
Chapitre III

Les fonctions réelles à une variable réelle

1 Notions de fonction

1.1 Définitions

Définition 1.1 Une *fonction* d'une variable réelle à valeurs réelles est une application $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$.

En général, U est un intervalle ou une réunion d'intervalles. On appelle U le *domaine de définition* de la fonction f .

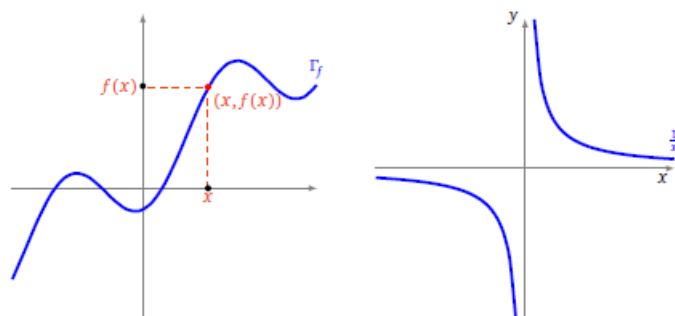
Exemple 1.1 La fonction inverse :

$$\begin{array}{ccc} f :]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

Le *graphe* d'une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par

$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}.$

Le graphe d'une fonction (à gauche), l'exemple du graphe de $x \mapsto \frac{1}{x}$ (à droite).



1.2 Opérations sur les fonctions

Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :

- la **somme** de f et g est la fonction $f + g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in U$;
- le **produit** de f et g est la fonction $f \times g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout $x \in U$;
- la **multiplication par un scalaire** $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda \cdot f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ pour tout $x \in U$.

1.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 1.2 Soient $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors:

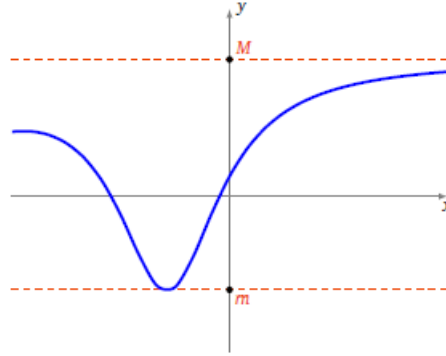
- $f \geq g$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) > 0$;
- f est dite **constante** sur U si $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad f(x) = a$;
- f est dite **nulle** sur U si $\forall x \in U \quad f(x) = 0$.

Définition 1.3 Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est **majorée** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad f(x) \leq M$;

- f est *minorée* sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad f(x) \geq m$;
- f est *bornée* sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U , c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \quad |f(x)| \leq M$.

Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).

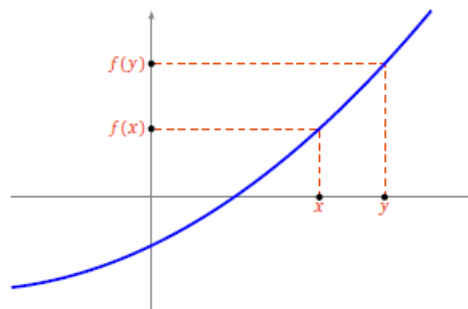


1.4 Fonctions croissantes, décroissantes

Définition 1.4 Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est *croissante* sur U si $\forall a, b \in U \quad a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$
- f est *strictement croissante* sur U si $\forall a, b \in U \quad a < b \implies f(a) < f(b)$
- f est *décroissante* sur U si $\forall a, b \in U \quad a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$
- f est *strictement décroissante* sur U si $\forall a, b \in U \quad a < b \implies f(a) > f(b)$
- f est *monotone* (resp. *strictement monotone*) sur U si f est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur U .

Voici le graphe d'une fonction strictement croissante



Exemple 1.2 • La fonction racine carrée $\begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ est strictement croissante.

- Les fonctions exponentielle $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et logarithme $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sont strictement croissantes.

- La fonction valeur absolue $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$ n'est ni croissante, ni décroissante.

Par contre, la fonction $\begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |x| \end{cases}$ est strictement croissante.

