

Les transformations entre espaces de coordonnées

1 Principe

Considérons les deux espaces de coordonnées suivants. Le premier est l'espace de coordonnées cartésiennes classique, défini par les coordonnées (x, y, z) . Cet espace est également appelé « espace réel ». On met en relation cet espace réel de coordonnées cartésiennes avec un autre espace de coordonnées tridimensionnelle que nous appellerons espace de coordonnées paramétriques (ou espace de référence en éléments finis). Cet espace est décrit par les coordonnées (ξ, η, ζ) . Un exemple très courant de ce type de transformation entre espaces de coordonnées est l'utilisation de coordonnées cylindriques. Dans le cas des coordonnées cylindriques, les coordonnées que l'on considère (avec les notations habituellement utilisées) sont $\xi = r, \eta = \theta, \zeta = z$.

On établit la relation entre les deux espaces en considérant les fonctions :

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\ y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (01)$$

Cela permet de déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point correspondant au point de coordonnées (ξ, η, ζ) dans l'espace de coordonnées paramétriques. Dans le cas de coordonnées cylindriques, ces relations sont :

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\theta) \\ y &= r \cdot \sin(\theta) \\ z &= z \end{aligned} \quad (02)$$

2 Matrice Jacobienne

Dans plusieurs situations de calcul, nous avons souvent besoin (en vue de les simplifier) de faire des transformations d'opérateurs différentiels (des dérivées simples ou partielles) et intégraux (des intégrales simples ou multiples) entre les deux espaces de coordonnées. La matrice Jacobienne $[J]$ permet assez facilement d'exprimer la transformation des opérateurs différentiels et intégraux entre les deux espaces de coordonnées :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (03)$$

En effet, nous verrons plus loin dans ce chapitre, que la MEF utilise ces transformations (intégrales et dérivées) dans les opérations de passage entre les éléments réels du maillage et éléments de référence. Ce qui permet de faciliter les calculs aussi bien manuellement que sur ordinateur (réduction du temps CPU des calculs).

3 Utilisation de la matrice Jacobienne dans le calcul intégral

Concernant la transformation des intégrales, on utilise le déterminant de la matrice Jacobienne $\det[J]$ qui est utilisé de la manière suivante. Soit une fonction $F(x, y, z)$ qui se transforme dans l'espace des coordonnées paramétriques en une fonction $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ telle que :

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \quad (04)$$

On transforme les intégrales entre les deux espaces en utilisant l'expression générale :

$$\begin{aligned} \int_V F(x, y, z). dx. dy. dz &= \int_{V_{ref}} F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)). \det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \\ &= \int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta, \zeta). \det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \end{aligned} \quad (05)$$

On déduit également de cette équation la relation suivante entre éléments différentiels :

$$dx. dy. dz = \det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \quad (06)$$

Remarque : Si on applique la relation précédente au cas des coordonnées cylindriques, on retrouve la relation bien connue entre les deux éléments infinitésimaux cartésiens et cylindriques :

$$dx. dy. dz = \det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta = r. dr. d\theta. dz \quad (07)$$

En effet, si on considère la transformation avec le système de coordonnées cylindrique, la matrice $[J]$ s'écrira :

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin(\theta))}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial \theta} & \frac{\partial(r\sin(\theta))}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial z} & \frac{\partial(r\sin(\theta))}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $\det[J]. = 1. (r. \cos^2(\theta) + r. \sin^2(\theta)) = r. (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r$

4 Utilisation de la matrice Jacobienne dans le calcul des dérivées partielles

En ce qui concerne la transformation des dérivées partielles entre espaces de coordonnées, on utilise l'inverse de la matrice Jacobienne notée $[j]$:

$$[j] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \quad (08)$$

Par la suite, cette matrice inverse $[j]$ peut être utilisée de la manière suivante. Si la transformation de la fonction $F(x, y, z)$ dans l'espace de coordonnées paramétriques en une fonction $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ s'effectue telle que $(\xi, \eta, \zeta) = F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))$, les transformations des dérivées entre les deux espaces s'effectuent en utilisant l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} = [j] \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (09)$$

Ceci permet de donner les trois relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= j_{11} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + j_{12} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + j_{13} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= j_{21} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + j_{22} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + j_{23} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= j_{31} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + j_{32} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + j_{33} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (10)$$

Ainsi, on peut transformer les dérivées partielles en (x, y, z) en des dérivées partielles en (ξ, η, ζ) .

