CHAPITRE IV

GEOMETRIE DES MASSES

IV.1 Introduction

Le chapitre quatre concerne les notions purement géométrique :

- Masse
- Centre de masse
- Moment d'inertie

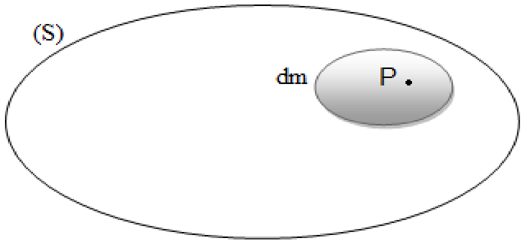
L'intérêt de ces trois grandeurs apparaîtra en cinétique et en dynamique.

IV.2 Systèmes matériels

On appelle système de points matériels ou système matériels une quantité de matière, homogène ou non, dont la masse reste constante pendant son étude. La masse est une grandeur scalaire positive.

IV.2.1 Système continu

Si le système est constitué d'un ensemble continu de masses, la masse du système s'écrirait sous la forme suivante :



(S) est un ensemble matériel si à tout points P ϵ (S) on associe la grandeur ρ(P) telle que :

ρ(P) = $\frac{dm(\rho)}{dv(P)}$ où

ρ(P) : densité spécifique

dv(P) : volume élémentaire entourant (P)

dm(P) : la masse de l'élément de matière occupant le volume dv.

Donc la masse de (S) est alors : $\boldsymbol{m = \int_{P\epsilon S} dm(P)}$

IV.2.1.1 Expression de la masse suivant la nature du domaine

a) (S) est un volume (Exemple : ballon)

$$\boldsymbol{M} = \iiint_{(v)} \boldsymbol{\rho(P)dv}$$

ρ(P) est la masse volumique au point P et *dv* un élément de volume du solide (S).

b) (S) est une surface, le cas d'une plaque fine d'où l'épaisseur est négligeable.

$$\boldsymbol{M} = \iint_{S} \boldsymbol{\sigma(P)ds}$$

σ(P) est la densité surfacique au point P et *ds* un élément de surface du solide (S).

c) (S) est une ligne, le cas d'une ligne matériel (tige fine)

$$\boldsymbol{M} = \int_{L} \boldsymbol{\lambda(P)dl}$$

λ(P) est la densité linéique au point P et *dl* un élément de longueur du solide (S).

Remarque : dans les systèmes homogènes (solides homogènes) la densité des solides est constante.

IV.2.2 Système discrets

La masse d'un système constitué de n points matériels de masse $\boldsymbol{m_i}$ est la somme des masses :

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{m_i}$$

IV.3 Centre de masse d'un système matériel

IV.3.1 Détermination du centre d'inertie de corps simple

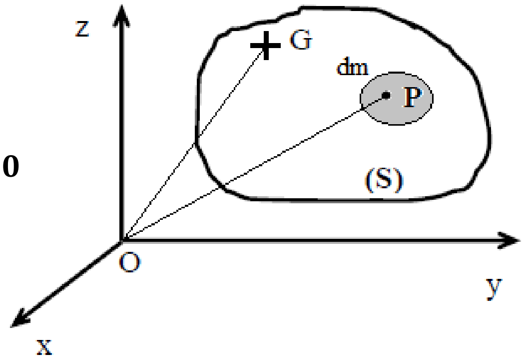
IV.3.1.1 Définition

On appelle centre d'inertie d'un système matériel (S) le point G par la relation :

$$\int_{P\epsilon(S)} \overrightarrow{\boldsymbol{GP}}\,\boldsymbol{dm} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

Soit un repère orthonormé (O, xyz)

dm : élément de masse au point P



$\int_{P\epsilon(S)} \overrightarrow{GP}\, dm = \vec{0} \Rightarrow \int \ (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OP})dm = 0$

$\Rightarrow \int \ (\overrightarrow{GO}\, dm + \int \ (\overrightarrow{OP}\, dm = 0$

Donc : $\overrightarrow{OG} = \frac{\int \ \overrightarrow{OP} dm}{\int \ dm} = \frac{1}{M}\int \ \overrightarrow{OP}\, dm$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\int \overrightarrow{OP}\, dm$$