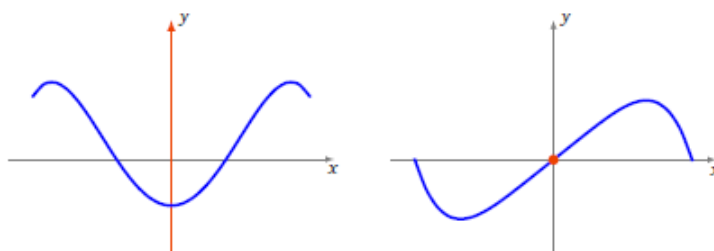
1.5 Parité et périodicité

Définition 1.5 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire de la forme $] -a, a[$ ou $[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

- f est **paire** si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,
- f est **impaire** si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.

Interprétation graphique :

- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).



Exemple 1.3 • La fonction $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est impaire.

Définition 1.6 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est dite *périodique* de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$.

Exemple 1.4 Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques. La fonction tangente est π -périodique.

2 Limites

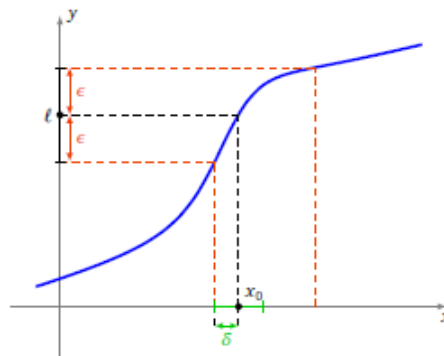
2.1 Limite en un point

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I .

Définition 2.1 Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon}$$

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 . On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim_{x_0} f = \ell$.



Remarque 2.1 • L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

• L'inégalité $|f(x) - \ell| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 2.2 • On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

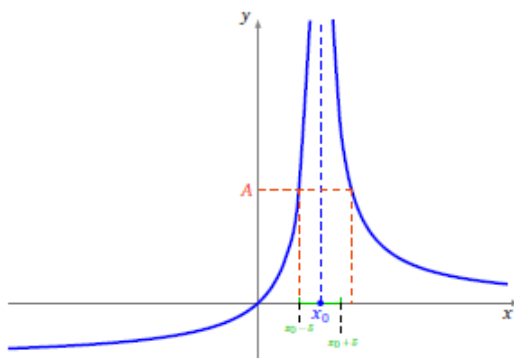
$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

• On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.



2.2 Limite en l'infini

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition 2.3 • Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

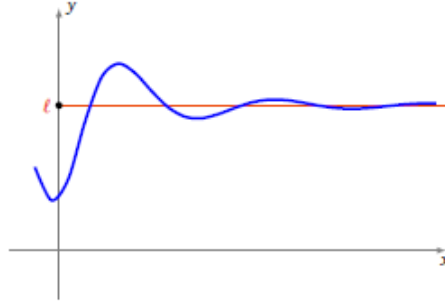
On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

• On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

On définirait de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $] -\infty, a[$.



Exemple 2.1 On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$.

2.2.1 Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 2.4 • On appelle **limite à droite** en x_0 de f la limite de la fonction $f|_{]x_0, b[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x_0^+} f$.

• On définit de même la **limite à gauche** en x_0 de f : la limite de la fonction $f|_{]a, x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x_0^-} f$.

• On note aussi $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ pour la limite à gauche.

Dire que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie donc :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

3 Unicité de la limite

Proposition 3.1 Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Proposition 3.2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$

Exemple 3.1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x \geq 0 \\ 4x + 5 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

On a

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 5$ Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limite en 0.

Soient deux fonctions f et g . On suppose que x_0 est un réel, ou que $x_0 = \pm\infty$

Proposition 3.3 Si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :

- $\lim_{x_0} (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x_0} (f + g) = \ell + \ell'$

- $\lim_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell'$

- si $\ell \neq 0$, alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$

- si h est une fonction bornée et $\lim_{x_0} f = 0$ alors $\lim_{x_0} (h \cdot f) = 0$.

Proposition 3.4 (Composition de limites)

$$\boxed{\text{Si } \lim_{x_0} f = \ell \text{ et } \lim_{\ell} g = \ell', \text{ alors } \lim_{x_0} g \circ f = \ell'.$$

Proposition 3.5 • Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.

- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.

- Théorème des gendarmes

$$\boxed{\text{Si } f \leq g \leq h \text{ et si } \lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x_0} g = \ell.$$

4 Continuité en un point

4.1 Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 4.1 • On dit que f est *continue en un point* $x_0 \in I$ si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

c'est-à-dire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- On dit que f est *continue sur* I si f est continue en tout point de I .

