

Chapitre II:

Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

II- Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

II-1- Oscillateur linéaire

Le mouvement vibratoire est dit linéaire s'il est régi par une équation différentielle harmonique de la forme :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (\text{II-1})$$

II-2- Conditions d'équilibre

Les deux conditions qui définissent le mouvement vibratoire sont :

La condition d'équilibre :

$$\left. \frac{\partial E_p}{\partial q} \right]_{q=0} = 0 \quad (\text{II-2})$$

Et la condition de stabilité est donnée par :

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2} \right]_{q=0} > 0 \quad (\text{II-3})$$

La figure II-1 illustre la variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de déplacement x . Dans un mouvement vibratoire, l'énergie totale est constante. L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle. Quand l'énergie cinétique diminue, l'énergie potentielle augmente et vis versa. Cette propriété est appelée conservation de l'énergie totale du système.

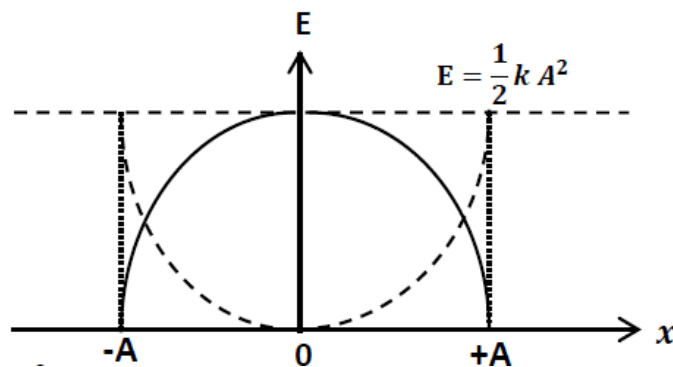


Fig. II-1. Variation des énergies cinétique, potentielle et totale en fonction de x

II-3- Equation différentielle

L'équation de Lagrange pour les oscillations libres d'un système conservatif est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (\text{II-4})$$

La solution de l'équation (II-1) est donnée par :

$$q(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (\text{II-5})$$

Pour calculer les constantes A et φ , il nous faut les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 \\ \dot{q}(t=0) = \dot{q}_0 \end{cases} \quad (\text{II-6})$$

En remplaçant l'équation (II-5) et sa dérivée dans l'équation (II-6), on aboutit :

$$\begin{cases} A \cos \varphi = q_0 \\ -A \omega_0 \sin \varphi = \dot{q}_0 \end{cases} \quad (\text{II-7})$$

Pour calculer la constante A, on met les équations (II-7) au carré puis on les additionne terme par terme, on aboutit :

$$1 = \left(\frac{q_0}{A} \right)^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{A \omega_0} \right)^2 \Rightarrow A^2 \omega_0^2 = q_0^2 \omega_0^2 + \dot{q}_0^2$$

Et enfin,

$$A = \sqrt{\frac{q_0^2 \omega_0^2 + \dot{q}_0^2}{\omega_0^2}} \quad (\text{II-8})$$

Et le déphasage,

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\dot{q}_0}{q_0 \omega_0} \Rightarrow \varphi = -\operatorname{Arctg} \left(\frac{\dot{q}_0}{q_0 \omega_0} \right) \quad (\text{II-9})$$

II-4- Oscillations libres amorties à un degré de liberté

Dans les oscillations amorties, les forces de frottement sont prises en considération. Les frottements sont visqueux et dépendent de la vitesse.

II-4-1- Equation de Lagrange

L'équation de Lagrange des oscillations amorties est citée ci-dessus dans l'équation (I-10) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (\text{II-10})$$

On définit la fonction de dissipation par :

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2 \Rightarrow \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \alpha \dot{q} \quad (\text{II-11})$$

La forme de l'équation différentielle est :

$$\ddot{q} + 2\delta \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (\text{II-12})$$

Avec :

δ est le coefficient d'amortissement.

ω_0 est la pulsation libre.

