Université Ahmed Zabana de Relizane

Institut des Sciences et Technologies **Année universitaire : 2021/2022**
Département de Génie Mécanique
Master 1 Energétique
Module : Mécanique des fluides approfondie

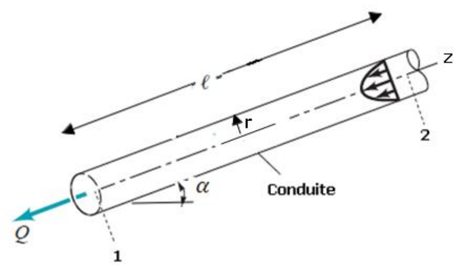
Corrigé de la fiche des travaux dirigés Nº3

Exercice 1 :

1. **La viscosité cinématique de cette huile** (ν)**:**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\Delta P}{l}\right) \Leftrightarrow \mu = \frac{\pi R^4}{8Q}\left(\frac{\Delta P}{l}\right)$$



ΔP =?

La pression statique à l'intérieur est constante tout le long du tube

$$P_1 + \rho g z_1 = P_2 + \rho g z_2$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \rho g (z_2 - z_1)$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \rho g l \sin\alpha$$

$$\frac{\Delta P}{l} = \rho g \sin\alpha$$

$$\mu = \frac{\pi R^4}{8Q}\rho g \sin\alpha$$

$$\mu = \frac{\pi (6 * 10^{-3})^4}{8 * 5{,}555 * 10^{-6}} 0.9 * 10^3 * 9.81 \sin 5°$$

$$\mu = 0.0704 \frac{kg}{m.s}$$

$$\nu = 7.83 * 10^{-5}\ m^2/s$$

2. **La vitesse moyenne dans la conduite et le nombre de Reynolds**

vitesse moyenne $U = Q/\pi R^2$

$$\boldsymbol{U_{moy}} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\pi R^2}$$

$$\boldsymbol{U_{moy}} = \frac{R^2}{8\mu}\frac{\Delta P}{l} = \frac{R^2}{8\mu}\rho g \sin\alpha$$

$$\boldsymbol{U_{moy}} = \frac{(6 * 10^{-3})^2}{8 * 0.0704} 0.9 * 10^3 * 9.81 \sin 5°$$

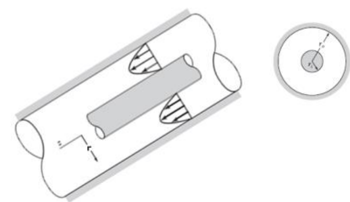
$$\boldsymbol{U_{moy}} = 0.05 \ \ m/s$$

$$Re = \frac{\boldsymbol{D} * \boldsymbol{U_{moy}}}{\nu} = \frac{\boldsymbol{12} * 10^{-3} * 0.05}{7.83 * 10^{-5}}$$

$$Re = 7.66$$

Régime laminaire

3. La variation de pression sur une longueur de 1 m



$$Q = \frac{\pi}{8\mu} \frac{\Delta P}{l} \left[r_0^4 - r_i^4 - \frac{\left(r_0^2 - r_i^2\right)^2}{ln(r_0/r_i)} \right]$$

$$\Delta P = \frac{8 * Q * \mu * l}{\pi \left[r_0^4 - r_i^4 - \frac{\left(r_0^2 - r_i^2\right)^2}{ln(r_0/r_i)} \right]}$$

$$\Delta P = \frac{8 * 5{,}555 * 10^{-6} * 0.0704 * 1}{\pi \left[(6 * 10^{-3})^4 - (2 * 10^{-3})^4 - \frac{((6 * 10^{-3})^2 - (2 * 10^{-3})^2)^2}{ln(6/2)} \right]}$$

$$\Delta P = 2862.355975 \ Pa$$

Exercice 2 :

1. la vitesse de chaque fluide

L’équation de Navier Stokes dans la direction x est :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Pour les conditions spécifiées, v = 0, w = 0, $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ et $g_x = 0$, de sorte que l’équation de Navier-Stokes selon (x), se réduit à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

L’intégration donne :

