Chapitre I:
Introduction aux équations de Lagrange

I- Introduction aux équations de Lagrange

I-1- Introduction

Une vibration est un mouvement autour de la position d'équilibre. Elle est caractérisée par une équation de mouvement de type d'équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A(t) \qquad \text{(I-1)}$$

avec :

y : Le déplacement (m)

$\dot{y}$: La vitesse (m/s)

$\ddot{y}$: L'accélération (m/s^2)

δ : Le coefficient d'amortissement

ω_0 : La pulsation libre (rad/s)

A(t) : Le second membre.

La méthode de résolution de l'équation différentielle (I-1) est schématisée sur l'organigramme de la figure I-1. Pour résoudre une équation du second ordre avec second membre, on suit la méthode suivante :

Premièrement on cherche la solution homogène $y_H(t)$ lorsque le second membre A(t)=0. Pour cela, on considère que la solution a une forme exponentielle $y(t) = e^{st}$. L'équation différentielle homogène est transformée en une équation caractéristique de deuxième degré d'une variable s qui nous permettra de déterminer les solutions s_1, s_2 par le calcul du discriminant$\Delta = b^2 - 4ac$. Il existe trois solutions homogènes selon les cas de Δ illustré sur l'organigramme. Deuxièmement, on cherche la solution particulière $y_p(t)$ lorsque le second membre $A(t) \neq 0$. Dans l'organigramme, on constate deux cas d'excitations :

- Une excitation constante
- Une excitation sinusoïdale.

La solution particulière $y_p(t)$ est déterminée selon la règle suivante :

« **La solution particulière suit la forme générale du second membre de l'équation différentielle** ».

Enfin, la solution générale de l'équation différentielle du second ordre avec second membre est donnée par la somme des deux solutions homogène et particulière.