5 Exemples d'application

Exemple 01 (exercice 01 de la série de TD N°01)

On considère dans le plan, le cas de la transformation entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et polaires (r, θ) .

1- Exprimer la matrice Jacobéenne correspondant à cette transformation

2- Donner son déterminant

3- Soit la fonction $F(x, y) = x^2 y$ avec $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2xy$. Retrouver ce résultat en passant par des dérivées par rapport aux variables (r, θ) .

Solution

1/ Exprimons "la matrice Jacobéenne" correspondante à cette transformation.

On met : $\xi = r$ et $\eta = \theta$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Mais on sait que :

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta$$

Cela nous permet d'écrire :

Concepts de base de la méthode des éléments finis

1. Principe fondamental

Le principe fondamental de la MEF est de transformer un problème continu (modélisé mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites) en un problème discret qui est modélisé mathématiquement par un système d'équations linéaires. La solution d'un problème continu est un champ continu d'une grandeur physique (par exemple : le champ de vecteurs déplacements en mécanique) alors que la solution d'un problème discret est un ensemble de valeurs prise par cette grandeur physique en des points particuliers appelés « nœuds du maillage ».

En élasticité linéaire, le système d'EDP est constitué d'équations d'équilibre du domaine Ω avec des conditions aux limites de type déplacements imposés sur $\partial_1\Omega$ et de type efforts imposés sur $\partial_2\Omega$ telles que la frontière $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$ et $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$. Le problème consiste à chercher sur Ω le champ de vecteurs déplacements $\{U(u, v, w)\}$ qui est solution de ce système d'équations tout en vérifiant les conditions aux limites. Obtenu sous forme discrète (uniquement aux nœuds du maillage), ce champ sera ensuite utilisé pour calculer le champ de déformations (en utilisant les relations cinématiques déformations-déplacements) ainsi que le champ de contraintes (en utilisant les relations de comportement contraintes-déformations). Cela permet également de calculer les réactions en zones d'appuis où les déplacements ont été imposés (sur $\partial_1\Omega$)

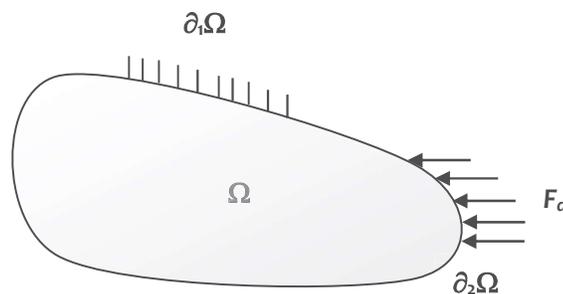


Figure 01a : Schéma de la structure à modéliser par éléments finis

2. Formulation intégrale

La MEF consiste à transformer selon différentes méthodes l'ensemble des équations aux dérivées partielles et conditions aux limites en une formulation intégrale qui consiste en une seule équation faisant intervenir des intégrales de type :

$$\int_{\Omega} [\] dV + \int_{\partial\Omega} [\] dS = 0$$

Nous verrons plus loin le contenu des crochets. La méthode la plus utilisée pour obtenir cette formulation intégrale est connue sous le nom de : « méthode des résidus pondérés ».

3. Maillage

Cette opération consiste à subdiviser le domaine Ω en un ensemble d'éléments de formes simples. En 2D, le domaine Ω est subdivisé soit en triangles, soit en quadrangles. En 3D, la subdivision se fait principalement en utilisant des tétraèdres, des pentaèdres ou prismes ainsi que des hexaèdres ou cubes. Les éléments finis ainsi définis sont connectés entre eux par des points situés sur leurs contours et sommets. Ces points sont appelés « nœuds ». Chaque nœud possède des degrés de liberté qui sont les composantes du vecteur déplacement $\{U\}$ qui est l'inconnue recherchée en ce point. Le nombre de nœuds du maillage multiplié par le nombre de ddl par nœud représente le nombre total d'inconnues du système d'équations à résoudre. Par conséquent, ce nombre désigne la taille du modèle de calcul par EF ainsi que le temps de calcul. Par ailleurs, le nombre d'éléments des modèles 3D sont souvent de l'ordre de milliers (voir de dizaines de milliers) d'éléments.

