CHAPITRE II

Généralité et définition de base

II.1 Définition et sens physique de la force

La force est une grandeur physique, elle correspond à l'action d'appuyer, pousser, tirer, même sans mouvement.

Par exemple:

- La force de gravitation exercée par la Terre sur une pomme se note $F_{Terre/pomme}$
- La force magnétique exercée par un aimant sur un clou en fer se note $F_{aimant/clou}$
- La force de contact exercée par l'eau sur un nageur se note $F_{eau/nageur}$
- La force exercée par le sol sur un ballon posé sur lui se note $F_{sol/ballon}$

Tous ces exemples (Figure II.1) conduisent vers la conclusion que les forces sont utilisées pour modéliser des actions mécanique diverses (action de contact, poids, attraction magnétique, effort ….).

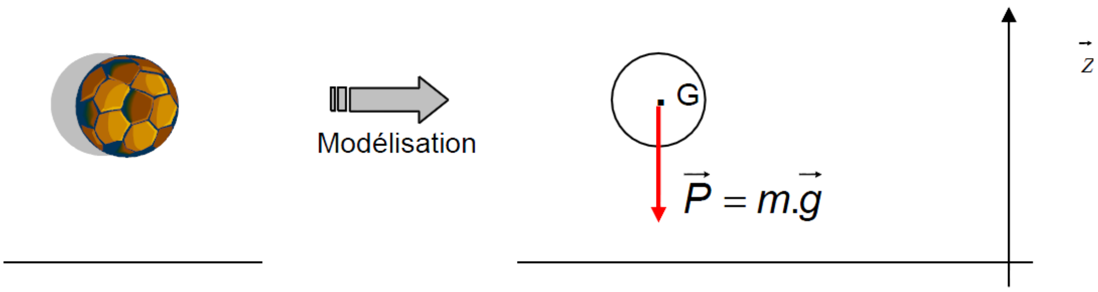


Figure II.1

II.2 Représentation mathématique de la force

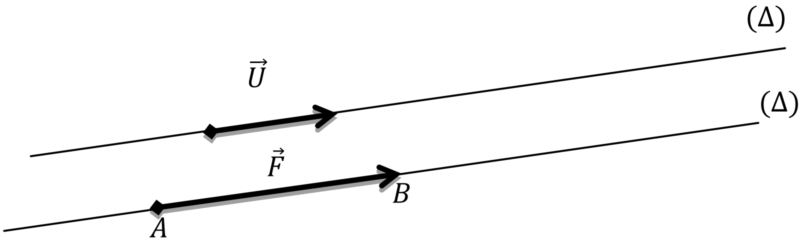
Issac newton qui au 17^e siècle donne la définition de la force.

Une force se définie par un vecteur ; caractérisé par les éléments suivants :

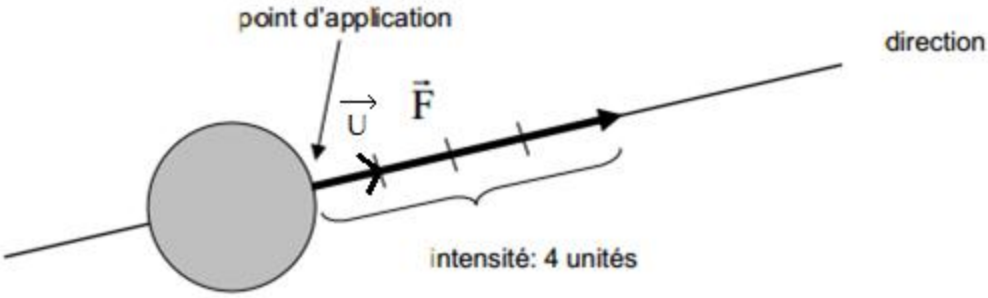
- La direction de la force s'appelle aussi ligne d'action.
- Le sens dans lequel elle agit : $A \rightarrow B$
- Le point d'application de la force.
- L'intensité ou le module qui mesure l'effort qu'il faut fournir pour produire une action.

Graphiquement, la force est représentée, par une flèche droite orientée et on peut écrire :

$$\vec{F} = \|\vec{F}\|.\vec{U}$$



Exemple :



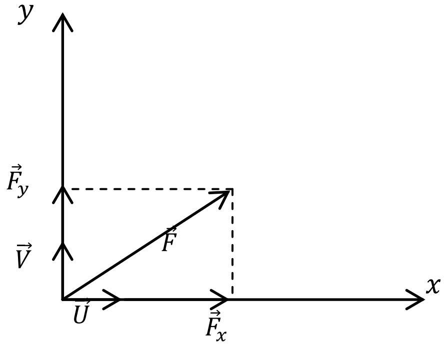
Chaque unité est égale 2, donc :

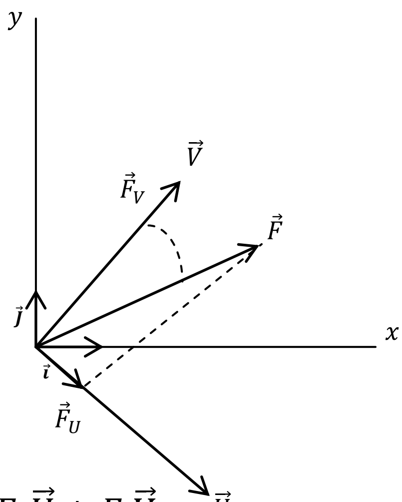
Intensité F = 8 Newton = 8 N

II.3 Opérations sur la force

II.3.1 Composantes d'une force

Une force $\vec{F}$ peut toujours être remplacée par deux force agissant au même point.il existe infinité de solutions possibles.