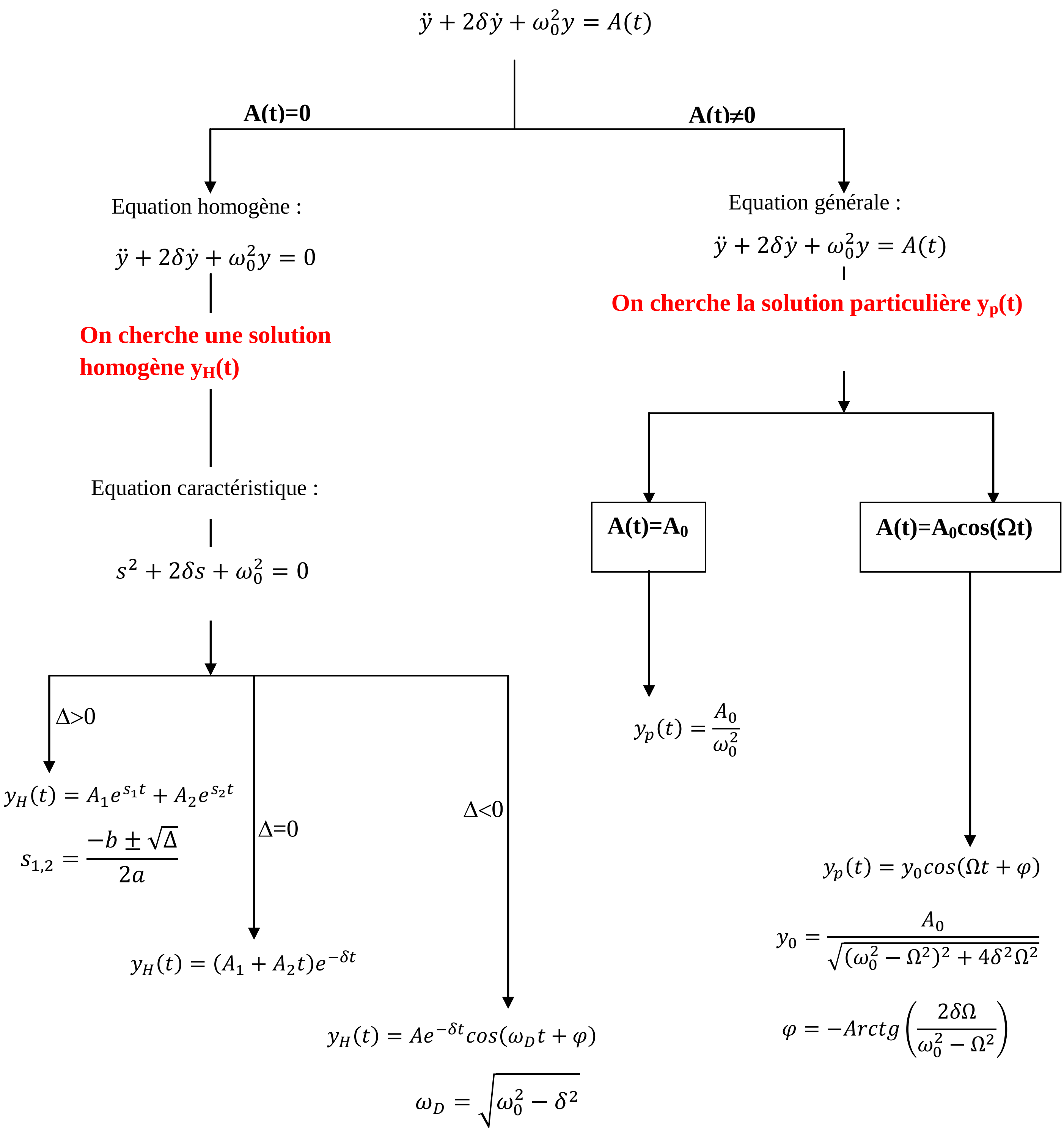

Fig. I-1. Organigramme de la solution d'une équation différentielle du second ordre

I-2- Caractéristiques d'une oscillation sinusoïdale harmonique

Une vibration est sinusoïdale lorsqu'une masse attachée au bout d'un ressort est écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée. Une vibration est périodique lorsque les mouvements se reproduisent globalement identiques à eux-mêmes à des périodes de temps mesurables. Elle est de la forme :

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{(I-2)}$$

ou bien :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{(I-3)}$$

avec :

φ est le déphasage par rapport à l'origine des temps.

A est l'amplitude maximale du signal (m).

L'amplitude d'une fonction sinusoïdale est une mesure de sa hauteur par rapport à sa médiane.

ω_0 est la pulsation libre (rad/s)

La pulsation est une grandeur proportionnelle à la fréquence d'un phénomène périodique.

$$\omega = 2\pi f \quad \text{(I-4)}$$

f est la fréquence (Hz)

La fréquence est le nombre de cycles par seconde, et qui est l'inverse de la période T.

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{(I-5)}$$

T est la période (s)

La période est le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de la masse en mouvement au même endroit comme le montre la figure I-2.

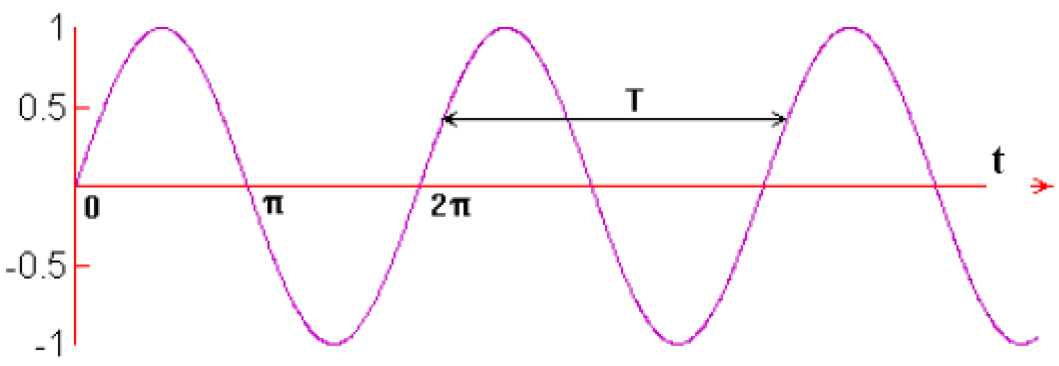

Fig. I-2. Définition de la période T

I-3- Equation de Lagrange pour une particule

L'équation de Lagrange est donnée par la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=F_{ext,q} \tag{I-6}$$

avec :