II-4-2- Résolution de l'équation différentielle

La solution de l'équation différentielle (II-12) dépend de la valeur de δ par rapport à ω_0 . On distingue trois régimes : le régime apériodique, le régime critique et le régime pseudo périodique.

Le régime est apériodique (fortement amorti) si $\delta > \omega_0$, et la solution est de la forme :

$$q(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (\text{II-13})$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure II-2 représente la solution $q(t)$ en fonction du temps dans le cas particulier où $q(0)=q_0$ et $\dot{q}(0)=0$. La solution $q(t)$ varie exponentiellement vers zéro.

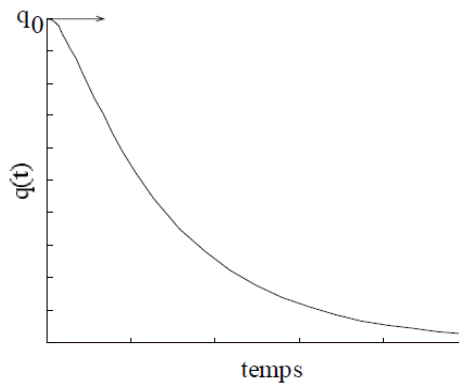


Fig. II-2. Variation de $q(t)$ en fonction du temps pour le régime fortement amorti (sur amorti)

Si $\delta = \omega_0$ le régime est critique (Figure II-3), et la solution est de la forme :

$$q(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t} \quad (\text{II-15})$$

A_1 et A_2 sont des constantes d'intégration calculées à partir des conditions initiales. La figure II-3 montre la variation de la solution $q(t)$ en fonction du temps. $q(t)$ est une fonction qui tend vers zéro sans oscillation lorsque le temps augmente.

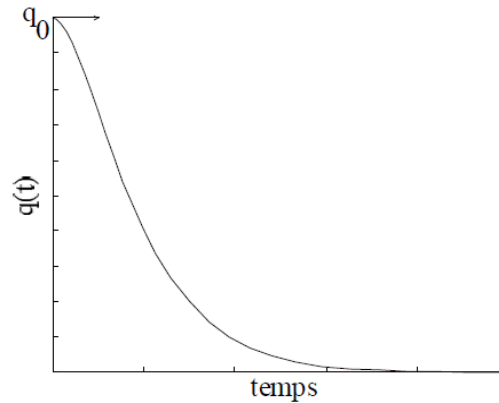


Fig. II-3. Variation de $q(t)$ en fonction du temps pour le régime critique

Si $\delta < \omega_0$ le régime est pseudopériodique (Figure II-4), et la solution est de la forme :

$$q(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi) \quad (\text{II-14})$$

A , φ sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. ω_D est la pseudo pulsation définie par : $\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

La figure II-4 illustre la variation de $q(t)$ en fonction du temps. On remarque que $q(t)$ est enveloppée par deux fonctions exponentielles. Le lieu des maxima est obtenu en résolvant $\dot{q}(t) = 0$. Les maxima de $q(t)$ sont séparés par des intervalles réguliers égaux à T_A . T_A est appelé la pseudo-période. On remarque que la diminution de l'amplitude des oscillations au cours du temps, l'un des effets de l'amortissement est l'augmentation de la période des oscillations. Pour des systèmes faiblement amortis ($\delta \ll \omega_0$), on peut remarquer que $\omega_D \approx \omega_0$ et que la pseudo période est peu différente de la période propre : $T_A \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

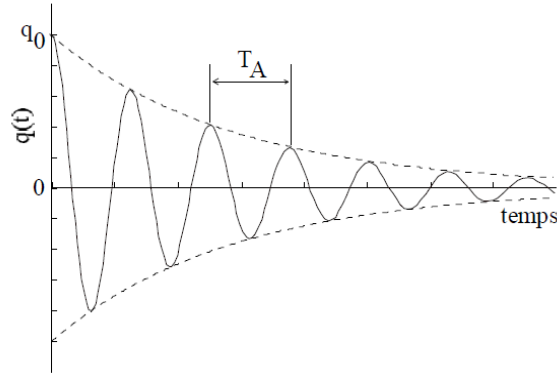


Fig. II-4. Variation de $q(t)$ en fonction du temps pour le régime faiblement amorti (sous amorti)