On note $C(I; \mathbb{R})$ ou $C^0(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.2 • On dit que f est *continue à droite en point* $x_0 \in I$ si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

- On dit que f est *continue à gauche en point* $x_0 \in I$ si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$$

c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Exemple 4.1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 4x + 5 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

On a

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 = f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 9 \neq f(1)$ Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limite en 1.

f est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1.

donc f n'est pas continue en 1

Exemple 4.2 Les fonctions suivantes sont continues :

- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$,
- les fonctions $\sin$ et $\cos$ sur $\mathbb{R}$,
- la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$,
- la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$,
- la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

Proposition 4.1 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en un point $x_0 \in I$. Alors

- $\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),
- $f + g$ est continue en x_0 ,
- $f \times g$ est continue en x_0 ,
- si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 .

Proposition 4.2 Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

4.2 Prolongement par continuité

Définition 4.3 Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si f admet une limite finie en x_0 .
Notons alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.
- On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le **prolongement par continuité** de f en x_0 .

Exemple 4.3 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

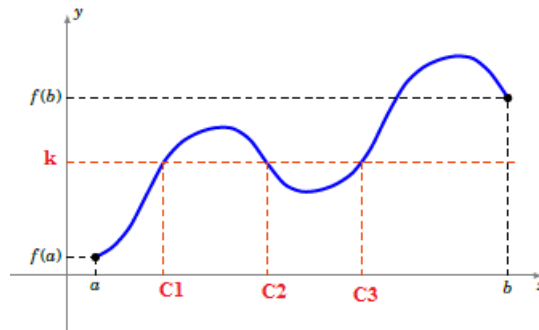
Le prolongement $\tilde{f}$ de f définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

4.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.1 Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.



Voici la version la plus utilisée du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 4.2 Soit f une fonction continue sur intervalle $[a, b]$.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

5 Fonctions monotones et bijections

5.1 Rappels : injection, surjection, bijection

Définition 5.1 Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

- f est *injective* si $\forall x, x' \in E \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$;
- f est *surjective* si $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$;
- f est *bijjective* si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F \quad \exists$ unique $x \in E \quad y = f(x)$.

Proposition 5.1 Si $f : E \rightarrow F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. La fonction g est la *bijection réciproque* de f et se note f^{-1} .

5.2 Fonctions monotones et bijections

Lemme 5.1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone sur I , alors f est injective sur I .

Preuve 5.1 Soient $x, x' \in I$ tels que $f(x) = f(x')$. Montrons que $x = x'$.

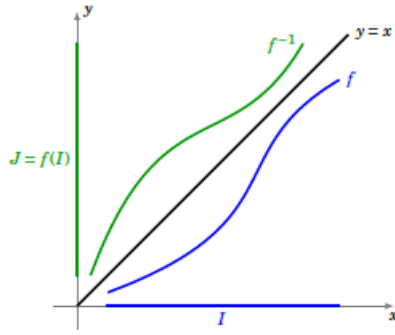
par la contraposition $x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$

Si on avait $x < x'$, alors on aurait nécessairement $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$, suivant que f est strictement croissante, ou strictement décroissante.

Voici un théorème très utilisé dans la pratique pour montrer qu'une fonction est bijective.

Théorème 5.1 (Théorème de la bijection) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I , alors

1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f .
3. les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$.



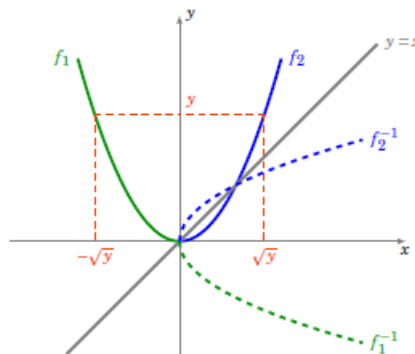
Exemple 5.1

$$f_1 : \begin{cases}]-\infty, 0] \longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{cases} [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[\\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$$

On remarque que $f_1(]-\infty, 0]) = f_2([0, +\infty[) = [0, +\infty[$. D'après le théorème précédent, les fonctions f_1 et f_2 sont des bijections. Déterminons leurs fonctions réciproques $f_1^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, 0]$ et $f_2^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$. Soient deux réels x et y tels que $y \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = x^2 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{y} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{y}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire y admet (au plus) deux antécédents, l'un dans $[0, +\infty[$ et l'autre dans $]-\infty, 0]$. Et donc $f_1^{-1}(y) = -\sqrt{y}$ et $f_2^{-1}(y) = \sqrt{y}$. On vérifie bien que chacune des deux fonctions f_1 et f_2 a le même sens de variation que sa réciproque.