L est le lagrangien définit par :

$$L=E_c-E_p=T-U \tag{I-7}$$

avec :

E_c, T est l'énergie cinétique du système.

E_p, U est l'énergie potentielle du système.

q est la coordonnée généralisée qui caractérise le mouvement vibratoire.

$F_{ext,q}$: Les forces extérieures généralisées.

Le degré de liberté est égal au nombre de coordonnées (N) moins (-) le nombre de liaisons (R).

$$d=N-R \tag{I-8}$$

Pour un système **conservatif**, la force appliquée dérive d'un potentiel et l'équation (I-6) s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \tag{I-9}$$

Dans le cas d'une force de frottement dépendant de la vitesse ($\vec{f}=-\alpha\vec{v}$), l'équation (I-6) devienne :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=-\alpha\dot{q} \tag{I-10}$$

L'équation (I-10) se généralise à l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=0 \tag{I-11}$$

D est la fonction de dissipation donnée par : $D = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$. Elle est liée à la force de frottement par : $f_q = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$.

Dans le cas d'une force extérieure dépendant du temps, l'équation (I-11) s'écrit comme :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q} \quad \text{(I-12)}$$

Et pour un système à plusieurs degrés de liberté,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{ext,q_i} \quad \text{(I-13)}$$

i=1,2,……,n

I-4-Exercices corrigés

Exercice N°1

Résoudre les équations différentielles pour les conditions initiales suivantes : $y(0) = 0\ et\ \dot{y}(0) = 0$

a- $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 4$
b- $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2cos(5t)$
c- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 2$
d- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 3cos(3t)$
e- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 6$
f- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 2cos(2t)$

Solution N°1

a- $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 4$

Pour résoudre l'équation (a), en premier temps on cherche la solution homogène lorsque A(t)=0. L'équation (a) devienne :$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0$

On transforme l'équation différentielle à une équation d'une variable de second ordre. On pose la solution$y(t) = e^{st}$. L'équation différentielle homogène devienne :

$$s^2 + 3s + 2 = 0 \quad \text{(a-1)}$$

On calcul le déterminant Δ=9-8=1>0. L'équation (a-1) admet deux solutions différentes données par :

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

En remplaçant les constantes, on trouve les deux solutions : s_1=-1 et s_2=-2.

D'après l'organigramme, la solution homogène est donnée par :

$$y_H(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$$

On cherche la solution particulière lorsque : A(t)≠0. La solution particulière suit toujours la forme du second membre.

$$y_p(t) = \frac{A_0}{\omega_0^2} = \frac{4}{2} \Rightarrow y_p(t) = 2$$

Et la solution générale :$y(t) = 2 + A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t}$

Pour déterminer les constantes d'intégration A_1 et A_2, on utilise les conditions initiales :

$$y(0) = 0 \Rightarrow 2 + A_1 + A_2 = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow 2 - A_1 - 2A_2 = 0$$

On résoudre le système d'équation, et on obtient : A_1=-6 et A_2=4. Et finalement la solution générale de l'équation (a) est :

$$y(t) = 2 - 6e^{-t} + 4e^{-2t}$$

b- $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 2cos(5t)$

La solution homogène de l'équation (b) est la même que l'équation (a). Et la solution particulière est égale à :

$$y_p(t) = y_0 cos(\Omega t + \varphi)$$

Avec :

$$y_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = 0.07$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = 35.54° = 0.2\pi$$

Et la solution générale :

$$y(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t} + 0.07\cos(5t + 0.2\pi)$$