$$\vec{F} = F_x\vec{U} + F_y\vec{V}$$

$$\vec{F} = F_u\vec{U} + F_v\vec{V}$$

II.3.2 Composition de la force

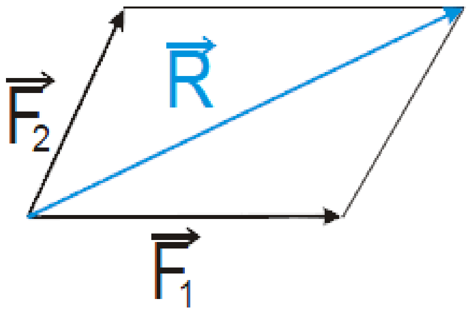
II.3.2.1 Résultante de deux forces

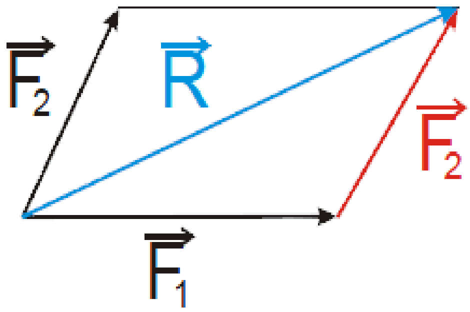
On appelle résultante $\vec{R}$ de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ la force unique qui produit le même effet que les deux forces appelées composantes.

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont les composantes de $\vec{R}$

II.3.2.2 Deux forces concourantes





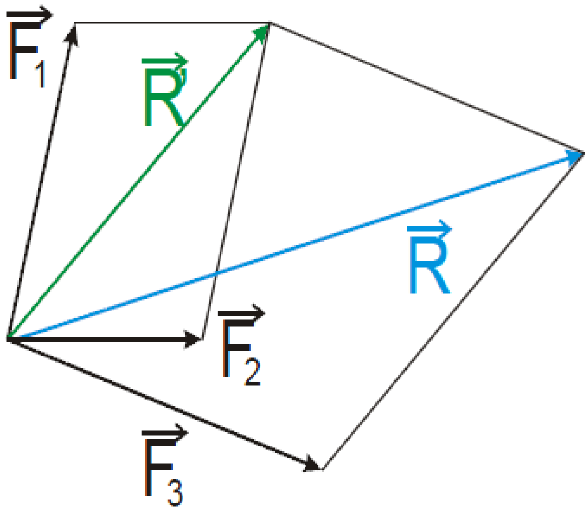
$\vec{R}$ s'obtient comme diagonale du parallélogramme construit sur $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ comme côtés.

Méthode simplifiée (construction du triangle): mettre $\vec{F}_2$ à la suite de $\vec{F}_1$, $\vec{R}$ s'obtient en reliant l'origine de $\vec{F}_1$ à l'extrémité de $\vec{F}_2$.

II.3.2.3 Trois forces concourantes

$\vec{R} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \overrightarrow{R'} + \vec{F}_3$

Tel que $\overrightarrow{R'} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

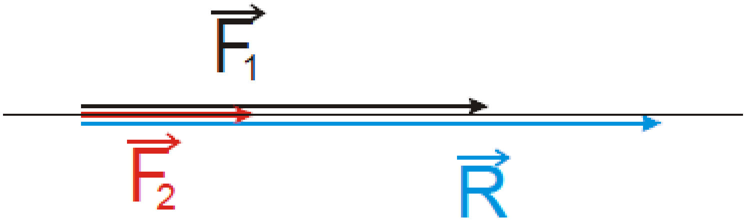


Le parallélogramme construit sur $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ donne $\grave{R}$.

le parallélogramme construit sur $\grave{R}$ et $\vec{F}_3$ donne $\vec{R}$.

II.3.2.4 cas particuliers (deux forces de même support)

a) Deux forces de même sens



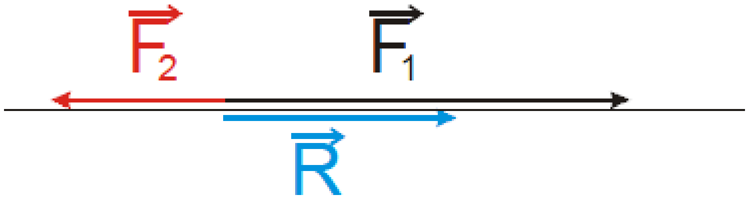
$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ de même sens

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$R = F_1 + F_2$

La résultante à même sens que $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$

b) Deux forces de sens contraire



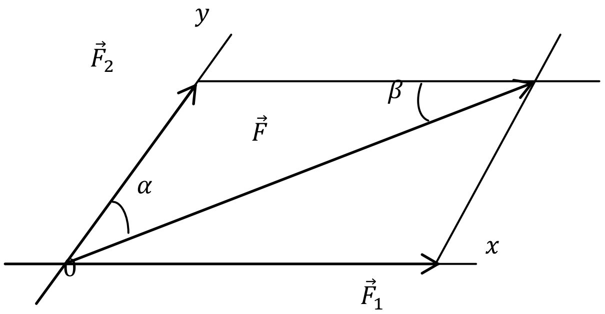
$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ de sens contraire

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$R = |F1 - F2|$

La résultante à même sens que la force la plus grande.

