

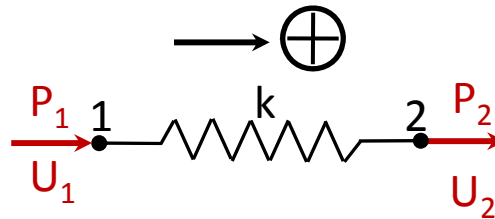
Plan

1. Système à un ressort linéaire
2. Système à plusieurs ressorts linéaires
 1. Matrice de rigidité de 2 ressorts
 2. Assemblage
 3. Conditions aux limites
 4. Réactions d'appuis
 5. Les efforts dans les ressorts
3. Notion de degrés de liberté
4. Exemple d'application
5. Exercices

1/ Système à un ressort linéaire

1.1/ Matrice de rigidité d'un ressort

On considère le ressort linéaire de raideur « k » de la figure ci dessous



Le déplacement U_1 et U_2 des 2 extrémités du ressort correspond à l'application des forces axiales P_1 et P_2 .

Si le ressort est en équilibre statique, la somme des forces est nulle:

$$\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{P_2} = 0 \Rightarrow P_1 = -P_2$$

Le déplacement du ressort soumis à ces forces est égale à $(U_2 - U_1)$, et est proportionnel à la force appliquée:

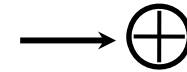
$$P_1 = k(U_1 - U_2)$$

$$P_2 = k(U_2 - U_1)$$

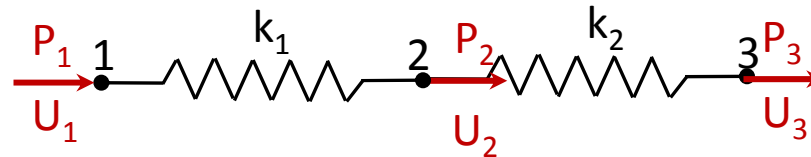
Vecteur force élémentaire. $\longrightarrow \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Matrice de rigidité élémentaire}$

2/Système à plusieurs ressorts linéaires

2.1/ Matrice de rigidité de 2 ressorts



Considérons maintenant le système de 2 ressorts :



L'équilibre statique au nœud 1 impose que la force appliquée P_1 soit égale à la force de tension du ressort 1

$$P_1 = k_1(U_1 - U_2)$$

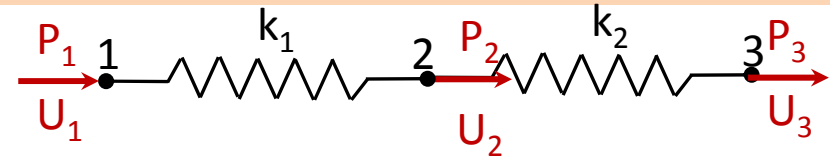
De même pour le nœud 2, la force extérieure est égale à la somme des forces de tension des ressorts 1 et 2 :

$$P_2 = k_1(U_2 - U_1) + k_2(U_2 - U_3)$$

Pour le nœud 3, on obtient :

$$P_3 = k_2(U_3 - U_2)$$

2/Système à plusieurs ressorts linéaires...



$$P_1 = k_1(U_1 - U_2)$$

$$P_2 = k_1(U_2 - U_1) + k_2(U_2 - U_3)$$

$$P_3 = k_2(U_3 - U_2)$$

2.2/ Assemblage

Ces 3 équations forment un système linéaire de (3 x 3) de la forme :

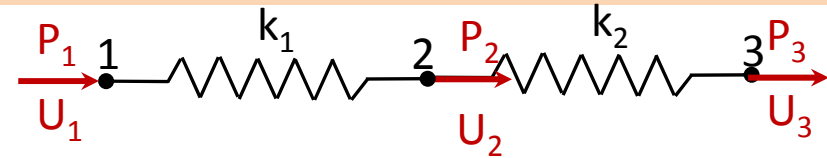
$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow [K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Ceci est appelé **assemblage** et la matrice obtenue est la **matrice de rigidité de tout le système** (formé dans ce cas de 02 éléments ressorts) ;

Elle est obtenue par assemblage des matrices élémentaires de chaque ressort.

2/Système à plusieurs ressorts linéaires...