On introduit les conditions initiales pour trouver les constantes d'intégration :

$$y(0) = 0 \Rightarrow 0.0566 + A_1 + A_2 = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -0.2 - A_1 - 2A_2 = 0$$

On résoudre le système d'équation, et on obtient : A_1=0.0868 et A_2=-0.1434. Et finalement la solution générale de l'équation (a) est :

$$y(t) = 0.07cos(5t + 0.2\pi) + 0.0868e^{-t} - 0.1434e^{-2t}$$

c- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 2$

L'équation homogène est :$\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0$

L'équation d'une variable de second ordre est :

$$s^2 + 4s + 5 = 0 \qquad \text{(c-1)}$$

On calcul le déterminant Δ=16-25=-9<0.

D'après l'organigramme, la solution homogène est donnée par :

$$y_H(t) = Ae^{-2t}cos(\omega_D t + \varphi)$$

Avec :

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 1$$

La solution particulière de l'équation (c) est donnée par :

$$y_p(t) = \frac{2}{5}$$

Et la solution générale :$y(t) = \frac{2}{5} + Ae^{-2t}cos(t + \varphi)$

Pour déterminer les constantes d'intégration A et φ, on utilise les conditions initiales :

$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{2}{5} + Acos(\varphi) = 0$

$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -2Acos(\varphi) - Asin(\varphi) = 0$

On déduit A de la première relation et on la remplace dans la deuxième équation, on aboutit :

$A = 0.88$

$\varphi = -63.4° = -0.35\pi$

Et la solution générale est égale à :

$y(t) = \frac{2}{5} + 0.88e^{-2t}cos(t - 0.35\pi)$

d- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 3cos(3t)$

La solution homogène de l'équation (d) est la même que l'équation (c). Et la solution particulière est égale à :

$y_p(t) = y_0 cos(3t + \varphi_1)$

Avec :

$$y_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = 0.237$$

$$\varphi_1 = -arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = 71.565° = 0.4\pi$$

Et la solution générale :

$y(t) = Ae^{-2t}cos(t + \varphi_2) + 0.237\cos(3t + 0.4\pi)$

On introduit les conditions initiales pour trouver les constantes d'intégration :

$y(0) = 0 \Rightarrow Acos(\varphi_2) + 0.07 = 0$

$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -2Acos(\varphi_2) - Asin(\varphi_2) - 0.676 = 0$

On résoudre le système d'équation, et on obtient : A=-0.56 et φ_2=0.46π. Et finalement la solution générale de l'équation (d) est :

$y(t) = 0.237cos(3t + 0.4\pi) - 0.56cos(t + 0.46\pi)$

e- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 6$

L'équation homogène est :$\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0$

L'équation d'une variable de second ordre est :

$$s^2 + 4s + 4 = 0 \tag{e-1}$$

On calcul le déterminant Δ=16-16=0.

L'équation admet une solution double égale :

$$s_{1,2} = \frac{-b}{2a} = -2$$

D'après l'organigramme, la solution homogène est donnée par :

$$y_H(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$$

La solution particulière de l'équation (e) est donnée par :

$$y_p(t) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Et la solution générale :$y(t) = \frac{3}{2} + (A_1 + A_2 t)e^{-2t}$

Pour déterminer les constantes d'intégration A_1 et A_2, on utilise les conditions initiales :

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} + A_1 = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -2A_1 + A_2 = 0$$

On déduit A_1=-3/2 et A_2=3. Et la solution générale est égale à :

$$y(t) = \frac{3}{2} + \left(-\frac{3}{2} + 3t\right)e^{-2t}$$

f- $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 2cos(2t)$

La solution homogène de l'équation (f) est la même que l'équation (e). Et la solution particulière est égale à :

$$y_p(t) = y_0 cos(2t + \varphi)$$

Avec :

$$y_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = 0.25$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = 90° = \frac{3}{2}\pi$$