II.3.3 Décomposition d'une force sur des directions quelconque



$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont appelés les projections ou composantes de $\vec{F}$ sur les directions X et Y.

$\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ s'obtiennent graphiquement ou par les formules des triangles des forces.

On s'écrit : $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

Son module s'obtient :

$$\|\vec{F}\| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2\vec{F}_1\,\vec{F}_2\cos(\pi - \alpha - \beta)}$$

Et sa direction se détermine :

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F}{\sin(\pi - \alpha - \beta)}$$

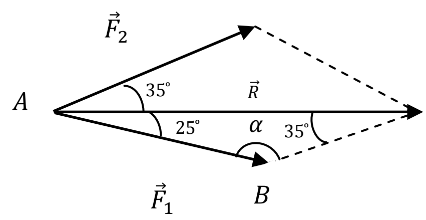
Exemple :

Soient deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ faisant chacune respectivement un angle de 25° et 35° avec la résultante $\vec{R}$ qui a une valeur de 400N. Déterminer les modules des deux forces.

Solution :

R= 400N

Utilisons la règle des sinus :



$$\frac{\text{BC}}{\sin 25} = \frac{\text{AB}}{\sin 35} = \frac{\text{AC}}{\sin\alpha}$$

$\alpha = 180° - (25° + 35°) \Longrightarrow \alpha = 120°$

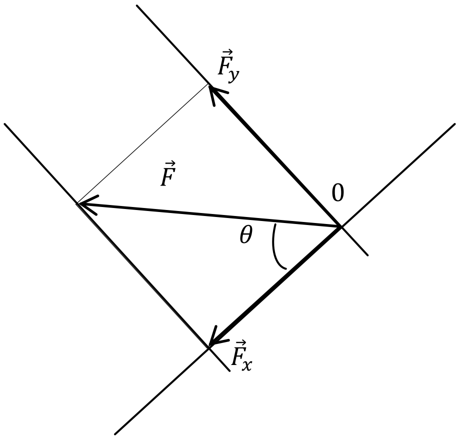
Tel que $AB \equiv F_1$; $BC \equiv F_2$; $AC \equiv R$

D'où $\frac{F_2}{\sin 25°} = \frac{F_1}{\sin 35°} = \frac{R}{\sin\alpha}$

$F_2 = R.\frac{\sin 25°}{\sin 120°} \Longrightarrow F_2 = 195N$

$F_1 = R.\frac{\sin 35°}{\sin 120°} \Longrightarrow F_1 = 265N$

II.3.4 Décomposition d'une force sur des directions perpendiculaire



F_x et F_y sont appelés les projections orthogonales de F sur les axes X et Y.

$F_x = F\cos\theta$, $F_y = F\sin\theta$

F_x et F_y Seront positives si les composantes F_x et F_y ont le même sens que les axes de référence.

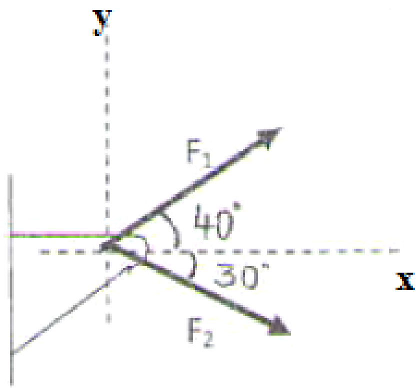
Donc $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ et $\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$

Exemple :

Les forces F_1 et F_2 agissent sur le support comme le montre la figure ci-contre.

F_1 = 100N, F_2 = 80N

Déterminer la résultante R des deux forces F_1 et F_2.



Solution :

$\overrightarrow{F_1}$ =100N

$\overrightarrow{F_2}$ =80N

1) $\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

$\overrightarrow{F_1} = F_x\,\vec{\imath} + F_y\,\vec{\jmath} \implies \overrightarrow{F_1} = F_1\cos 40°\,\vec{\imath} + F_1\sin 40°\,\vec{\jmath}$

Donc : $\overrightarrow{F_1} = 76{,}60\ \vec{i} + 64{,}28\,\vec{j}$

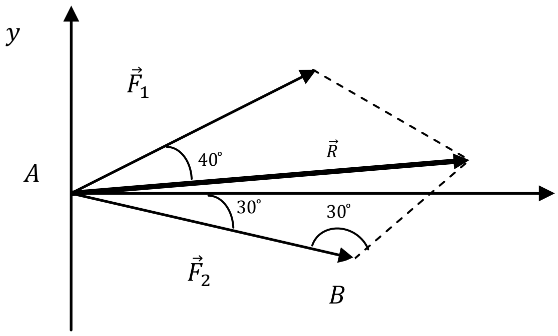
$\overrightarrow{F_2} = F_x\,\vec{i} - F_y\,\vec{j} \implies \overrightarrow{F_2} = F_2\cos 30°\,\vec{i} - F_2\sin 30°\,\vec{j}$

Donc : $\overrightarrow{F_2} = 69{,}28\ \vec{i} - 40\,\vec{j}$

$\vec{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \Rightarrow \vec{R} = [76{,}60\ \vec{i} + 64{,}28\,\vec{j}\ ] + [69{,}28\ \vec{i} - 40\,\vec{j}\ \ ]$