6 Dérivée

6.1 Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

Définition 6.1 f est *dérivable en x_0* si le *taux d'accroissement* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0 .

La limite s'appelle alors le *nombre dérivé* de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque 6.1 Autre écriture de la dérivée.

- f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.

Définition 6.2 f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la *fonction dérivée* de f , elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Exemple 6.1 La fonction définie par $f(x) = x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$, autrement dit : $f'(x) = 2x$.

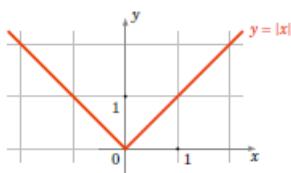
Définition 6.3 • f est dérivable à *droite* en x_0 , si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0)$

- f est dérivable à *gauche* en x_0 , si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0)$
- f est dérivable en $x_0 \iff f$ est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

Proposition 6.1 Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Remarque 6.2 La réciproque est *fausse* : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



En effet, le taux d'accroissement de $f(x) = |x|$ en $x_0 = 0$ vérifie :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Il y a bien une limite à droite ($f'_d(0) = +1$), une limite à gauche ($f'_g(0) = -1$) mais elles ne sont pas égales : il n'y a pas de limite en 0. Ainsi f n'est pas dérivable en $x = 0$.

Cela se lit aussi sur le dessin, il y a une demi-tangente à droite, une demi-tangente à gauche, mais elles ont des directions différentes.

Proposition 6.2 Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Alors pour tout $x \in I$

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Remarque 6.3 Il est plus facile de mémoriser les égalités de fonctions :

$$(f + g)' = f' + g' \quad (\lambda f)' = \lambda f' \quad (f \times g)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Preuve 6.1 *Prouvons par exemple $(f \times g)' = f'g + fg'$.*

Fixons $x_0 \in I$. Nous allons réécrire le taux d'accroissement de $f(x) \times g(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0). \end{aligned}$$

6.2 Dérivée de fonctions usuelles

u représente une fonction $x \mapsto u(x)$.

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u' e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

6.3 Composition

Proposition 6.3 *Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 de dérivée :*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Preuve 6.2

$$\begin{aligned} \frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} g'(f(x_0)) \times f'(x_0). \end{aligned}$$

Exemple 6.2 Calculons la dérivée de $\ln(1+x^2)$. Nous avons $g(x) = \ln(x)$ avec $g'(x) = \frac{1}{x}$; et $f(x) = 1+x^2$ avec $f'(x) = 2x$. Alors la dérivée de $\ln(1+x^2) = g \circ f(x)$ est

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(1+x^2) \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

6.4 Dérivées successives

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée.

Si la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la **dérivée seconde** de f .

Plus généralement on note :

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Si la **dérivée n -ième** $f^{(n)}$ existe on dit que f est **n fois dérivable**.

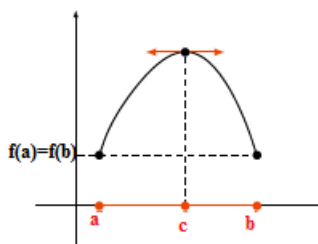
Si f est **n fois dérivable** sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I on dit que f est classe $C^n(I, \mathbb{R})$.

6.5 Théorème de Rolle

Théorème 6.1 (Théorème de Rolle) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

6.6 Théorème des accroissements finis

Théorème 6.2 (Théorème des accroissements finis) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$

Preuve 6.3 Posons $\ell = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $g(x) = f(x) - \ell \cdot (x - a)$.

Alors $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b - a) = f(a)$.

Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or $g'(x) = f'(x) - \ell$. Ce qui donne $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

6.7 Fonction croissante et dérivée

Corollaire 6.1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est croissante ;}$
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est décroissante ;}$
3. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est constante ;}$
4. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est strictement croissante ;}$
5. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ est strictement décroissante.}$

Remarque 6.4 La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse.

Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Corollaire 6.2 (Règle de l'Hospital) Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$.

On suppose que

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, (\text{ou } \infty)$

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\ell \in \mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Exemple 6.3 Calculer la limite en 1 de $\frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. On vérifie que :

- $f(x) = \ln(x^2 + x - 1)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-1}$,
- $g(x) = \ln(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x-1} \times x = \frac{2x^2+x}{x^2+x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3.$$

Donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 3.$$