Et la solution générale :

$$y(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-2t} + 0.25\cos(2t + \frac{3}{2}\pi)$$

On introduit les conditions initiales pour trouver les constantes d'intégration :

$$y(0) = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow -2A_1 + A_2 + 0.5 = 0$$

On résoudre le système d'équation, et on obtient : A_1=0 et A_2=-0.5. Et finalement la solution générale de l'équation (f) est :

$$y(t) = -0.5te^{-2t} + 0.25cos\left(2t + \frac{3}{2}\pi\right)$$

Exercice N°2

Un mouvement vibratoire est caractérisé par le déplacement suivant :

$$x(t) = 5cos\left(25t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Ou *x* en centimètres, t en secondes et la phase en radians.

1- Déterminer l'amplitude maximale.

2- Donner la pulsation propre, la fréquence et la période du mouvement.

3- Exprimer la phase initiale (déphasage à l'origine).

4- Calculer le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants t=0s et t=0.5s.

Solution N°2

1- L'amplitude maximale est **5 cm**.

2- La pulsation propre est ω_0 **= 25 rad.s^{-1}**, la fréquence f = **3.98 Hz** et la période propre T_0 = **0.25 s.**

3- La phase initiale φ = **π/3 rad.**

4- Le déplacement, la vitesse et l'accélération à t=0 s:

$$x(0) = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.5\ m$$

$$\dot{x}(0) = -125\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -108.25\ m/s$$

$$\ddot{x}(0) = -3125\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1562.5\ m/s^2$$

A t=0.5 s,

$$x(0.5) = 5\cos\left(12.5 + \frac{\pi}{3}\right) = 1.5\ m$$

$$\dot{x}(0.5) = -125\sin\left(12.5 + \frac{\pi}{3}\right) = -119.2\ m/s$$

$$\ddot{x}(0.5) = -3125\cos\left(12.5 + \frac{\pi}{3}\right) = -939.7\ m/s^2$$

Exercice N°3

Un mouvement harmonique est décrit par :

$$x(t) = Xcos(\omega_0 t + \varphi)$$

Les conditions initiales sont : $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$,

1. Calculer X et φ.
2. Exprimer $x(t)$ sous la forme $x(t)=Bcos(\omega_0 t)+Csin(\omega_0 t)$ et en déduire B et C

Solution N°3

1- L'amplitude maximale X et le déphasage à l'origine

$$\begin{cases} x(t) = Xcos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}_0(t) = -Xw_0\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

En utilisant les conditions initiales, on trouve :

$$\begin{cases} x(0) = Xcos(\varphi) = x_0 \\ \dot{x}_0(0) = -X\omega_0\sin(\varphi) = \dot{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\varphi) = \frac{x_0}{X} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1) \\ \sin(\varphi) = -\frac{\dot{x}_0}{X\omega_0} \dots\dots\dots\dots\dots\dots . (2) \end{cases}$$

Pour obtenir l'amplitude maximale on fait la somme du carré de deux équations (1) et (2),

$(1)^2+(2)^2 \Rightarrow X = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}}$

Et pour le déphasage, on divise l'équation (2) par l'équation (1),

$$tan\varphi = \frac{sin\varphi}{cos\varphi} = -\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_0} \Rightarrow \varphi = -Arc\tan(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_0})$$

2- Pour exprimer *x(t)* sous la forme $x(t)=Bcos(\omega_0 t)+Csin(\omega_0 t)$, on utilise la formule trigonométrique suivante :

$$\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$x(t) = Xcos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(t) = Xcos(\omega_0 t)cos\varphi - Xsin(\omega_0 t)sin\varphi$$

$$x(t) = Bcos(\omega_0 t) + Csin(\omega_0 t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Par analogie entre l'équation (3) et (4), on peut tirer :

$$\begin{cases} B = Xcos\varphi \\ C = -Xsin\varphi \end{cases}$$

Exercice N°4

1- Quel est le nombre de degré de liberté du point matériel dans chaque système (*Fig.I-3*).

2- Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour définir le mouvement de ce point.

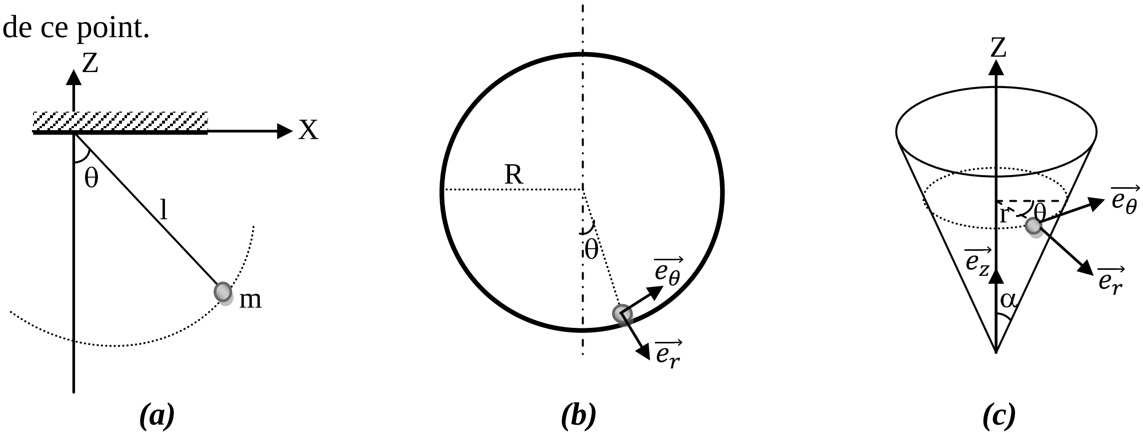

Fig.I-3. Différents systèmes :

(a)- un pendule simple, (b)- un cercle, (c)- un cône

Solution N°4

Le système (a) :

1- Le point m est défini par :

$$\begin{cases} x = lsin\theta \\ z = lcos\theta \end{cases} \Rightarrow \text{N=2}$$

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$$x^2 + z^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{x^2+z^2} = C^{te} \quad \Rightarrow \text{R=1}$$

Et le nombre de degré de liberté est : d=2-1=**1**

2- La coordonnée généralisée qui définie le système est : θ

Le système (b) :

1- Le point M est défini par : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$

$\overrightarrow{e_r} = Rcos\theta\overrightarrow{e_x} - Rsin\theta\overrightarrow{e_y}$

$\overrightarrow{e_\theta} = Rsin\theta\overrightarrow{e_x} + Rcos\theta\overrightarrow{e_y}$

Et par conséquent :

$\begin{cases} x = rsin\theta \\ y = rcos\theta \end{cases} \Rightarrow$ N=2

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$x^2 + z^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} = C^{te} \quad \Rightarrow$ R=1

Et le nombre de degré de liberté est : d=2-1=**1**

Le système (c) :

1- Le point M est défini par :

$\begin{cases} x = rsin\theta \\ y = rcos\theta \end{cases} \Rightarrow$ N=2

Le nombre de liaisons entre les coordonnées :

$x^2 + z^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} = C^{te} \quad \Rightarrow$ R=1

Et le nombre de degré de liberté est : d=2-1=**1**

Exercice N°5

Soit le système mécanique de la figure I-4, constitué d'une masse m et un ressort de raideur équivalente k. Trouver l'équation différentielle du mouvement par la méthode de Newton et la méthode de Lagrange.