Dans la pratique, il existe un grand nombre de types d'éléments finis utilisés. Ces éléments se distinguent principalement par leur géométrie ainsi que par leur comportement pris en compte dans leur formulation mathématique. Par exemple, les éléments finis de type « barre » et ceux de type « poutre » sont identiques géométriquement mais leurs comportements sont différents. En effet, l'élément barre travaille uniquement à la traction-compression tandis que l'élément « poutre » travaille à la traction, compression, flexion et torsion.

4. Utilité du maillage

L'opération de maillage du domaine Ω permet de :

- 1- de calculer plus facilement les intégrales sur le domaine Ω ; ceci consiste en la sommation des intégrales calculées sur chaque élément.
- 2- de pouvoir exprimer mathématiquement la solution recherchée comme un assemblage de solutions de forme assez simple sur chaque élément. Autrement dit, on cherche la solution $\{U(x, y, z)\}$ sur le domaine Ω sous la forme de l'union de N solutions $\{U_i(x, y, z)\}$ des N éléments du maillage. L'indice i est celui de l'élément considéré tel que :

$$\{U_i(x, y, z)\} = \begin{pmatrix} u_i(x, y, z) \\ v_i(x, y, z) \\ w_i(x, y, z) \end{pmatrix}$$

En général, les composantes u_i , v_i et w_i sont de nature polynomiale et sont exprimées en utilisant le principe de l'interpolation nodale que nous verrons au paragraphe 3.

5. Transformation en un système d'équations linéaires

L'introduction de l'interpolation nodale dans la formulation intégrale mentionnée dans le paragraphe (1.2) et l'utilisation de méthodes d'intégrations numériques conduisent finalement à transformer les EDP de départ en un système linéaire d'équations de la forme :

$$[K]\{U_{Nd}\} = \{F_{Nd}\}$$

Avec

$[K]$: une matrice complètement connue appelée matrice de rigidité globale du système

$\{F_{Nd}\}$: le vecteur représentant les forces équivalentes appliquées aux nœuds du maillage. Il est connu également sous le nom de vecteur force globale.

$\{U_{Nd}\}$: un vecteur représentant les déplacements aux nœuds du maillage. Il est connu également sous le nom de vecteur déplacement global.

Il est à noter que la grande majorité des composantes de $\{F\}$ sont connues sauf aux zones d'appuis (réactions d'appuis inconnues). Par contre, la grande majorité des composantes de $\{U_{Nd}\}$ sont inconnues sauf en zones d'appuis (déplacements bloqués).

6. Types d'éléments finis

Les types d'éléments se distinguent par leurs formes géométriques et par leurs comportements. Une liste assez complète mais pas exhaustive, des différentes formes d'éléments utilisés en EF sera présentée dans le présent chapitre.

Ils sont subdivisés en trois grandes catégories (figure 01b) :

- 1- Les éléments unidimensionnels 1D qui selon leur degré sont des segments de droite ou de courbe
- 2- Les éléments à deux dimensions 2D qui selon leur degré sont des morceaux de plan ou de surface
- 3- Les éléments à trois dimensions 3D qui selon leur degré sont des morceaux de volume bornés par des faces ou non planes.

Les modèles 1D et 2D sont des modèles simplifiés de modèles 3D qui sont de tailles importantes. Toutefois, cette simplification doit se faire sous condition. Par exemple, les éléments de type « plaque » et « coque » sont géométriquement une portion de surface à laquelle est associé un paramètre d'épaisseur qui est supposée petite devant les autres dimensions. De la même manière, les éléments de type « poutre » et « arc » sont géométriquement une portion de courbe à laquelle est associée une section transversale dont les dimensions sont petites par rapport à la longueur de cette poutre (ou de cet arc). Ces éléments (plaques, coques, poutre et arcs) ne fourniront des résultats précis que si ces hypothèses sont bien vérifiées.

