Université Ahmed Zabana - Relizane 2021-2022

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 3

Exercice 1 : $\star$ Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f(x) = \sqrt{3x - x^3},\ g(x) = \ln(x-2) + \ln(x+2),\ h(x) = \sqrt{\dfrac{2+3x}{5-2x}}.$

$\star$ Déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

$*$ En utilisant la définition de la limite, montrer que $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} (3x+1) = 7$.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

$*$ Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$ $\quad *$ f est-elle continue en 0 ? est-elle dérivable en 0 ? justifier.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x} & si\ x > 0, \\ 0 & si\ x = 0, \\ x^3 \sin \frac{1}{x} & si\ x < 0. \end{cases}$

$\star$ f est-elle continue en $x = 0$?

$\star$ Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.

$\star$ f est-elle dérivable en $x = 0$? $\quad \star$ f est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?

Correction de fiche TD 3

Solution de L'exercice 1:

1) f est définie si, et seulement si,

$$\begin{aligned} 3x - x^3 \geq 0 &\Longleftrightarrow x(3 - x^2) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x\left(\sqrt{3} - x\right)\left(\sqrt{3} + x\right) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right], \end{aligned}$$

donc

$$D_f = \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right].$$

2) g est définie si, et seulement si,

$$x - 2 > 0 \; et \; x + 2 > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ \;et \\ \;\; x > -2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow x > 2,$$

donc

$$D_g =]2, +\infty[.$$

3) h est définie si, et seulement si,

$$\begin{aligned} \frac{2+3x}{5-2x} \geq 0 \; et \; 5 - 2x \neq 0 &\Longleftrightarrow (2 + 3x \geq 0 \; et \; 5 - 2x > 0) \;\; ou \;\; (2 + 3x \leq \; et \; 5 - 2x < 0) \\ &\Longleftrightarrow \left(x \geq -\frac{2}{3} \; et \; x < \frac{5}{2}\right) \; ou \; \left(x \leq -\frac{2}{3} \; et \; x > \frac{5}{2}\right) \\ &\Longleftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[\end{aligned}$$

donc

$$D_h = \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[.$$

x	$-\infty$		-2/3		5/2		$+\infty$
$2+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
$5-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

$*\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=+\infty-\infty$ forme indéterminée

$$f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}\underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}$$

$*\ \lim\limits_{x\longrightarrow 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}$ forme indéterminée

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}&=\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}\\&=\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x+2}{x-1}=4.\end{aligned}$$

$*$ Démontrons par la définition de la limite : $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}(3x+1)=7$.
D'une manière générale, on a:
$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \alpha>0,\ \forall\ x\in D_f,\ \ |x-x_0|<\alpha\Longrightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$
Alors : $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \alpha>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ |x-2|<\alpha\Longrightarrow|f(x)-7|<\varepsilon$

$$\begin{aligned}|f(x)-7|<\varepsilon&\Longleftrightarrow|(3x+1)-7|<\varepsilon\\&\Longleftrightarrow|3x-6|<\varepsilon\\&\Longleftrightarrow|3(x-2)|<\varepsilon\\&\Longleftrightarrow|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

Donc $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \alpha>0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \ |x-2|<\alpha\Longrightarrow|f(x)-7|<\varepsilon$
Tel que $\alpha=\frac{\varepsilon}{3}$.

Solution de L'exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|} & si\ x\neq 0,\\ 1 & si\ x=0.\end{cases}$$

1.On a

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (\text{ on a utilisé une limite connue })$$
$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \left(-\frac{\sin x}{x}\right) = -1$$

Donc la limite n'existe pas .

2. On a $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$ n'existe pas, ce qui signifie que la fonction n'est pas continue en 0
f n'est pas dérivable en 0, puisqu'elle n'est pas continue en ce point, car toute fonction dérivable est continue ce qui est équivalent à dire que toute fonction discontinue en un point ne peut être dérivable en ce point .

Solution de L'exercice 3:

1. La fonction est clairement cntinue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} x^3 \cos \frac{1}{x} = 0, \quad (\text{ on a utilisé le Théorème des gendarmes })$$
$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0, \quad (\text{ on a utilisé le Théorème des gendarmes })$$

donc $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = f(0)$: f est continue en 0.

2. Pour $x \neq 0$ la fonction est clairement dérivable et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x} & si\ x > 0, \\ \\ 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} & si\ x < 0. \end{cases}$$

3. La fonction est dérivable en $x = 0$ si et seulement si la limite $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a une limite finie. On a

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \frac{x^3 \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$
$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = 0$$

Donc $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$: f est dérivable en 0 et on a

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x} & si\ x > 0, \\ 0, & si\ x = 0 \\ 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} & si\ x < 0. \end{cases}$$

4. f' est clairement continue pour $x \neq 0$. Pour $x = 0$ on a

$$\lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} f'(x) = \lim_{\substack{> \\ x \longrightarrow 0}} \left(3x^2 \cos \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x} \right) = 0,$$
$$\lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} f'(x) = \lim_{\substack{< \\ x \longrightarrow 0}} \left(3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x} \right) = 0$$

alors $\lim_{x \longrightarrow 0} f'(x) = f'(0)$, donc f' est continue en 0. Par conséquent f est de classe $C^1(\mathbb{R})$.