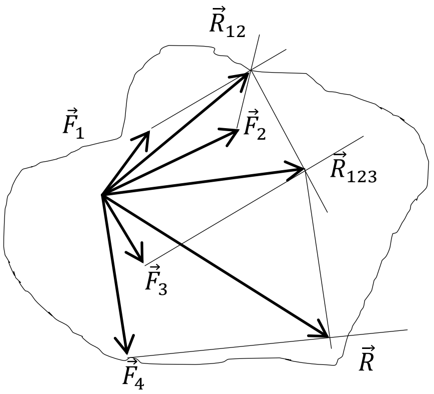
$\vec{R} = 145{,}88\,\vec{i} + 24{,}28\,\vec{j}$

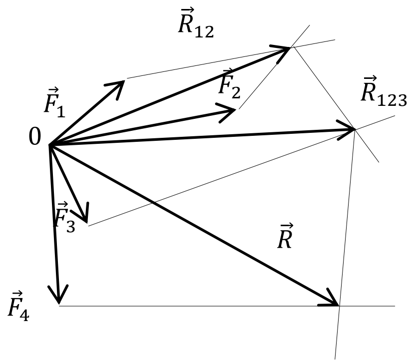
R= $\sqrt{R_X^2 + R_j^2} \Rightarrow R = 147{,}88N$



II.3.5 Résultante de plusieurs forces concourantes

a) On peut faire la somme de plusieurs forces appliquées en un point commun :





$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

1er étape : trouver la résultante : $\vec{R}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

2eme étape : trouver la résultante : $\vec{R}_{123} = \vec{R}_{12} + \vec{F}_3$

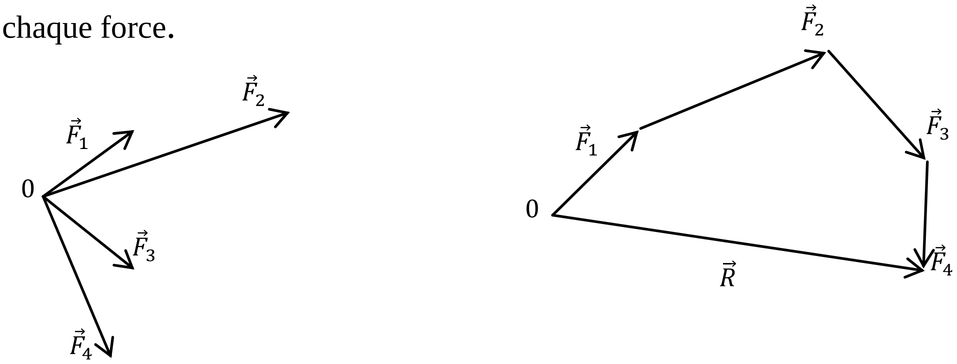
3eme étape : la résultante finale : $\vec{R} = \vec{R}_{123} + \vec{F}_4$

Donc il est clair, qu'en répétant l'application du principe du parallélogramme, on peut déterminer la résultante de n forces agissant en un même point.

Cette opération correspond à la somme vectorielle :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n$$

b) Pour la construction du polygone des forces, on respecte le sens et la direction de chaque force.

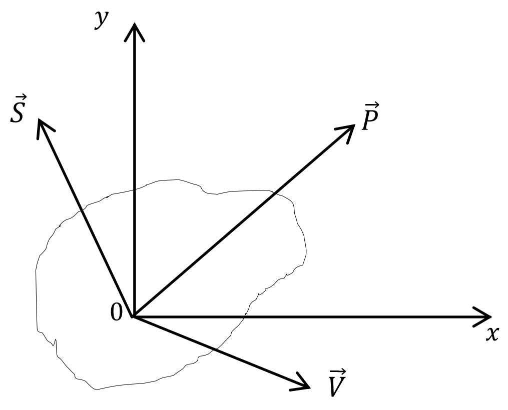


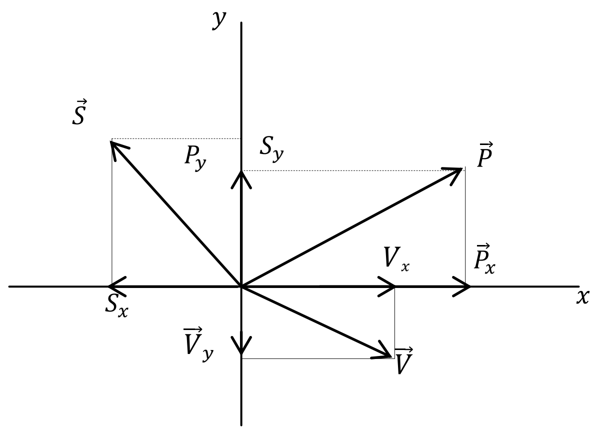
Polygone des forces

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \sum_{\iota=1}^{n} \vec{F}_\iota$$

Dans la pratique, la résultante R s'obtient par la méthode des projections suivante :

Choisissons un système d'axes (X,Y) orthonormé et recherchons les composantes ou projection orthogonales de chacune des forces sur ces axes :





La résultante $\vec{R}$:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{S} + \vec{V}$$

