = V$, le module du vecteur vitesse et que $\frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{1}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_n$, on obtient :

$$\frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{V}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$$

On dérive le vecteur vitesse pour obtenir l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d(\frac{ds}{dt}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}})}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}} + \frac{V^2}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_n$$

Le vecteur accélération peut être décomposé en une composante tangentielle, appelée accélération tangentielle :

$$\vec{\gamma}_{\mathcal{T}} = \frac{d\vec{V}}{dt}\vec{\mathcal{U}}_{\mathcal{T}}$$

et une composante normale, appelée accélération normale :

$$\vec{\gamma}_{\mathrm{n}} = \frac{V^2}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_n$$

Tel que

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_{\mathcal{T}} + \vec{\gamma}_n$$

ou encore en terme de modules

$$\gamma^2 = {\gamma_{\mathcal{T}}}^2 + {\gamma_n}^2$$

On peut remarquer que la composante de l'accélération normale est toujours positive, ce qui signifie que l'accélération normale est toujours orientée vers la concavité de la trajectoire.

II.1.9 Exemple de mouvement : Le mouvement circulaire

On considère le mouvement d'un point matériel *M* dont la trajectoire est un cercle dans le plan *XOY*, de centre *O* et de rayon
R.

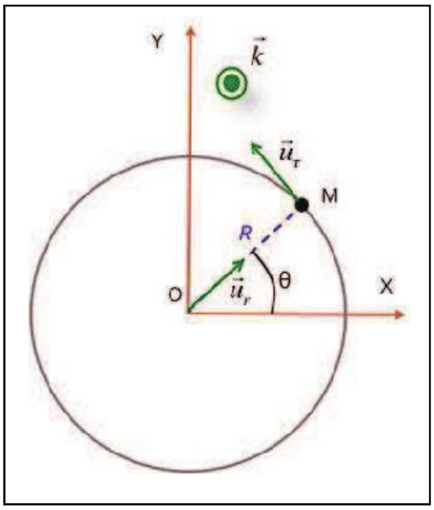

Figure II.9 : mouvement circulaire

Dans ce cas le vecteur position peut s'écrire dans la base cartésienne :

$$OM = R\ \cos\theta\,\vec{\imath} + R\sin\theta\,\vec{\jmath}$$

Ou encore dans le base des coordonnées polaires :

$\overrightarrow{OM} = R\,\vec{e}_\rho = R\,\vec{\mathcal{U}}_r$

Ici on a introduit le vecteur $\vec{\mathcal{U}}_r = -\vec{\mathcal{U}}_n$ .On remarque ainsi que le trièdre $(\vec{\mathcal{U}}_r, \vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T}, \vec{k})$ *(à ne pas confondre avec la base de Frenet)* est un trièdre directe.

II.1.9.1 Le vecteur vitesse :

En utilisant les résultats dans la base de Frenet le vecteur vitesse s 'écrit :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} = V\,\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T}$$

On avait aussi vu que $ds = R\,d\theta$, ce qui donne pour la vitesse $\vec{V}(M/R) = \frac{d\theta}{dt}\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T}$.

Ce qui permet d'écrire :

$$V = R\,\omega \qquad ou \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$ est la vitesse angulaire

La rotation étant autour de l'axe OZ, on définit le vecteur rotation angulaire dans ce cas de la façon suivante :

$$\vec{\omega} = \omega\,\overrightarrow{k} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{k}$$

On peut ainsi montrer que

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Preuve :

Le trièdre $(\vec{\mathcal{U}}_r, \vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T}, \vec{k})$ étant un trièdre directe on a $\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} = \vec{k} \wedge \vec{\mathcal{U}}_r$, ce qui permet d'écrire pour le vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = V\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} = R\,\omega\,\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} = R\,\omega\left(\vec{k} \wedge \vec{\mathcal{U}}_r\right) = \omega\vec{k} \wedge R\vec{\mathcal{U}}_r$$

En utilisant la définition du vecteur vitesse angulaire, $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$, et l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM} = R\,\vec{\mathcal{U}}_r$, on obtient alors $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Remarque :

Si $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur unitaire : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, alors on a le résultat important suivant :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

II.1.9.2 Le vecteur accélération :

En utilisant aussi les résultats obtenus dans la base de Frenet :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} + \frac{V^2}{R_C}\vec{\mathcal{U}}_n$$

on réécrit le vecteur accélération en fonction de la vitesse angulaire de la façon suivante

$$\vec{\gamma}(M/R) = R\frac{d\omega}{dt}\vec{\mathcal{U}}_\mathcal{T} + R\omega^2\,\vec{\mathcal{U}}_n$$

$\frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire.

<u>Remarque – Mouvement circulaire uniforme :</u>

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme la vitesse angulaire est constante, c.à.d. que l'accélération angulaire est nulle :

$$\omega = cste \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$

L'accélération tangentielle étant nulle, l'accélération n'a qu'une seule composante, la composante normale :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_n = R\omega^2\,\vec{\mathcal{U}}_n$$