II-4-3- Décrément logarithmique

La figure II-5 représente la définition du décrément logarithmique. Il est défini par le logarithme du rapport des deux amplitudes successives des oscillations amorties :

$$D = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_2)} = \ln \frac{A(t_1)}{A(t_1 + T_a)} = -\ln \frac{A(t_1 + T_a)}{A(t_1)} \quad (\text{II-16})$$

En remplaçant les formules des amplitudes, on obtient à :

$$D = \delta T_a \quad (\text{II-17})$$

ou

δ est le coefficient d'amortissement.

T_a est le pseudo période. Elle est donnée par :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_D} \quad (\text{II-18})$$

avec :

ω_D est la pseudo pulsation, elle est égale à :

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\text{II-19})$$

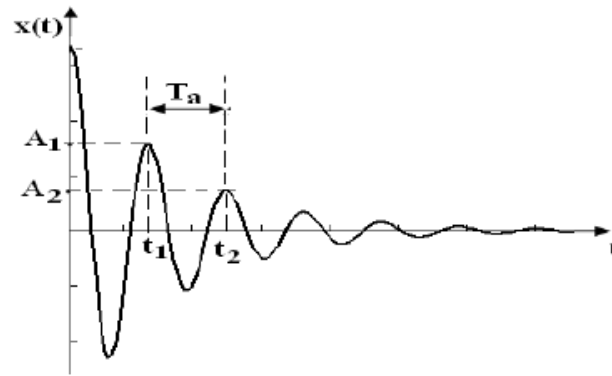


Fig. II-5. Définition du décrétement logarithmique

II-5- Analogie électromécanique

L'analogie entre le système mécanique masse-ressort et le système électrique RLC est regroupée dans le tableau suivant :

Systèmes mécaniques		Système électrique
Translation	Rotation	Circuit RLC
Déplacement : x	Angle : θ	Charge : q
Vitesse : $\dot{x}$	Vitesse angulaire : $\dot{\theta}$	Courant : $\dot{q}$
Accélération : $\ddot{x}$	Accélération angulaire : $\ddot{\theta}$	Variation de courant : $\ddot{q}$
Constante de raideur : k	Constante de torsion : C	Inverse de la capacité : $1/c$
Masse : m	Moment d'inertie : I	Inductance : L
Coefficient d'amortissement : δ	Coefficient d'amortissement : δ	Résistance : R
Energie cinétique : $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$	$\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$	Energie magnétique : $\frac{1}{2} L \dot{q}^2$
Energie potentielle : $\frac{1}{2} k x^2$	$-mgh$	Energie électrique : $\frac{1}{2c} q^2$

Tableau. II-1. Analogie électromécanique

II-6- Raideur équivalente

Les raideurs sont liées soit en série ou en parallèle.

II-6-1- Raideur en parallèle

La figure II-6 schématise l'association en parallèle de deux ressorts.

L'équilibre des forces conduit à :

$$k_1 \cdot x + k_2 \cdot x = k_{eq} \cdot x \Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2 \text{ est la raideur équivalente.}$$

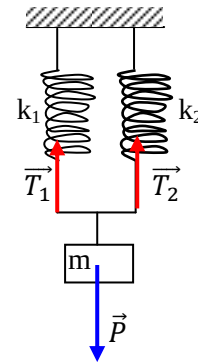


Fig. II-6. Association en parallèle des raideurs

II-6-2- Raideur en série

La figure II-7 schématise l'association en série de deux ressorts.