Solution N°5

a- Méthode de Newton

à l'équilibre : $\sum\vec{F} = \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

$\vec{T}$: la force de rappel du ressort

$\vec{P}$: le poids de la masse m

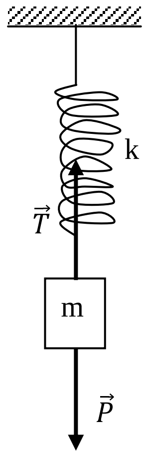

Fig.I-4. Système masse ressort

$mg - k.x_0 = 0$ C'est la condition d'équilibre

Au mouvement : $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$

$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} = mg - k(x + x_0)$

En appliquant la condition d'équilibre, l'équation devienne :

$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Avec : ω_0 est la pulsation libre est égale : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

b- Méthode de Lagrange

L'équation de Lagrange est :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

Le lagrangien est donné par : $L = E_c - E_p$

$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$E_p = \frac{1}{2}kx^2$

Et

$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$

En utilisant l'équation de Lagrange :

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$

L'équation différentielle de mouvement est comme suit :

$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Exercice N°6

Déterminer l'équation de mouvement d'un pendule simple de la Figure I-5, constitué d'une masse m et fils de longueur *l* de masse négligeable pour des faibles oscillations par la méthode de Newton puis par la méthode de Lagrange.

Solution N°6

a- Méthode de Newton

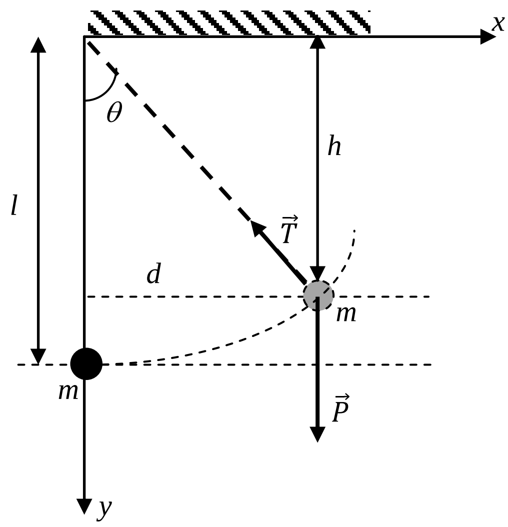

Fig.I-5. Pendule simple

D'après 2[ième] loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{M_O} = I\frac{d\dot{\vec{\theta}}}{dt}$$

$$\overrightarrow{M_{\vec{T}/O}} + \overrightarrow{M_{\vec{P}/O}} = I\ddot{\vec{\theta}}$$

Le moment de la tension est nul et le moment du poids est donné par :

$$-mgd = I\ddot{\theta}$$

Avec $I=ml^2$ est le moment d'inertie du pendule.

Et $d=l\sin\theta$

L'équation devienne :

$$-mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta} \quad \text{…………………………………………………………………..…(I-8)}$$

Pour les faibles oscillations : $\sin\theta \approx \theta$ l'équation (I-8) devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Avec : w_0 est la pulsation libre est égale : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

b- Méthode de Lagrange

L'équation de Lagrange caractérisant le système est donnée par :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ ou $L=E_c\text{-}E_p$

$E_c = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2$ et $E_p = -mgh = -mgl\cos\theta$

Pour les faibles oscillations $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta = 1-\theta^2/2$

L'énergie potentielle s'écrit :

$E_p = -mgl + \frac{mgl}{2}\theta^2$

Et le Lagrangien :

$L = \frac{1}{2} ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mgl\theta^2 + mgl$

Appliquant l'équation de Lagrange :

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\theta$

En remplaçant dans l'équation de Lagrange :

$ml^2\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Et la pulsation libre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Exercice N°7

Soit le circuit électrique de la figure I-6 constitué d'une bobine et d'un condensateur. Trouver l'équation différentielle du mouvement du circuit.