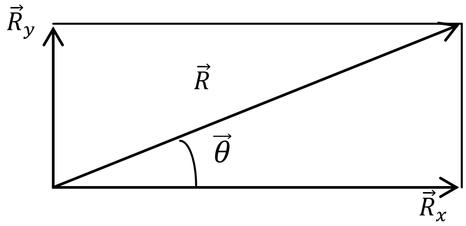
On peut alors faire la somme des composantes sur l'axe :

$$X: R_X = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$$

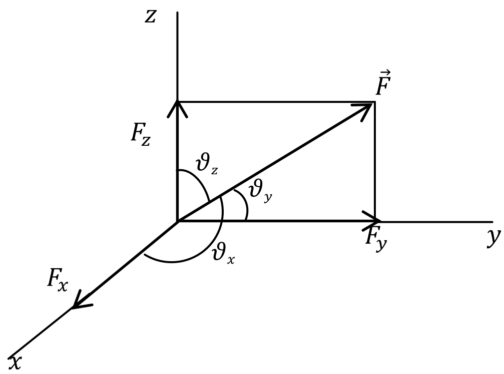
$$Y: R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$$

La grandeur de la résultante R et sa direction sont alors fournies par :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad et \quad \tan\theta = \frac{R_y}{R_X}$$



Dans le cas où on peut décomposer une force suivant trois directions (0,X,Y,Z), la force $\vec{F}$ fait les angles ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z respectivement avec les axes x, y, z du système de coordonnées cartésiennes orthogonales 0XYZ. (fig…….)



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z$$

$$F_x = \|\vec{F}\| \cos\vartheta_x, \quad F_y = \|\vec{F}\| \cos\vartheta_y, \quad F_z = \|\vec{F}\| \cos\vartheta_z$$

D'où le module : $\vec{F} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

Pour décomposer $\vec{F}$ suivant les trois axes, construisons un parallélépipède dans lequel $\vec{F}$ sera une diagonale.

II.4 classification des actions mécaniques

On appelle action mécanique toute cause physique susceptible :

- De maintenir un corps au repos,
- De créer, de maintenir ou de modifier un mouvement,

- De déformer un corps.

Ces actions sont schématisées ou modélisées par des forces, moments, couples, pressions,..
Il existe deux types d'actions mécaniques :

II.4.1 Actions mécaniques à distance

Ces actions s'exercent sans qu'il y ait contact entre l'acteur et le receveur. Elles agissent donc à travers le vide.

Les actions à distance sont les actions:

- électriques (entre particules chargées)
- magnétiques (une pièce de monnaie en nickel sont attirés à distance par un aimant)
- gravitationnelles (dont fait partie le poids, **Figure II.2**)
- nucléaires (entre les nucléons et les quarks)

Les actions électriques, magnétiques et de pesanteur sont des actions mécaniques à distance. Elles sont réparties dans tout le volume de l'objet.

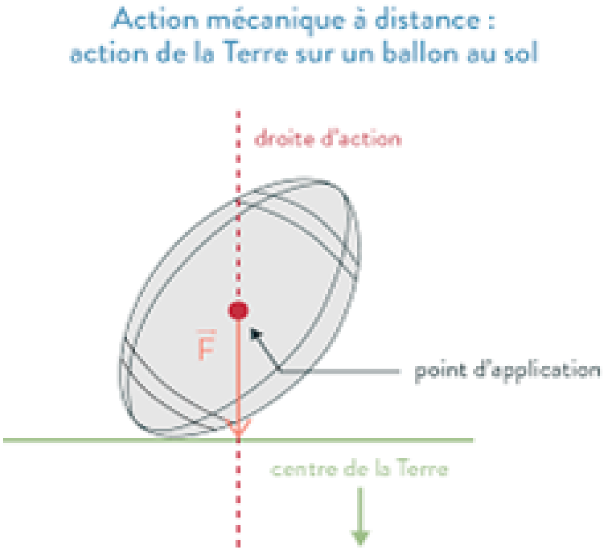


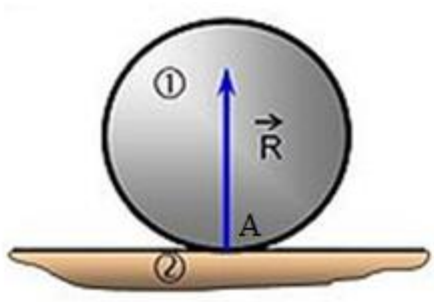
Figure II.2

II.4.2 Action mécanique de contact

Les forces de contact sont celles qui s'exercent sur un corps B dés qu'il est en contact avec un corps A. Ces actions nécessitent un contact entre l'acteur et le receveur.
Les actions de contact de devisent en trois groupes :

II.4.2.1 contact ponctuel

Considérons l'action d'une bille (1) sur un plan (2).



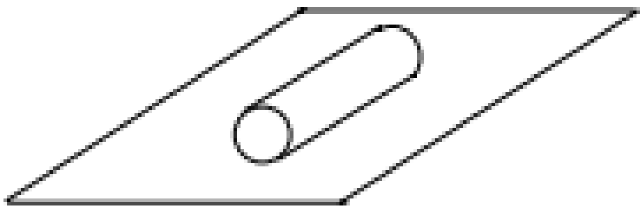
L'action mécanique de contact entre la bille et le plan est concentrée sur un point A et est schématisé par le vecteur $\vec{R}$ ($A_{2/1}$) perpendiculaire au plan de contact (2) et passant par le centre de gravité de la bille.

Exemples

- action de contact de la pointe d'un clou sur une planche en bois
- action d'un des pieds d'une chaise sur le sol sur lequel elle repose.