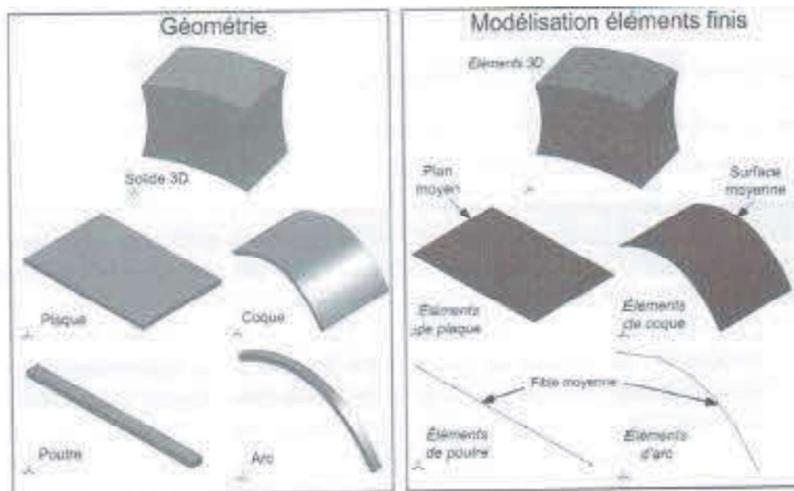


Figure 01b : Différentes catégories de modélisation par EF



Figure 02 : Trois types d'éléments unidimensionnels 1D

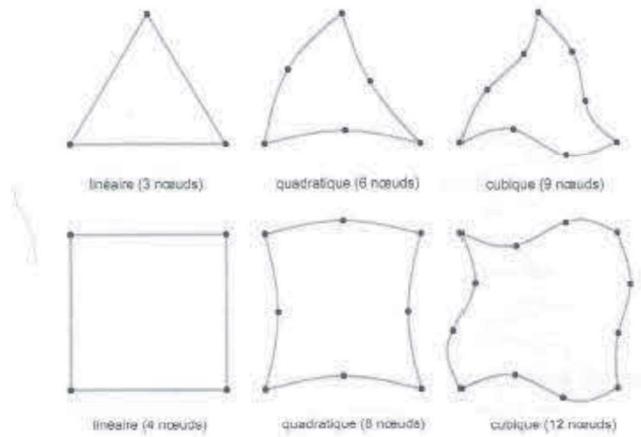


Figure 03 : Types d'éléments finis utilisés en 2D

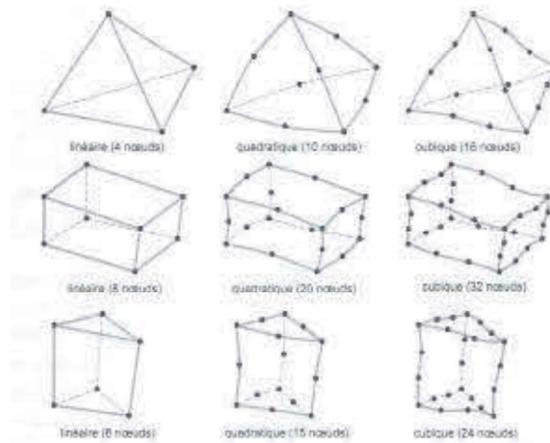


Figure 04 : Types d'éléments finis utilisés en 3D.

7. Règles de maillage

Le domaine Ω peut être maillé avec différents types d'éléments (1D rectiligne ou curviligne, 2D plan ou surfacique et 3D). Toutefois, cette opération de maillage doit respecter un certain nombre de règles concernant la manière dont ces éléments doivent se connecter les uns aux autres. Elles sont comme suit :

- 1- Le maillage doit recouvrir la totalité du domaine Ω
- 2- Deux éléments voisins d'un maillage ne doivent pas se chevaucher (ou se recouvrir totalement ou partiellement) et leur connexion doit se faire sur leur frontière commune. Ils peuvent être connectés par un nœud commun, une arête commune de même degré ou une face commune de même degré (voir les figures 05 à 08)
- 3- Les connexions entre éléments de degrés différents sont proscrites (ou interdites). Pour bien comprendre, il suffit de voir la figure 09 illustrant la connexion entre un élément triangulaire linéaire de type TRI3 avec un élément triangulaire quadratique (de degré 2) de type TRI6 à six nœuds. Cette figure montre qu'il y a soit chevauchement, soit création de vides inadéquats.
- 4- Les nœuds communs peuvent représenter soit la continuité de la matière, soit la liaison mécanique entre les éléments. On peut dans certains cas particuliers avoir des nœuds « doubles » qui ont les mêmes coordonnées (cas du problème de contact par exemple).

Il est à noter qu'un maillage vérifiant toutes ces règles est dit « conforme ».