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = Ay$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Cst = A$$

$$u = A \int dy + B$$

$$u = Ay + B$$

La vitesse de chaque fluide est :

$$u_1 = A_1 y + B_1 \tag{1}$$

$$u_2 = A_2 y + B_2 \tag{2}$$

Pour déterminer les constantes d'intégral

On a :

- à $y = 0$, $\quad u_2 = 0 \Leftrightarrow B_2 = 0$

- à $y = 2h$, $\quad u_1 = U \Leftrightarrow U = A_1(2h) + B_1 \Leftrightarrow B_1 = U - A_1(2h)$

Les équations (1) et (2) deviennent :

$$u_1 = A_1 y + U - A_1(2h)$$

$$u_1 = U + A_1(y - 2h) \tag{3}$$

$$u_2 = A_2 y \tag{4}$$

Pour déterminer les constantes A_1 et A_2 , on a à l'interface des fluides, les vitesses et la contrainte de cisaillement pour les deux liquides sont égales :

- à $y = h$, $\quad \tau_1 = \tau_2$

$$\tau_1 = \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}, \qquad \tau_2 = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

$$\mu_1 A_1 = \mu_2 A_2$$

$$A_1 = A_2 \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

- à $y = h$, $\quad u_1 = u_2$

$$A_2 h = U + A_1(h - 2h) \Leftrightarrow A_2 h = U + A_1 h$$

$$A_2 = \frac{U}{h} - A_1$$

$$A_2 = \frac{U}{h} - A_2 \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

$$A_2 \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = \left(\frac{U}{h}\right)$$

$$A_2 = \frac{\left(\frac{U}{h}\right)}{\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}$$

Et

$$A_1 = A_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} = \left[\frac{\left(\frac{U}{h}\right)}{\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}\right] \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)$$

Nous pouvons donc déterminer la constante B_1

$$B_1 = U - \left[\frac{\left(\frac{U}{h}\right)}{\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}\right] \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)(2h)$$

Les équations (3) et (4) deviennent :

$$u_1 = \left[\frac{\left(\frac{U}{h}\right)}{\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}\right] y + U - \left[\frac{\left(\frac{U}{h}\right)}{\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}\right] \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)(2h)$$

$$u_1 = U + \left[\frac{\left(\frac{U}{h}\right)}{\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}\right] \left[y - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)(2h)\right]$$

$$u_2 = \left[\frac{\left(\frac{U}{h}\right)}{\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}\right] y$$

2. **la vitesse u à l'interface entre les deux fluides, en m/s.**

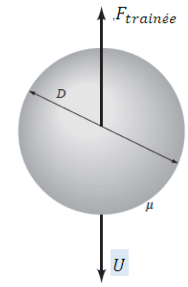
À l'interface des couches fluides($y = h$), les vitesses sont égales :

$$u_1 = u_2 = \left[\frac{\left(\frac{U}{h}\right)}{\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}\right] h$$

$$u_1 = u_2 = \left[\frac{U}{\left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}\right] = \frac{3}{\left(1 + \frac{5}{1}\right)} = 0.5\ m/s$$

Exercice 3 :

1. la vitesse U de la particule et le nombre de Reynolds



$$\rho_s = 1.6\,\frac{g}{Cm^3} = 1600\,\frac{kg}{m^3}$$

$$U = \frac{1}{18}\frac{(\rho_{sphere} - \rho_{fluide}) * g * D^2}{\mu}$$

$$U = \frac{1}{18}\frac{(1600 - 1.164) * 9.81 * (6 * 10^{-5})^2}{1.872 * 10^{-5}}$$

$$U = 0.167\ m/s$$

$$Re = \frac{\rho_f\ UD}{\mu} = \frac{1.164 * 0.167 * 6 * 10^{-5}}{1.872 * 10^{-5}}$$

$Re = 0.623 < 1$, Ecoulement de stokes

2. le coefficient de trainée :

$$C_D = \frac{3\pi\mu DU}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_s} = \frac{3\pi\mu DU}{\frac{1}{2}\rho U^2(\pi r^2)} = \frac{64}{Re}$$

$$C_D = \frac{64}{0.623} = 102.728$$