II.4.2.2 Contact linéaire

Considérons l'action d'un cylindre sur un plan horizontal.



L'effort de contact est réparti de façon uniforme le long de AB est schématisé par une charge linéique q ($N.m^{-1}$). On remplacera cette charge répartie par une action unique concentrée appliquée au milieu du segment AB telle que l'intensité : Q = q.L.

II.4.2.3 Contact surfacique

Lorsque l'action de contact entre deux solides est concentrée sur une surface, l'action mécanique est schématisée par une pression de contact (N/m^2).

Exemple :

Action du fluide sur le piston d'un vérin (Figure II.3). Dans le cas d'une répartition uniforme du fluide sur le piston, on remplacera l'ensemble des micro-actions par une action unique appliquée au centre de gravité de la surface.

$\left\|\overrightarrow{F_{Fluide/Piston}}\right\|$= P.S

P: pression du fluide en Pascal (N/mm^2)

S : surface de contact du fluide en m^2

F : résultante des forces de pression en N.

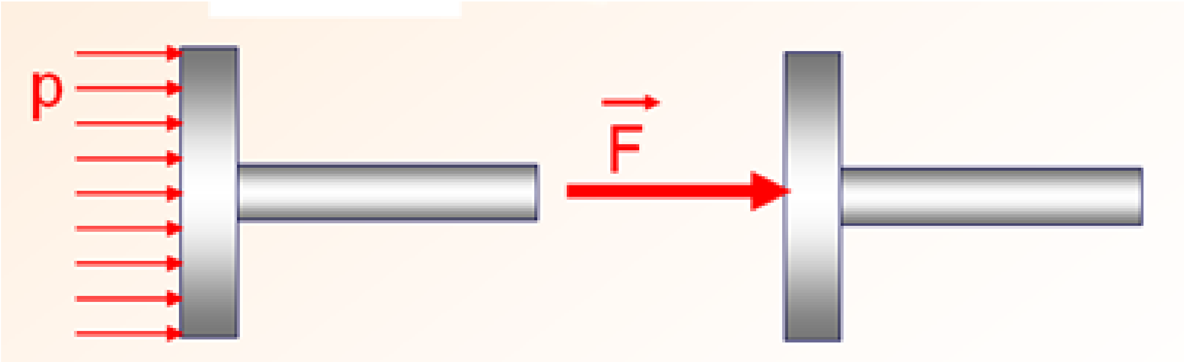
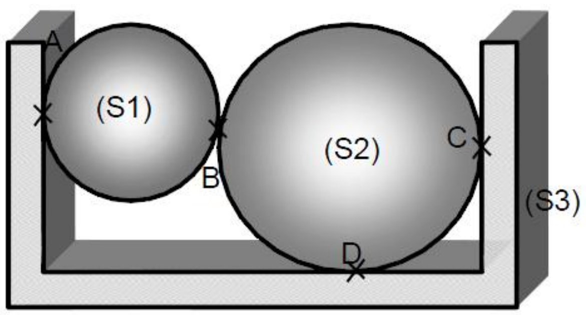


Figure II.3

II.5 Classification des forces

On considère un mécanisme constitué de trois solides.

Soit E l'ensemble constitué par le corps S_1 et S_2 : E= $\{S_1, S_2\}$



Le bilan des **actions mécaniques extérieures** qui agissent sur l'ensemble E s'établit ainsi:

• Poids de l'ensemble E (Action Mécanique à distance : Poids de S_1 et S_2).

• Actions mécaniques de contact exercées par S_3 sur l'ensemble E aux points A, C et D (Actions Mécaniques de contact).

On appelle forces extérieures, toutes les actions exercées par le milieu extérieur sur le système matériel considéré.

Exemple :

- la force $\overrightarrow{F_{3/1}}$ est une force intérieure pour le système : $\{S_3, S_1\}$, $\{S_1, S_2, S_3\}$
- l'action mécanique de S_2 sur S_1 et de S_2 sur S_3 sont des actions mécaniques **intérieures** si on isole S = $\{S_1, S_2, S_3\}$.

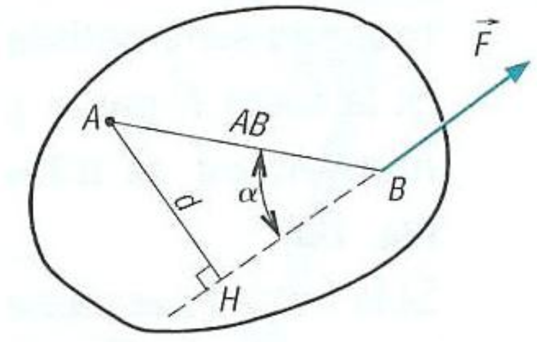
On appelle force intérieure toute force exercée par un élément du système matériel considéré sur un autre élément du même système.

II.6 Notion de moments

Les effets d'une force sur un solide dépendent de la position de la force par rapport au corps. Ils engendrent des translations ou des rotations.
Pour traduire ces phénomènes, on fait appel à la notion de moment.

II.6.1 Moment d'une force par rapport a un point

- soit un repère orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$
- Un point A quelconque
- Soit une force $\vec{F}$ appliquée au point B.
- **α = $(\overrightarrow{AB}, \vec{F})$,** angle orienté de $\overrightarrow{AB}$ vers $\vec{F}$.