$\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

Les coordonnées du centre d'inertie G d'un système homogène sont donc exprimées par :

$X_G = \frac{1}{M}\int_{P\epsilon(S)} x\, dm$ $\quad Y_G = \frac{1}{M}\int_{P\epsilon(S)} y\, dm$ $\quad Z_G = \frac{1}{M}\int_{P\epsilon(S)} z\, dm$

Remarque :

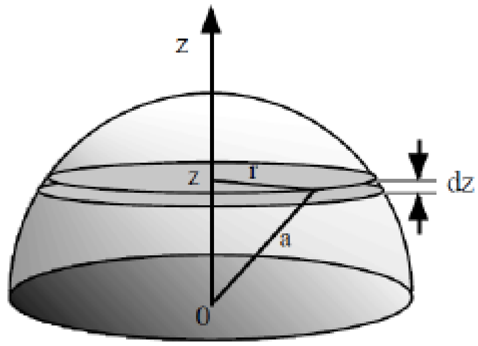
- Si un solide homogène présente un centre de symétrie, alors ce centre de symétrie est le centre d'inertie.
- Si un solide homogène présente un axe de symétrie, alors le centre d'inertie appartient à cet axe de symétrie.
- Si un solide homogène présente un plan de symétrie, alors le centre d'inertie appartient à ce plan de symétrie.

IV.3.1.2 Exemple d'application

a) Soit (S) un volume

Exemple :

Déterminer la position du centre d'inertie d'une demi-sphère homogène (pleine) de rayon R.



Par raison de symétrie le centre de masse se trouve sur l'axe OZ. Donc $x_G = y_G = 0$

$$Z_G = \frac{1}{M}\int z\, dm = \frac{\int zdv}{V}$$

L'équation d'une demi-sphère est : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ donc $x^2 + y^2 = R^2 - z^2$ tel que $r^2 = x^2 + y^2$

$$dv = S.dz \Rightarrow dv = \pi r^2 dz \Rightarrow dv = \pi(R^2 - z^2)\, dz$$

$$Z_G = \frac{\int_0^R \pi(R^2 - z^2)\, dz}{\frac{2}{3}\pi R^3} \Rightarrow Z_G = \frac{3}{8}R$$

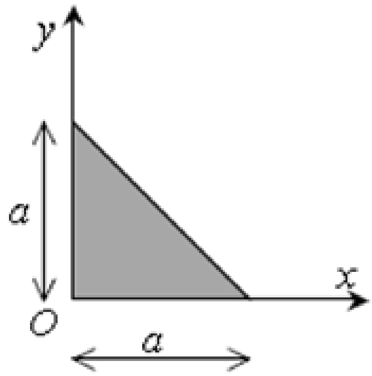
Les coordonnées du centre de masse d'un hémisphère plein de

$$G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = 0 \\ z_G = \frac{3}{8}R \end{cases}$$

b) Soit (S) une surface

Exemple :

Déterminer les coordonnées du centre de masse de la surface du triangle isocèle présenté ci-contre :



Solution :

Soit S : la surface du triangle

dS = dxdy : la droite limitant le triangle a pour équation :

y=-x+a ; où x=-y+a

$S = \int \mathrm{dxdy} = \int_0^a dx \,.\int_0^{a-x} dy = \int_0^a (a-x)dx = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$

dm=σ ds $\Rightarrow m = \sigma.\mathrm{S} \Rightarrow m = \sigma\ \frac{a^2}{2}$

$\mathrm{x_G} = \frac{1}{\mathrm{m}} \int x\mathrm{d}m = \frac{1}{\sigma\, a^2} \int x\sigma\, dx\, dy = \frac{2}{a^2} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy$

$\mathrm{x_G} = \frac{2}{a^2} \int x(\mathrm{a} - \mathrm{x})\mathrm{dx} \Rightarrow \mathrm{x_G} = \frac{2}{a^2} \left[\int_0^a ax dx - \int_0^a x^2 dx\right]$

$\mathrm{x_G} = \frac{2}{a^2} \left[\frac{a^3}{6}\right] \Rightarrow \mathrm{x_G} = \frac{a}{3}$