L'équilibre des forces conduit aux relations suivantes :

$$k_1 \cdot x_1 = k_{eq} \cdot x \Rightarrow x_1 = \frac{k_{eq}}{k_1} x$$

$$k_2 \cdot x_2 = k_{eq} \cdot x \Rightarrow x_2 = \frac{k_{eq}}{k_2} x$$

L'élongation totale : $x = x_1 + x_2$

$$x = \left(\frac{k_{eq}}{k_1} + \frac{k_{eq}}{k_2} \right) x \Rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \text{ est la raideur équivalente}$$

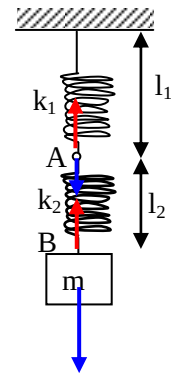


Fig. II-7. Association en série des raideurs

II-7- Exercices corrigés

Exercice N°1

Une tige OC de masse négligeable est articulée

sans frottement au point O et porte à son extrémité C

une masse m (Figure II-8). Deux ressorts de raideur

k_1 et k_2 sont liés à la tige aux points A et B respectivement.

A l'équilibre, la tige est horizontale et elle est écartée

d'un angle θ supposé très petit (les faibles oscillations).

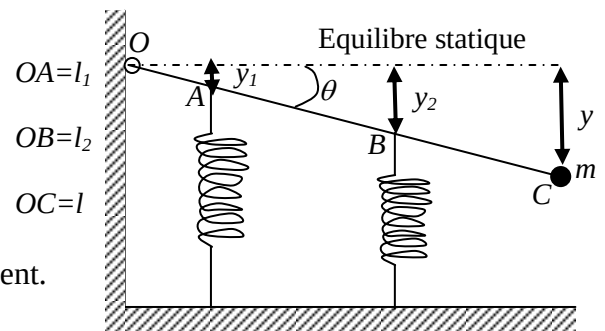


Fig. II-8. Système mécanique pendule-ressort

1- Calculer l'énergie cinétique et potentielle du système.

- 2- Déduire le lagrangien.
- 3- Etablir l'équation du mouvement.
- 4- Trouver la solution $\theta(t)$ si $\theta(t=0) = \pi/15$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

Solution N°1

- 1- Energie cinétique et potentielle :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2 \quad \text{avec } y = l \sin \theta \approx l \theta$$

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 \quad \text{avec } y_1 = l_1 \sin \theta \approx l_1 \theta, \quad y_2 = l_2 \sin \theta \approx l_2 \theta$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 (l_1 \theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (l_2 \theta)^2$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_1 l_1^2 \theta^2 - \frac{1}{2} k_2 l_2^2 \theta^2$$

- 2- L'équation de Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = m l^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k_1 l_1^2 \theta - k_2 l_2^2 \theta$$

- 3- L'équation du mouvement s'écrit :

$$m l^2 \ddot{\theta} + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{m l^2} \theta = 0$$

$$\text{Et la pulsation propre : } \omega_0 = \sqrt{\frac{(k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2)}{m l^2}}$$

- 4- La solution est :

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \theta(t=0) = A \cos \varphi = \frac{\pi}{15} \Rightarrow A = -\frac{\pi}{15} \\ \dot{\theta}(t=0) = -A \omega_0 \sin \varphi = 0 \Rightarrow -\sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi \end{cases}$$

$$\text{Et la solution : } \theta(t) = -\frac{\pi}{15} \cos(\omega_0 t + \pi)$$

Exercice N°2

Un tube en U (Fig. II-9) de section faible et uniforme s contient un liquide de masse volumique ρ . La pression à la surface libre est égale à la pression atmosphérique.

- 1- Calculer la période propre des oscillations de la masse liquide ?