Solution N°7

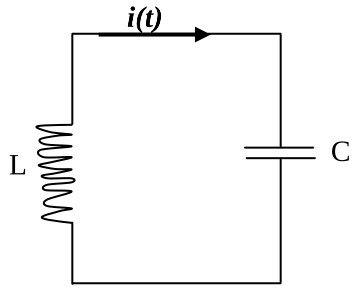

Fig.I-6. Circuit LC

a- D'après la loi de Kirchhoff

$V_c + V_L = 0 \quad \Rightarrow L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q}{c} = 0$

Comme $i(t) = \frac{dq}{dt}$, l'équation différentielle de mouvement s'écrit :

$$L\ddot{q} + \frac{q}{c} = 0 \quad \Rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

La pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}}$

b- Méthode de Lagrange

$$E_c = E_{mag} = V_L dq = \int L\frac{di}{dt}dq = \int Lidi = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$$

$$E_p = E_{elec} = V_c dq = \int \frac{q}{c}dq = \frac{1}{c}q^2$$

Le Lagrangien : $L = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{q}q^2$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L\dot{q} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = L\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{1}{c}q$$

L'équation différentielle de mouvement :

$$L\ddot{q} + \frac{q}{c} = 0 \Rightarrow \ddot{q} + \frac{1}{Lc}q = 0$$

Et la pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{Lc}}$

I-5- Exercices non corrigés

Exercice N°1

Pour repérer la position d'un solide dans l'espace, il faut repérer la position de trois points non alignés A, B et C de ce solide.

1) Traduire les liaisons physiques par des relations mathématiques; quel est le nombre de degrés de liberté de ce solide?

2) Quelles sont les coordonnées généralisées les plus couramment utilisées pour décrire le mouvement d'un solide?

3) Quel est le nombre de degrés de liberté pour un solide qui possède : a) un point fixe? b) deux points fixes?

Exercice N°2

On considère un haltère constituée de deux masses identiques m, supposées ponctuelles, reliées par une tige de longueur a, de diamètre et de masse négligeables.

1) Comment s'écrit mathématiquement la liaison entre les deux masses?

2) Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système?

Exercice N°3

Calculer la fréquence des oscillations pour chacun des systèmes de la figure I-7.

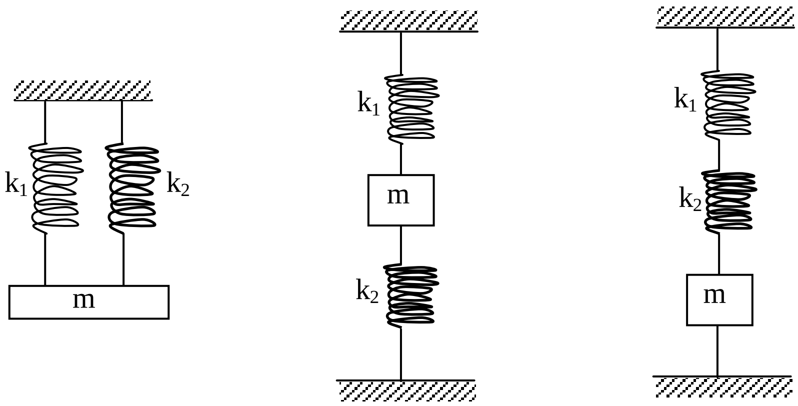

Fig.I-7. Différents systèmes masse ressort

Exercice N°4 :

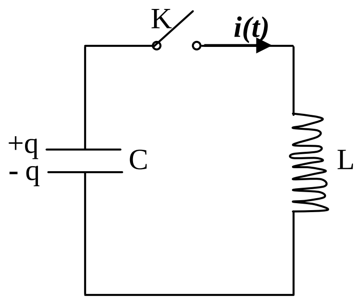

Fig.I-8. Circuit LC

La figure I-8 illustre un circuit électrique constitué d'une self L (de résistance supposée négligeable) et d'un condensateur de capacité C. La capacité possède une charge Q.

A l'instant initial, l'interrupteur K est fermé puis le système oscille librement (voir figure).

1) Ecrire l'équation qui régit les variations de la charge q du condensateur au cours du temps.

2) Résoudre cette équation et déterminer la période de cet oscillateur.

Effectuer l'application numérique pour L=0.5H, C=0.5µF.et Q=0.5µC.

3) Calculer l'énergie du condensateur, celle de la self et l'énergie totale du circuit. Que remarque-t-on ?

4) Faire l'analogie avec une masse m accrochée à un ressort.