$\mathrm{y_G} = \frac{1}{\mathrm{m}} \int y\mathrm{d}m = \frac{1}{\sigma\, a^2} \int y\sigma\, dx\, dy = \frac{2\sigma}{\sigma\, a^2} \int_0^a y dy \int_0^{a-y} dx$

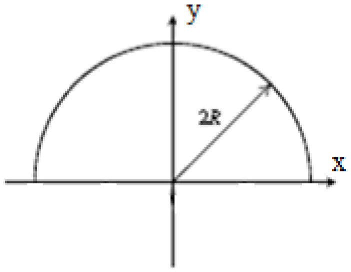
$\mathrm{y_G} = \frac{2}{a^2} \int y(\mathrm{a} - \mathrm{y})\mathrm{dy} \Rightarrow \mathrm{y_G} = \frac{a}{3}$

Les coordonnées du centre de masse du triangle isocèle : $G\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$

c) Soit (S) une ligne

Exemple

Déterminer la position du centre d'inertie d'un demi-cercle de rayon 2R.



Centre d'inertie d'un demi-cercle de rayon 2R :

L'axe (0_y) est un axe de symétrie, donc :

$X_G = 0$

$y_G = \frac{1}{m}\int y dm$. (le centre de masse du solide est situé sur l'axe 0_y)

Le solide est linéaire, sa masse est donné par :

$m = \int \lambda d\ell$ où λ est la densité linéaire et $d\ell$ un élément de longueur.

$d\ell \begin{cases} x = 2R \cos\theta \\ y = 2R \sin\theta \end{cases}$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$

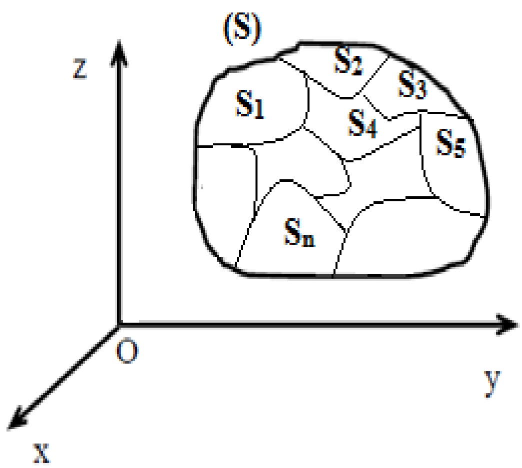
$m = \lambda \int d\ell = \lambda \int 2Rd\theta \Longrightarrow m = \lambda 2R \int_0^{\pi} d\theta \Longrightarrow m = \lambda\pi 2R.$

$y_G = \frac{1}{m}\int y dm = \frac{1}{m}\int 2R \sin\theta\, \lambda 2Rd\theta \Longrightarrow y_G = \frac{1}{\lambda 2R\pi}.4R^2\lambda \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$

$y_G = \frac{2R}{\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi} \Longrightarrow y_G = \frac{4R}{\pi}$

$G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{4R}{\pi} \end{cases}$ avec $m = \lambda 2\pi R$

IV.3.2 Centre d'inertie d'un système composé



Soit un corps solide (S), on suppose que le solide a été décomposé en n éléments (S_1, S_2, S_3, …… S_n) de centre de masse (G_1, G_2, G_3,….. G_n) et de masse m_1, m_2, m_3,…. m_n. Cette décomposition étant arbitraire et du purement géométrique.

Les coordonnées du centre d'inertie G du solide (S) se détermine à partir de la relation suivante :

$$M\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{n}(m_i\overrightarrow{OG_i})$$