Solution N°2

Le lagrangien est donné par : $L = E_c - E_p$

Puisque la section est uniforme, toutes les particules de liquide ont une vitesse v . L'énergie cinétique du fluide est :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

L'énergie potentielle : $E_p = \rho g s x^2$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \rho g s x^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2\rho g s x$$

Et enfin l'équation différentielle de mouvement :

$$m \ddot{x} + 2\rho g s x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2\rho g s}{m} x = 0$$

La pulsation libre est : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2\rho g s}{m}}$

La période propre : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2\rho g s}}$

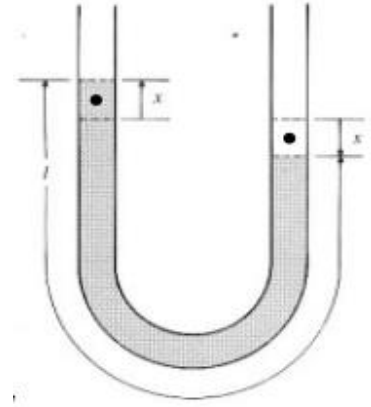


Fig. II-9. Tube en U

Exercice N°3

On réalise le montage correspondant au schéma de la figure II-10.

On bascule le commutateur en position 1 pour charger

le condensateur puis on le bascule en position 2.

Avec un système d'acquisition et de traitement, on enregistre la tension $u_C(t)$ dont le graphe est représenté sur la figure II-11.

L'enregistrement débute à l'instant de date $t_0 = 0$ s qui correspond au basculement du commutateur en position 2.

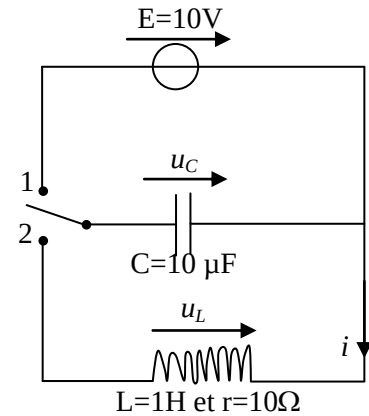


Fig. II-10. Circuit LC

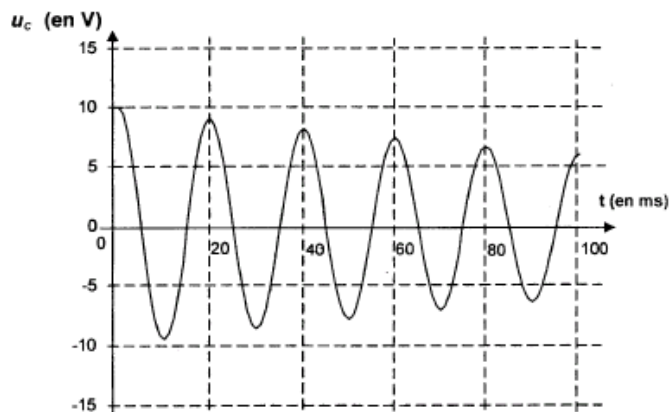


Fig. II-11. Variation de la tension de sortie en fonction du temps

- 1- Comment peut-on expliquer la diminution d'amplitude des oscillations au cours du temps ?
- 2- Déterminer la valeur de la pseudo-période du signal.
- 3- Ici on peut considérer que la période propre et la pseudo-période ont la même expression.

En déduire la valeur de la capacité C du condensateur et comparer avec l'indication du fabricant. On donne $\pi^2 \approx 10$

Solution N°3

- 1- La diminution d'amplitude est due à la résistance interne de la bobine. Il y a dissipation d'énergie sous forme de chaleur en raison de l'effet Joule).
- 2- La pseudo-période vaut $T = 20$ ms.
- 3- La pseudo-période ayant même valeur que la période propre, on a :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2(LC) \Rightarrow C = \frac{T_0^2}{4\pi^2L}$$

En remplaçant les valeurs de T_0 et L , on trouve :

$C = 10 \mu\text{F}$ Valeur égale à celle du fabricant.

Exercice N°4

Une masse m est soudée à l'extrémité d'une tige de longueur l et de masse négligeable (Figure II-12). L'autre extrémité du fil est articulée au point O . La tige est liée au point A à un Bâti (B_1) par un ressort de raideur k_1 . Au point B , la tige est reliée à un Bâti (B_2) par un ressort de raideur k_2 . La masse m est liée au Bâti (B_2) par un amortisseur de coefficient de frottement α . $OA=l/3$ et $OB=2l/3$.