2.3/ Conditions aux limites



$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Ce système linéaire n'admet, pas tel quel, de solutions uniques, puisque la solution est définie à une translation arbitraire suivant l'axe « Ox »

Pour rendre la solution unique, il faut imposer au moins une condition aux limites sur le déplacement en 1 ou en 3.

Par exemple si le système est fixé en 1, le déplacement est nul, et le système admet une solution unique. Il s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \{P\} = [K]^{-1}\{U\}$$

Le système d'équations obtenu peut être déterminé en utilisant une méthode de résolution des systèmes linéaires soit directes (Gauss, LU, ...) ou indirectes (Gauss-Seidel; Jacobi...)

2/Système à plusieurs ressorts linéaires...

2.4/ Réactions d'appuis

La force de réaction en 1 est évidemment obtenue après résolution par la relation :

$$R_1 = k_1(0 - U_2)$$

2.5/ Les efforts dans les ressorts

L'effort dans chaque ressort est exprimé ainsi : $F = k(U_j - U_i)$

Avec U_i représente le déplacement au nœud origine « i »;
 U_j représente le déplacement au nœud extrémité « j ».

L'effort dans le ressort 1-2 :

$$F_1 = -R_1 = k_1(U_2 - 0)$$

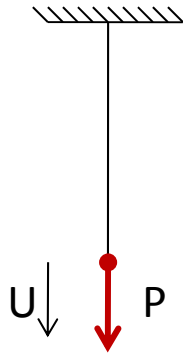
L'effort dans le ressort 2-3 :

$$F_2 = k_2(U_3 - U_2)$$

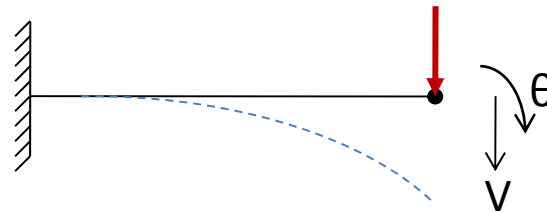
3/Notion de degré de liberté

Notation : DDL (DOF en anglais) « Degrees Of Freedom »

- La possibilité d'une structure de se déplacer.



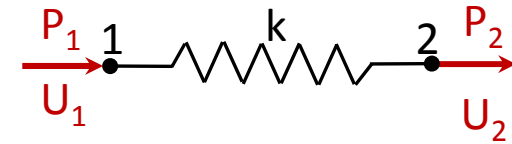
Système à 1 DDL



Système à 2 DDL

- Le nombre de degrés de liberté, (NDDL) est défini par le nombre total des possibilités des déplacements des nœuds.

3/Notion de degré de liberté...



Système à 1 DDL

- Dans le cas des ressorts, nous avons un seul DDL; il s'agit du déplacement axial « U »
- La taille de la matrice de rigidité en dépend; elle est donnée par

(NDDL x Nombre de nœuds)

