

Chapitre 3

Equations différentielles

3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

3.1.1 Equations différentielles ordinaires d'ordre 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre une équation de la forme

$$y' = f(t, y)$$

on dit que la fonction dérivable, $y_0 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle d'ordre 1

$$y' = f(t, y)$$

sur I si

$$y_0'(t) = f(t, y_0(t)), \forall t \in I.$$

Exemple 3.1.1 La fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t) = e^t$ est une solution de l'équation différentielle d'ordre 1 suivante:

$$y' = y$$

sur $\mathbb{R}$, car $x'(t) = e^t = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Equations différentielles de variables séparées

Une équation différentielle de 1^{er} ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(y)y' = g(x)$$

donc

$$F(y) = G(x) + k, k \in \mathbb{R}.$$

(F est une primitive de f et G est une primitive de g)

donc

$$y = F^{-1}(G(x) + c)$$

Exemple 3.1.2 Résoudre sur $I = [2, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y$$

On peut séparer les variables (x et y) en divisant par $yx \ln x$,

$$\frac{y'}{y} = \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x}$$

donc

$$\ln y = \int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx + c, c \in \mathbb{R}.$$

c'est à dire

$$y = e^{\int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx + c}, c \in \mathbb{R}.$$

3.2 Equation différentielle ordinaires linéaire

Définition 3.2.1 Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = f(x) \quad (3.1)$$

l'équation homogène associée est

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \quad (3.2)$$

Proposition 3.2.2 Si y_1 et y_2 deux solutions de (3.2). Alors $y_1 + y_2$ et αy_1 sont aussi deux solutions de (3.2).

Exemple 3.2.3 $y_1(x) = x$ et $y_2(x) = 5$ deux solutions de l'équation $y''' + y'' = 0$, alors $y_3(x) = x + 5$ et $y_4(x) = 10x$ sont aussi des solutions.

Proposition 3.2.4 Si S_0 est l'ensemble des solutions de (3.2) et y_p une solution particulière de (3.1), alors l'ensemble des solutions de (3.1) est donné par $S = \{y + y_p / y \in S_0\}$.

3.2.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre 1

Définition 3.2.5 Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle du premier ordre avec

$$x' = f(t).x + g(t)$$

avec f, g des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle homogène associée est

$$x' = f(t).x$$

Exemple 3.2.6 L'équation différentielle

$$y' = t^2 y + t$$

est une equation différentielle linéaire d'ordre 1. L'équation différentielle homogène associée est

$$y' = t^2 y$$

Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène

$$x' = f(t).x$$

c'est à dire $\frac{x'}{x} = f(t)$ donc

$$\ln |x| = \int f(t)dt + c, c \in \mathbb{R}$$

alors

$$x = ke^{\int f(t)dt}, k \in \mathbb{R}$$

Résolution d'une équation différentielle linéaire non homogène

$$x' = f(t).x + g(t)$$

Si x_p est une solution particulière de cette équation

alors

$$x(t) = ke^{\int f(t)dt} + x_p(t), k \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.2.7 On considère l'équation

$$xy' + 2y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

L'équation homogène associée est

$$xy' + 2y = 0$$

la solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = \frac{k}{x^2}, k \in \mathbb{R}$$

Solution particulière de l'équation non homogène

$$y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2}$$

$$\text{donc } y'_p(x) = \frac{k'(x)x^2 - 2k(x)x}{x^4}$$

et on a aussi

$$xy'_p + 2y_p = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{k'(x)x^2 - 2k(x)x}{x^3} + \frac{2k(x)}{x^2} &= \frac{x^2}{x^2 + 1} \implies \frac{k'(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 + 1} \\ \implies k'(x) &= \frac{x^3}{x^2 + 1} \\ \implies k'(x) &= \frac{x^3 + x - x}{x^2 + 1} \\ \implies k'(x) &= x - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} \\ \implies k(x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{donc } y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \ln(x^2 + 1)$$

finalemt la solution générale l'équation non homogène est

$$y(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \ln(x^2 + 1), k \in \mathbb{R}.$$

3.2.2 Equation de Bernoulli

Définition 3.2.8 On appelle *équation de Bernoulli* une équation de la forme

$$x' = p(t)x + q(t)x^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et p, q sont des fonctions continues.