1- Trouver l'équation différentielle du mouvement.

2- Déterminer la solution de l'équation

différentielle dans le cas d'un faible amortissement,

le coefficient d'amortissement, la pulsation propre

et la pseudo-pulsation.

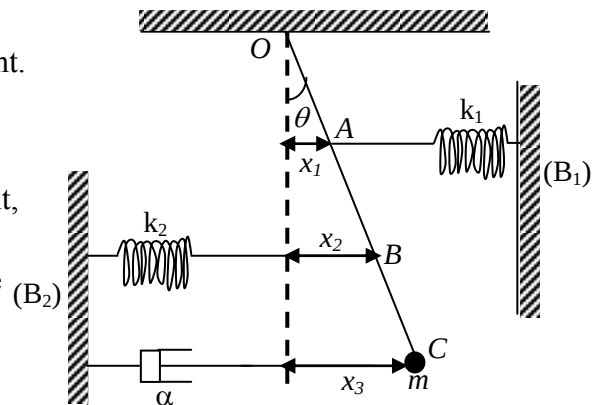


Fig. II-12. Système mécanique

Solution N°4

1- L'équation différentielle du mouvement :

Le Lagrangien : $L = E_c - E_p$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}_3^2 \quad \text{avec : } x_3 = l \sin \theta \approx l \theta \Rightarrow \dot{x}_3 = l \dot{\theta} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_p = E_{p1} + E_{p2}$$

E_{p1} est l'énergie potentielle du ressort de raideur k_1 . E_{p2} est celle du ressort k_2 .

$$E_{p1} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 \quad \text{avec } x_1 = \frac{l}{3} \theta \Rightarrow E_{p1} = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{l}{3} \right)^2 \theta^2$$

$$E_{p2} = \frac{1}{2} k_2 x_2^2 \quad \text{avec } x_2 = \frac{2l}{3} \theta \Rightarrow E_{p2} = \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{2l}{3} \right)^2 \theta^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 \left(\frac{l}{3} \right)^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{2l}{3} \right)^2 \theta^2$$

$$\text{La fonction de dissipation : } D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}_3^2 = \frac{1}{2} \alpha l^2 \dot{\theta}^2$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k_1\left(\frac{l}{3}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{2l}{3}\right)^2\theta^2$$

L'équation de Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\left(\frac{k_1 l^2}{9} + \frac{4k_2 l^2}{9}\right)\theta$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha l^2 \dot{\theta}$$

En remplaçant terme par terme dans l'équation de Lagrange, on obtient :

$$ml^2\ddot{\theta} + \alpha l^2 \dot{\theta} + \left(\frac{k_1 l^2}{9} + \frac{4k_2 l^2}{9}\right)\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \left(\frac{k_1}{9m} + \frac{4k_2}{9m}\right)\theta = 0$$

2- Pour les faibles amortissements,

$$\theta(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi)$$

Par analogie avec :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

La pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + 4k_2}{9m}}$$

Le coefficient d'amortissement :

$$\delta = \frac{\alpha}{2m}$$

La pseudo pulsation :

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \frac{1}{6m} \sqrt{4(k_1 + 4k_2) - 9\alpha^2}$$

Exercice N°5

Une fois le condensateur chargé, on bascule rapidement le commutateur (K) (voir figure II-13) de la position 1 à la position 2 : il prend l'instant du basculement comme nouvelle origine des dates. Le condensateur se décharge alors dans la bobine.

A- L'acquisition informatisée des tensions permet de visualiser l'évolution des tensions $u_{AB}(t)$ et $u_{DB}(t)$ en fonction du temps.

Après transfert des données vers un tableur-grapheur, on souhaite étudier l'évolution des différentes énergies au cours du temps.