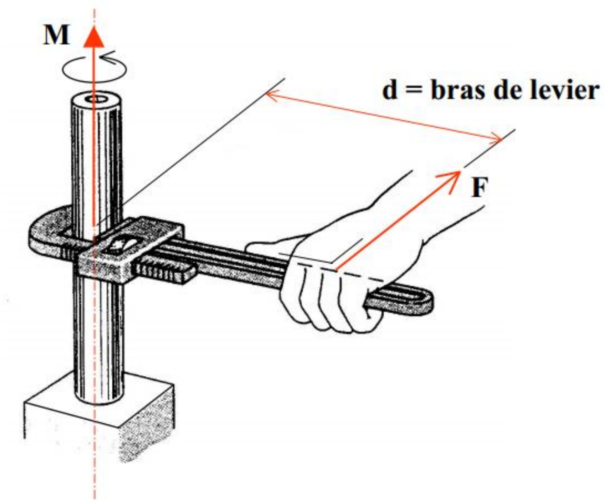


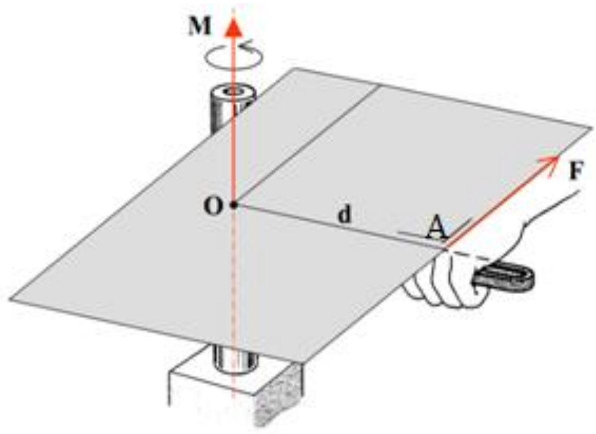
On appelle moment par rapport au point A de la force $\vec{F}$ appliquée au point B, le vecteur défini par : $\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$.

Le moment $\vec{M}_A(\vec{F})$ est un vecteur ayant toutes les propriétés d'un produit vectoriel (Figure II.4) :

$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = F.AB.(\sin\alpha) = F.d$

Unité: N.m (Newton mètre)





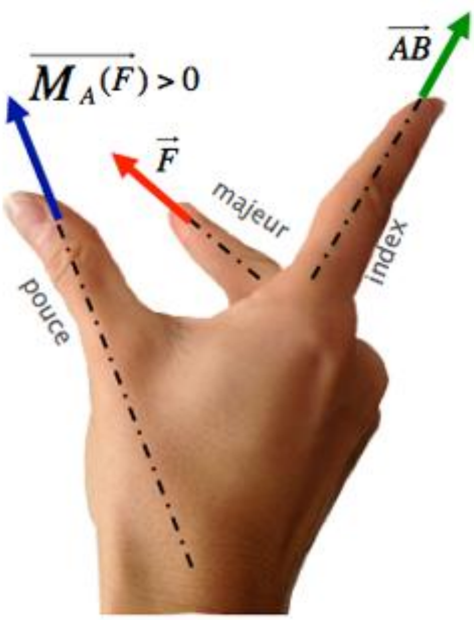
$\vec{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$

Figure II.4

Remarque :

- En fonction du repère choisi, si l'effort tend à faire tourner dans le sens trigonométrique, le moment sera de signe positif.
- D'après les propriétés du produit vectoriel, le vecteur moment est perpendiculaire à la fois à la force $\vec{F}$ et au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Son sens est donné par la règle des trois doigts (de la main droite, Figure II.5) :



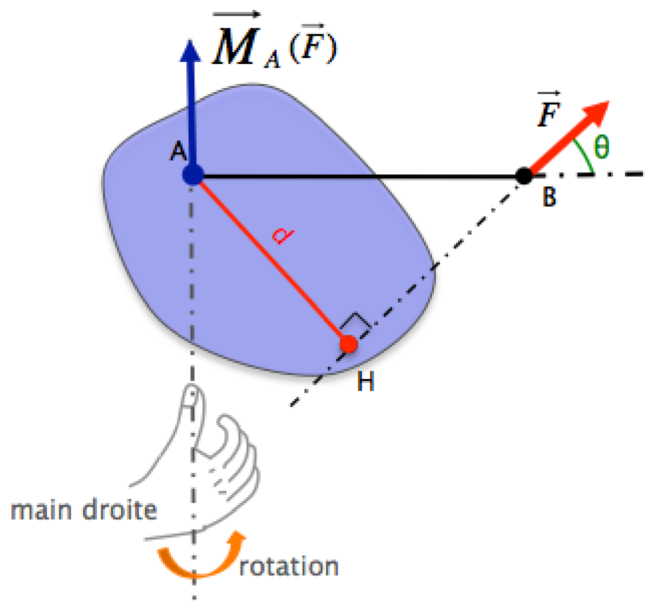
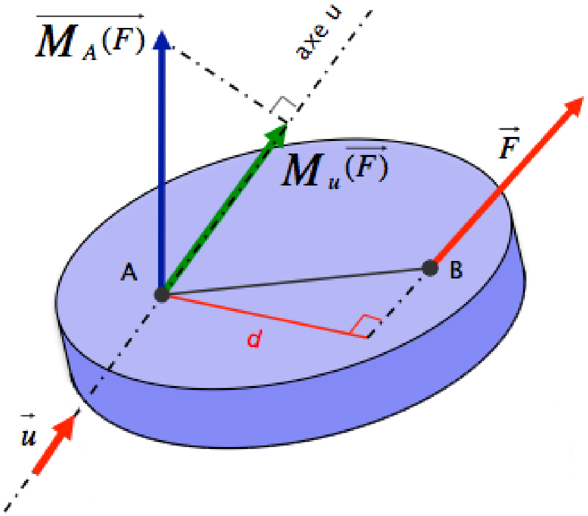