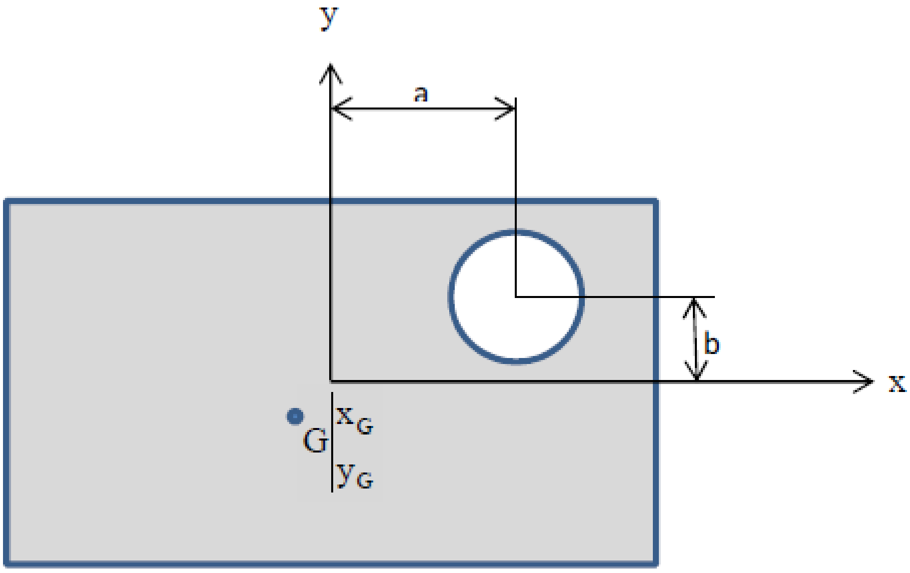
$$X_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad Y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad Z_G = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Le point G est donc le barycentre des points G_i affectés des coefficients m_i. On procède donc en deux étapes pour déterminer le centre d'inertie :

- On détermine le centre d'inertie G_i pour chacun des sous-ensembles de masse m_i.
- On détermine le centre d'inertie G comme barycentre des points G_i affectés des coefficients m_i.

Exemple 1

Appelons S_1 la plaque rectangulaire de dimensions L x l et S_2 le cercle de rayon R. On cherche les coordonnées du centre de gravité G de la plaque.



On applique les définitions suivantes : $X_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$ **et** $Y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$

Avec M = masse totale du système = $\sum m_i$

Ici M = $\rho . S = \rho(L.l - \pi R^2)$

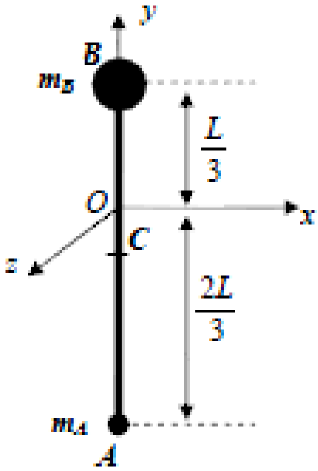
$$X_G = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 x_{G1} - m_2 x_{G2}}{M} = \frac{\rho.0 - \rho\pi R^2.a}{\rho(L.l - \pi R^2)} = -\frac{\pi R^2.a}{L.l - \pi R^2}$$

$$Y_G = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 y_{G1} - m_2 y_{G2}}{M} = \frac{\rho.0 - \rho\pi R^2.b}{\rho(L.l - \pi R^2)} = -\frac{\pi R^2.b}{L.l - \pi R^2}$$

Donc les coordonnées du centre de gravité G de la plaque : G $\begin{pmatrix} -\dfrac{\pi R^2.a}{L.l-\pi R^2} \\ \\ -\dfrac{\pi R^2.b}{L.l-\pi R^2} \end{pmatrix}$

Exemple 2

On considère la tige AB homogène et de masse M avec les masse m_A et m_B aux extrémités. Calculer en fonction de m, L et M le centre de masse du système par rapport au repère (OXYZ).



Solution :

1) on détermine la position de la masse m_A et m_B et la barre :

$$m_A \begin{cases} 0 \\ -\frac{2L}{3} \\ 0 \end{cases} \qquad m_B \begin{cases} 0 \\ \frac{L}{3} \\ 0 \end{cases} \qquad M \begin{cases} 0 \\ y_M \\ 0 \end{cases}$$

Le centre d'inertie de la barre

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{CB} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

Donc $\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-L}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$

Le centre d'inertie de système :

$$y_G = \frac{m_A y_A + m_B y_B + M.y_G}{m_A + m_B + M} = \frac{\left(-\frac{2L}{3}\right)m + \left(\frac{L}{3}\right)3m + \left(-\frac{L}{6}\right)M}{m + 3m + M}$$

$$y_G = \frac{2m - M}{4m + M}.\frac{L}{6}$$

Le centre de masse de la tige AB : $G \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \frac{2m - M}{4m + M}.\frac{L}{6} \end{pmatrix}$