- 1- Exprimer littéralement, en fonction de $i(t)$, l'énergie magnétique E_m emmagasinée dans la bobine.
- 2- À partir de l'une des tensions enregistrées $u_{AB}(t)$ et $u_{DB}(t)$, donner l'expression de l'intensité instantanée $i(t)$.
- 3- En déduire l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine en fonction de l'une des tensions enregistrées.
- 4- En déduire l'expression de l'énergie totale E_T du circuit en fonction des tensions $u_{AB}(t)$ et $u_{DB}(t)$.

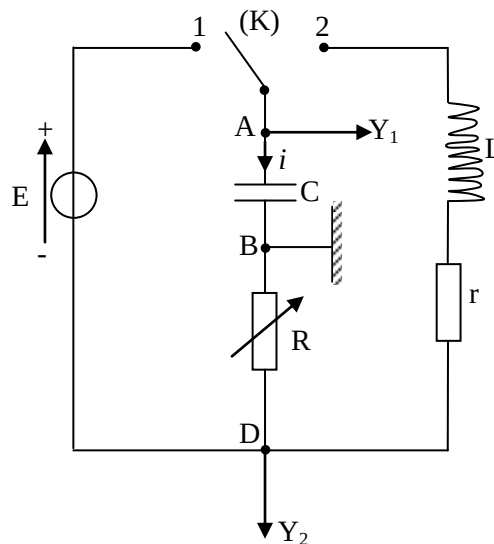


Fig. II-13. Circuit RLC

B- À partir du tableur-grapheur, on obtient le graphe de la figure II-14 qui montre l'évolution, en fonction du temps, des trois énergies : E_e énergie électrique, E_m , énergie magnétique et E_T énergie totale.

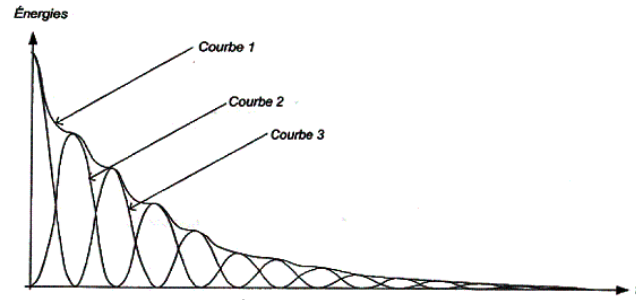


Fig.II-14. Evolution des énergies E_e , E_T et E_m en fonction du temps

- 5- Identifier chaque courbe en justifiant. Quel phénomène explique la décroissance de la courbe 1 ?

C- Pour entretenir les oscillations, on ajoute en série dans le circuit précédent un dispositif assurant cette fonction. On refait alors une acquisition informatisée.

- 1- Tracer sur la figure II-15 les deux courbes manquantes. Préciser ce que chacune des trois courbes représente.
- 2- Pourquoi un tel régime est-il qualifié d'entretenu ?

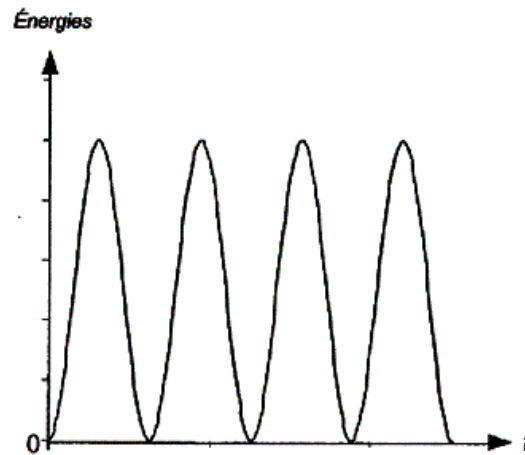


Fig.II-15. Evolution des énergies en fonctions du temps

Solution N°5

Cas A

1- Energie magnétique E_m emmagasinée dans la bobine:

$$E_m = \frac{1}{2} L i(t)^2$$

2- Loi d'Ohm:

$$u_{DB}(t) = -Ri(t) \Leftrightarrow i(t) = -\frac{u_{DB}(t)}{R}$$

En remplaçant cette dernière équation dans l'énergie, on trouve :

$$E_m = \frac{1}{2} L \frac{u_{DB}^2(t)}{R^2}$$

3- Energie totale E_T du circuit en fonction des tensions $u_{AB}(t)$ et $u_{DB}(t)$:

$$E_T = E_e + E_m = \frac{1}{2} C u_{AB}^2(t) + \frac{1}{2} L \frac{u_{DB}^2(t)}{R^2}$$