On se place sur les intervalles où x ne s'annule pas. On peut alors diviser par x^α , et poser $z = x^{1-\alpha}$, on obtient alors

$$z' = (1 - \alpha)(p(t)z + q(t))$$

est une équation linéaire en z .

3.2.3 Equations différentielles linéaires d'ordre 2 (EDL d'ordre 2)

Définition 3.2.9 Une EDL du $\mathcal{Z}^{\text{me}}$ ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E}$$

ou $a, b, c \in \mathbb{R} (a \neq 0)$ et $f \in C^0(I)$ (I ouvert de $\mathbb{R}$). L'équation homogène (ou sans second membre) associée est

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH}$$

Proposition 3.2.10 Si y_h est une solution générale de (EH) et y_p est une solution particulière de (E). Alors $y_p + y_h$ est une solution générale de (E)

Résolution de l'équation homogène associée (E.H.)

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH}$$

On cherche la solution sous la forme $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. On a donc $y'(x) = ry(x)$ et $y''(x) = r^2y(x)$, donc (EH) devient

$$y(ar^2 + br + c) = 0$$

Définition 3.2.11 *L'équation*

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{EC}$$

se nomme équation caractéristique de (E.H.).

Proposition 3.2.12 *Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :*

1) $\Delta > 0$: (EC) admet 2 racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, et

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

est une solution générale de (EH)

2) $\Delta = 0$: (EC) admet une racine double $r \in \mathbb{R}$

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{rx}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3) $\Delta < 0$: (EC) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$) et

$$y(x) = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.2.13 $y'' - 4y' + 3y = 0$ l'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$ admet 2 racines réelles distinctes $r_1 = 1, r_2 = 3$, l'ensemble des solutions de (E) sont : $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Exemple 3.2.14 $y'' + 2y' + y = 0$; l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$; $r = -1$ racine double, l'ensemble des solutions de (E) sont :

$$y(x) = (c_1 x + c_2) e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.2.15 $y'' + 2y' + 4y = 0$; l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 4 = 0$, $\Delta = -12$ donc $r_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $r_2 = -1 - \sqrt{3}i$, d'où l'ensemble des solutions de (E) sont :

$$y(x) = (c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x)e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Résolution de l'équation non homogène

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (\text{E})$$

Solution particulière à (E)

1) Si $f(x) = P(x)$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.

On cherche la solution sous la forme $y = x^k Q(x)$ tel que Q est un polynôme et $\deg Q = \deg P$

$k = 0$, si 0 n'est pas racine de (EC)

$k = 1$, si 0 est l'une des deux racines de (EC)

$k = 2$, si 0 est racine double de (EC)

2) Si $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.

On cherche la solution sous la forme $y = x^k e^{\alpha x} Q(x)$ tel que Q est un polynôme et $\deg Q = \deg P$

$k = 0$, si α n'est pas racine de (EC)

$k = 1$, si α est l'une des deux racines de (EC)

$k = 2$, si α est racine double de (EC)

Exemple 3.2.16

$$y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^x$$

l'équation homogène est

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

l'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$; on a $\Delta = 0$; $r = 2$ racine double donc la

solution générale de l'équation homogène est donnée par

$$y_h = (c_1x + c_2)e^{2x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) On cherche une solution particulière de l'équation non homogène, comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors $y_p(x) = q(x)e^x$ tel que $\deg q = 2$;

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{ donc}$$

$$y'_p(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

$$y''_p(x) = 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

En remplaçant dans (E), on trouve

$$2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x - 4(2ax + b)e^x - 4(ax^2 + bx + c)e^x + 4(ax^2 + bx + c)e^x = (x^2 + 1)e^x$$

$$((a - 1)x^2 + (b - 4a)x + c + b + 2a - 1)e^x = 0$$

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 4a = 0 \\ c - 2b + 2a - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 7 \end{cases}$$

$$\text{donc la solution particulière } y_p(x) = (x^2 + 4x + 7)e^x$$

finalement la solution générale de l'équation non homogène est

$$y(x) = y_h = (c_1x + c_2)e^{2x} + (x^2 + 4x + 7)e^x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.3 Equation aux dérivées partielles

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles définie au voisinage de $A(a, b)$

Si la fonction $x \rightarrow f(x, b)$ a une dérivée par rapport x , on la note $f'_x(a, b)$.