Figure II.5

II.6.2 Moment d'une force par rapport à un axe

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe définit par le vecteur unitaire $\vec{u}$, est égal au produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur moment en A de la force $\vec{F}$, où A est un point quelconque de l'axe (u) : $M_u(\vec{F}) = \vec{u}.\ M_A(\vec{F})$.

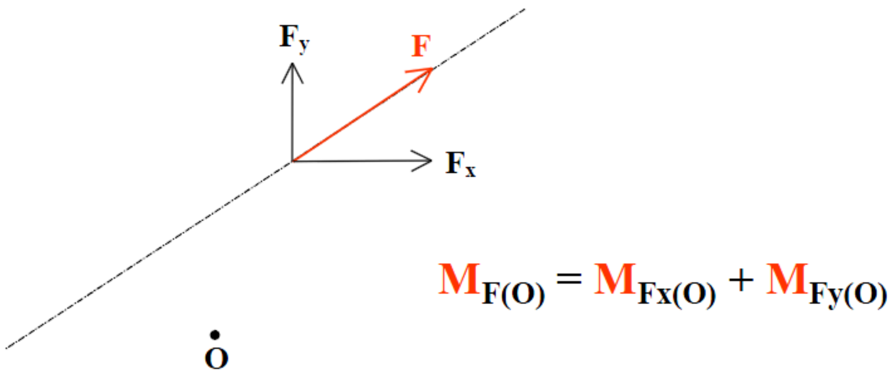
C'est donc une grandeur scalaire, dont le signe dépend du sens de rotation du solide par rapport à l'axe (u).



On peut remarquer que ce **moment** sera **nul** si l'axe (u) est **parallèle à la force $\vec{F}$** (le vecteur moment étant perpendiculaire à la force, donc à $\vec{u}$, et le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires étant nul), ou si l'axe (u) est **concourant avec la ligne d'action de la force $\vec{F}$** (dans ce cas, si on prend comme point A le point d'intersection des deux directions, le vecteur moment de la force $\vec{F}$ en A sera nul).

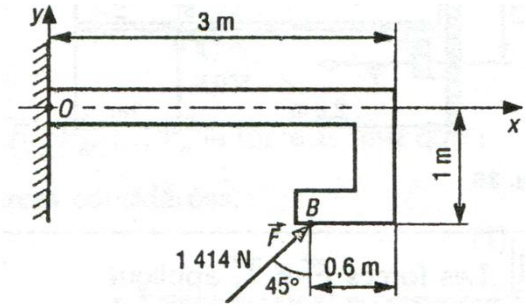
II.6.3 Théorème de VARIGNON

Le moment, par rapport à un point, d'une force est égal à la somme des moments, par rapport à ce point, des composantes de cette force.



Exemple

Calculer le moment en O de la force $\vec{F}$ agissant au point B.



Solution :
F=1414N

$\overrightarrow{M(\vec{F})/O} = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}$

$\overrightarrow{OB} = 2,4\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}$

$\vec{F} = F\ \sin 45\,\vec{\imath} + F \cos 45\ \vec{\jmath} \Longrightarrow \vec{F} = 999,85\,\vec{\imath} + 999,85\,\vec{\jmath}$

$$\overrightarrow{M(\vec{F})/O} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 999,85 \\ 999,85 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq 3400\vec{k}$$

$\overrightarrow{M(\vec{F})/O} = 3400\mathrm{N\,.\,m}$

Exemple

Dans un repère orthonormé, deux points A et B ont pour coordonnées :

A(2, 2, -3) et B(5, 3, 2) ; Déterminer :

1) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport au centre O du repère ;

2) Le moment du vecteur glissant $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la droite Δ passant par le point O et le point C(2, 2, 1)

Solution :

A (2, 2, -3) ; B(5, 3, 2)

1) le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au centre O du repère

$\overrightarrow{AB} = 3\,\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 5\vec{k}$

$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_{/O} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 13\,\vec{i} - 19\,\vec{j} - 4\,\vec{k}$

2) le moment du $\overrightarrow{AB}$ par rapport a la droite (Δ) passant par le point 0 et le point C (2 2 1).

$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_{/\Delta} = \left[\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})/_O} \cdot \vec{U}\right] \cdot \vec{U}$

Tel que $\vec{U}$ vecteur unitaire qui donne la direction de la droite (Δ) definie par le point 0 et le point C :

$\vec{U} = \frac{\overrightarrow{OC}}{OC} = \frac{2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}}{3} \Longrightarrow \vec{U} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$

$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}_{/\Delta} = \left[13\,\vec{i} - 19\,\vec{j} - 4\vec{k}\right] \cdot \left[\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}\right] \vec{U}$

$\overrightarrow{M(\overrightarrow{AB})}/\Delta = -\frac{16}{3}\vec{U}$