Corrigé TD N°02 Maths3 (2021/2022)

Exercice N°01

1) $I_1 = \int\limits_0 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie en 0

$F(t) = \int\limits_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int\limits_t^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_t^1 = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{t}$

$\lim\limits_{t\to 0} F(t) = 2$

donc l'intégrale I_1 est convergente.

2) $I_2 = \int\limits_0^1 \frac{1}{e^x - 1}dx$

la fonction $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ n'est pas définie en 0

$F(t) = \int\limits_t^1 \frac{1}{e^x - 1}dx$

$y = e^x \Longrightarrow dy = e^x dx = ydx$

c'est à dire $dx = \frac{dy}{y}$

$\int \frac{1}{e^x - 1}dx = \int \frac{1}{y(y-1)}dy = \int \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1}\right)dy = -\ln y + \ln(y-1) = -\ln e^x + \ln(e^x - 1)$

donc $F(t) = \int\limits_t^1 \frac{1}{e^x - 1}dx = [-\ln e^x + \ln(e^x - 1)]_t^1 = -1 + \ln(e-1) + t - \ln(e^t - 1)$

$\lim\limits_{t\to 0} F(t) = +\infty$

donc l'intégrale I_2 divergente.

3) $I_3 = \int\limits_0^1 \frac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2}dx$

$F(t) = \int\limits_t^1 \frac{(x^2-1)(x^2-1)}{(x-1)^2}dx = \int\limits_t^1 (x+1)^2 dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_t^1 = \frac{8}{3} - \frac{(t+1)^3}{3}$

$\lim\limits_{t\to 0} F(t) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

donc l'intégrale I_3 est convergente.

4) $I_4 = \int\limits_0^3 \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}}dx$

on a $\int\limits_0^3 \left|\frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}}\right| dx \leq \int\limits_0^3 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$

et $F(t) = \int\limits_t^3 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int\limits_0 x^{-\frac{2}{3}} dx = \left[\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}\right]_t^3 = 3 \times 3^{\frac{1}{3}} - 3t^{\frac{1}{3}}$

$\lim\limits_{t\to 0} F(t) = 3 \times 3^{\frac{1}{3}}$

donc l'intégrale I_4 est convergente.

Exercice N°02

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^8} . dx$$

$$I_1 = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{x}{(x^2+1)^8} . dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2} \int_1^t \frac{2.x}{(x^2+1)^8} . dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{7} \frac{1}{(x^2+1)^7}\right]_1^t$$

$$= \left[\frac{-1}{14} \frac{1}{(x^2+1)^7}\right]_1^t = \left(\frac{-1}{14} \frac{1}{(t^2+1)^7}\right) + \frac{1}{28}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{-1}{14} \frac{1}{(t^2+1)^7}\right) + \frac{1}{28} = \frac{1}{28}$$

Donc I_1 *convergente.*

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \lim_{t\to 0} \int_{\mathrm{t}}^1 \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x$$

$$\int_{\mathrm{t}}^1 \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{1}{x}\right]_t^1 = 0 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{1}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{1}{t} = \infty$$

Donc I_2 *divergente*

Exercice N°03

1) $I_1 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$F(t) = \int\limits_1^{t} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^t = \frac{-1}{t} - \left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{-1}{t} + 1$

$\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$

2) $I_3 = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

on a $I_3 = \int\limits_0^{\infty} \frac{3}{x^3} dx$

$F_1(t) = \int\limits_c^{t} \frac{1}{x^3} dx = \int\limits_c^{t} x^{-3} dx = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^t = \frac{-1}{2t^2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2c^2}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} F_1(t) = \frac{1}{2c^2}$

$F_2(t) = \int\limits_t^{c} \frac{1}{x^3} dx = \int\limits_t^{c} x^{-3} dx = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^t = \frac{-1}{2t^2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{1}{2c^2} - \frac{-1}{2t^2}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} F_2(t) = +\infty$

donc l'intégrale I_3 est divergente.

3) $I_4 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx$

par la méthode de l'intégrale par parties on trouve

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{e^x}dx &= \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

donc $F(t) = \int\limits_0^t \frac{x}{e^x}dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_1^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$

$\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = +1$

donc l'intégrale I_4 est convergente.

4) $I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}$

On choisit (au hasard) $c = 2$. Il s'agit de savoir si les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad \int_{2}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}$$

convergent.

En notant qu'une primitive de $\frac{t}{(1+t^2)^2}$ est $-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$, on obtient :

$$\int_x^2 \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]_x^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1+x^2}\right) \to -\frac{1}{10} \quad \text{lorsque } x \to -\infty.$$

Donc $\int_{-\infty}^{2} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}$ converge et vaut $-\frac{1}{10}$.

De même

$$\int_2^x \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]_2^x = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{5}\right) \to +\frac{1}{10} \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

Donc $\int_{2}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}$ converge et vaut $+\frac{1}{10}$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}$ converge et vaut $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0$

2) On montre que l'intégrale impropre

$$I_5 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2\cos x}{x^2} \quad dx$$

est absolument convergente.

$\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x + 2\cos x}{x^2}\right| dx \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}dx$

et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3}{x^2}dx = 3\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ est convergente

donc I_5 est convergente.