On peut définir la dérivée partielle par rapport à x par

$$f'_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow f'_x(x, y)$$

on définit la dérivée partielle par rapport à y par même méthode, on note

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dérivées successives

De la même façon, on peut définir la dérivée de la fonction f'_x par rapport à x , on la note f''_{x^2} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

aussi la dérivée de la fonction f'_x par rapport à y , on la note f''_{xy} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

la dérivée de la fonction f'_y par rapport à y , on la note f''_{y^2} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

la dérivée de la fonction f'_y par rapport à x , on la note f''_{yx} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Théorème 3.3.1 de Schwarz

Si les dérivées partielles f''_{xy} et f''_{yx} sont continues, alors ces dérivées sont égales

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Exemple 3.3.2 Déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pour la fonction $f(x, y) = x^2 + xy^2 - y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2xy, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y \end{aligned}$$

3.3.1 Dérivées d'une fonction composées de deux variables

Soit la fonction $F(x, y) = f(u, v)$, tel que u, v des fonctions de x et y admettant des dérivées partielles, si f admet des dérivées partielles, alors F admet des dérivées partielles et

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

Exemple 3.3.3 Soit $f(u, v) = u^2 + uv + v$

$$u(x, y) = 2x - y$$

$$v(x, y) = x + y$$

$$F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$$

.....

3.3.2 Différentielles totales

Soit $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles continues

La différentielle totale de U s'écrit par

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy$$

Si $U(x, y) = Cte$ alors $dU = 0$.

Exemple 3.3.4 $U \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = x^2 + xy$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 2x + y, \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x$$

$$dU = (2x + y) dx + x dy$$

3.3.3 Formes différentielles totales exactes

On considère l'équation différentielle suivante

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Si on peut trouver une fonction $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

Alors la solution :

$$U(x, y) = Cte$$

Proposition 3.3.5 Soit $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

Si M, N des fonctions continues alors

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Preuve. On a

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

donc

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x, y)$$

et M, N des fonctions continues alors d'après théorème de Schwarz on trouve

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

□

Remarque 3.3.6 On a

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

$$\text{d'anc } U(x, y) = \int M(x, y) dx + k(y)$$

$$\text{aussi } \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + k'(y) = N(x, y) \text{ c'est à dire}$$

$$k'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right)$$

3.3.4 Application à l'intégration d'équation diff de premier ordre

On considère l'équation différentielle suivante

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Si on peut trouver une fonction $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

Alors la solution :

$$U(x, y) = Cte$$

Exemple 3.3.7 Résoudre l'équation

$$y' = -\frac{1 + 2xy^3}{3x^2y^2}$$

donc

$$(1 + xy^3) + (3x^2y^2) y' = 0$$

c'est à dire

$$(1 + xy^3) dx + (3x^2y^2) dy = 0$$

on pose

$M(x, y) = 1 + 2xy^3$, $N(x, y) = 3x^2y^2$ on obtient

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 6xy^2$$

Alors il existe une fonction U tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 1 + 2xy^3, \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2$$

$$U(x, y) = x + x^2y^3 + k(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 + k'(y) = 3x^2y^2$$

$$\text{donc } k'(y) = 0 \implies k(y) = \text{Cte.}$$

finalemt

$$x + x^2y^3 = \text{Cte} \implies y = \sqrt[3]{\frac{\text{Cte} - x}{x^2}},$$

$$c = 0 : y(x) = -x^{-\frac{1}{3}}, y'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$y' = -\frac{1+2xy^3}{3x^2y^2} = -\frac{1-2xx^{-1}}{3x^2x^{-\frac{2}{3}}} = -\frac{-1}{3x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$$

Exemple 3.3.8 Résoudre l'équation

$$y' = -\frac{1 + 2xy}{x^2}$$

donc

$$1 + 2xy + x^2y' = 0$$

c'est à dire

$$(1 + 2xy) dx + x^2dy = 0$$

on pose

$M(x, y) = 1 + 2xy$, $N(x, y) = x^2$ on obtient

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2x$$

Alors il existe une fonction U tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = 1 + 2xy, \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x^2$$

$$U(x, y) = x + x^2y + k(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = x^2 + k'(y) = x^2$$

$$\text{donc } k'(y) = 0 \implies k(y) = \text{Cte.}$$

finalement

$$x + x^2y = \text{Cte} \implies y = \frac{c - x}{x^2}$$

Bibliography

Cours Mathématiques 3, 2 année LMD-Sciences et Techniques
Beddani Abdallah et Djebar Samir