4/Exemple d'application

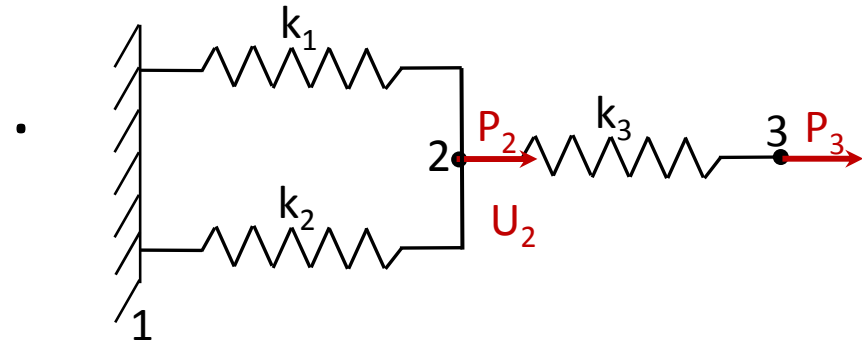
$$k_1 = 100 \text{ KN/ml}$$

$$k_2 = 150 \text{ KN/ml}$$

$$k_3 = 200 \text{ KN/ml}$$

$$P_2 = 2 \text{ KN}$$

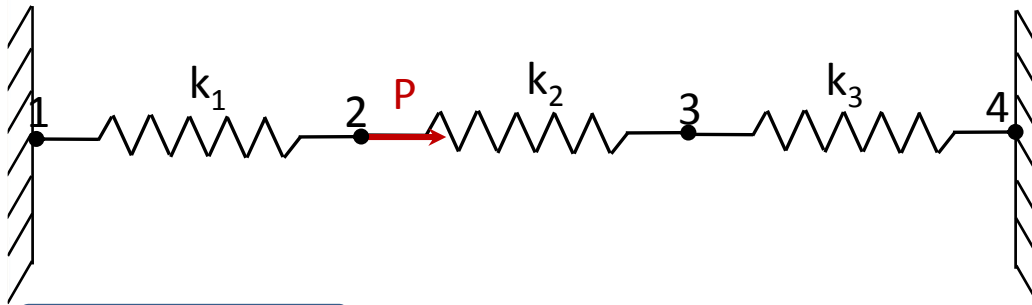
$$P_3 = 1 \text{ KN}$$



1. Ecrire les matrices de rigidité élémentaires;
2. Faire l'assemblage;
3. Calculer les déplacements aux nœuds,
4. Calculer les efforts dans les ressorts.

5/Exercices

5.1/ Exercice 1



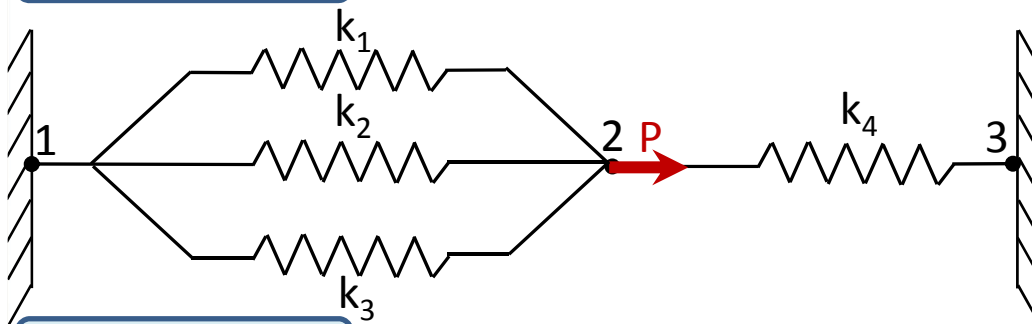
Données :

$k_1 = 200 \text{ KN/ml}$
 $k_2 = 150 \text{ KN/ml}$
 $k_3 = 200 \text{ KN/ml}$
 $P = 20 \text{ KN}$

Calculer :

- Les déplacements du système
 - Les efforts dans les ressorts

5.2/ Exercice 2



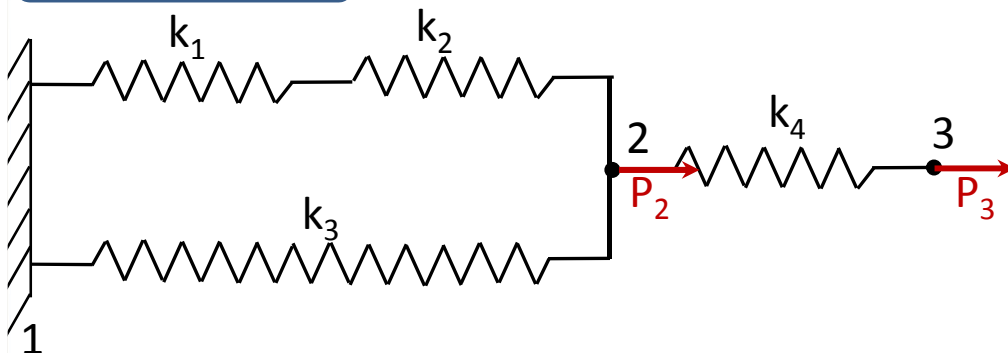
Données :

$k_1 = 200 \text{ KN/ml}$
 $k_2 = 100 \text{ KN/ml}$
 $k_3 = 150 \text{ KN/ml}$
 $k_4 = 200 \text{ KN/ml}$
 $P = 10 \text{ KN}$

Calculer :

- Le déplacement au nœud 2.
 - Les réactions d'appuis.

5.3/ Exercice 3



Données :

$k_1 = 200 \text{ KN/ml}$
 $k_2 = 100 \text{ KN/ml}$
 $k_3 = 100 \text{ KN/ml}$
 $k_4 = 200 \text{ KN/ml}$
 $P_2 = 2 \text{ KN}$
 $P_3 = 1 \text{ KN}$

Calculer :

- Les déplacements du système