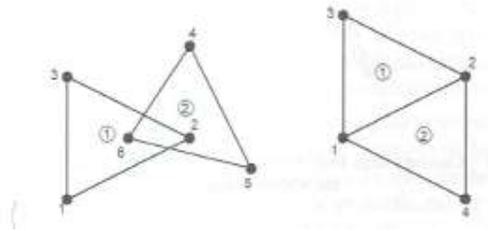


Figure 05 : connexion entre deux éléments triangulaires

Notation : les nœuds sont généralement numérotés sans être encerclés. Par contre, les numéros des éléments sont soit encerclés, soit mis entre parenthèses.

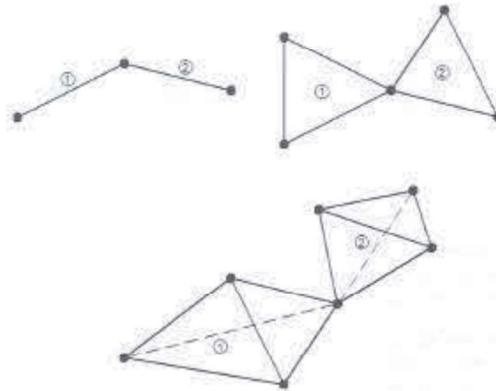


Figure 06 : connexions entre deux éléments par un nœud commun

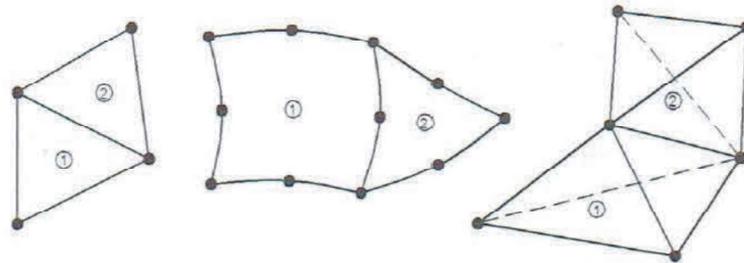


Figure 07 : connexion entre deux éléments par une arête commune de même degré.

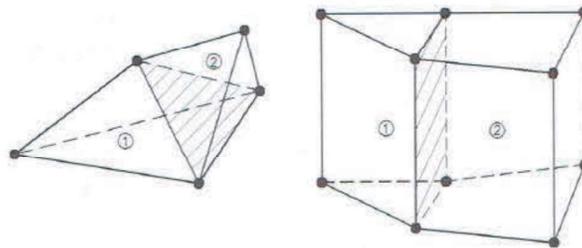


Figure 08 : connexion entre deux éléments par une face commune de même degré

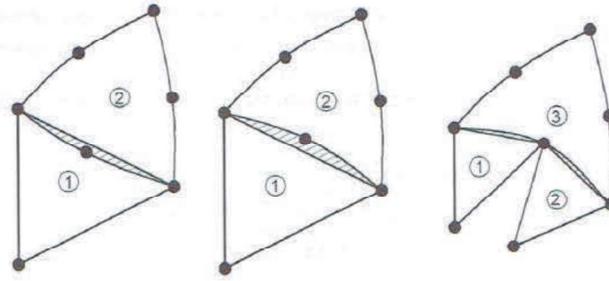


Figure 09 : connexions inadéquates entre éléments de degrés différents.

8. Raffinement de maillages

Le raffinement de maillage consiste à diminuer la taille des éléments. En effet, cette opération est effectuée en augmentant le nombre d'éléments du maillage et donc la taille du modèle ainsi que le temps de calcul. D'autre part, cette diminution de la taille permet d'augmenter la précision des calculs. Cette méthode est connue sous le nom de méthode $-h$. Une autre méthode connue sous le nom de méthode $-p$ consiste à enrichir le degré des fonctions d'interpolation pour augmenter la précision. Autrement dit, il s'agit d'utiliser des éléments de degrés plus élevés. Une autre technique connue sous le nom « d'adaptation de maillage », consiste à utiliser localement la méthode $-h$. Cette solution consiste à raffiner localement le maillage en des zones où les erreurs de discrétisation sont importantes et à déraffiner (c'est-à-dire augmenter localement la taille des éléments) le maillage en des zones où ces erreurs de discrétisation sont faibles.



Figure 10 : Erreurs de discrétisation et raffinement de maillages