Cas B

Initialement le condensateur est chargé et aucun courant ne circule donc :

$$E_T(0) = E_e(0) \text{ et } E_m(0) = 0 \text{ J}$$

On en déduit alors que:

- la courbe 1 est associée à E_T
- la courbe 2 est associée à E_m
- la courbe 3 est associée à E_e

La décroissance de la courbe 1 est due à la perte d'énergie sous forme de chaleur, par effet Joule, dans la résistance R.

Cas C

Lorsque les oscillations sont entretenues l'énergie totale E_T est constante: $E_T = E_e + E_m = Cte$

- Initialement le condensateur est chargé et aucun courant ne circule :

$$E_T(0) = E_e(0) \text{ et } E_m(0) = 0 \text{ J}$$

- Si E_e augmente alors E_m diminue et inversement.

- Si E_e est maximale alors E_m est nulle et inversement.

D'où les courbes :

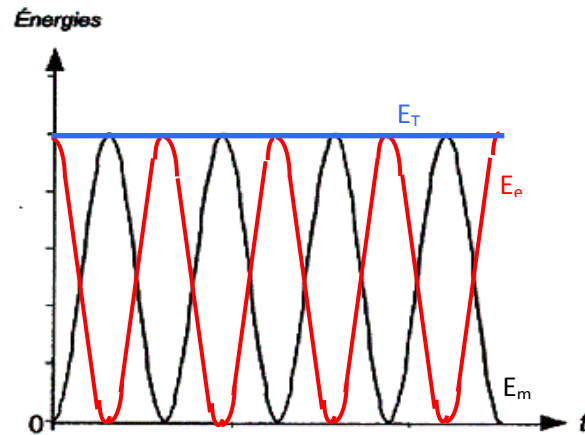


Fig.II-16. Variation des énergie E_m , E_e et E_T en fonction du temps

Le régime est entretenu car les pertes énergétiques dans la résistance sont compensées par l'apport d'énergie du dispositif d'entretien des oscillations. Les oscillations ne sont plus amorties mais ont une amplitude constante au cours du temps.

Exercices non corrigés

Exercice N°1

On modélise l'amortisseur d'une voiture (Figure II-17) à l'aide d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement λ . Une masse $m/4$ est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement le long de l'axe $\vec{e}_x$ lié au référentiel terrestre, supposé galiléen. La masse $m/4$ représente la masse du véhicule de masse m pesant sur le système d'amortisseur.

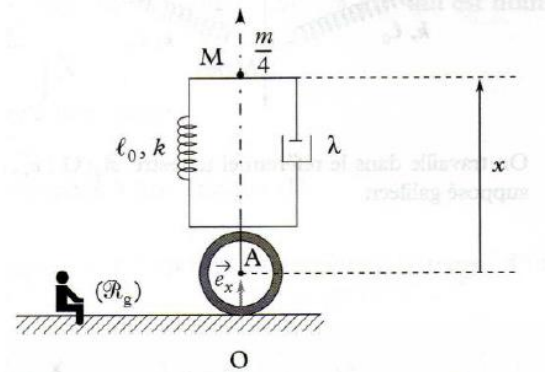


Fig. II-17. Amortisseur d'une voiture

- 1- Lors du changement d'une roue on soulève d'une hauteur $h = 25$ cm la carcasse du véhicule, ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol : la longueur AM (longueur du ressort) vaut alors 40 cm. Déterminer les caractéristiques du ressort.

- 2- Déterminer et calculer λ afin que le dispositif fonctionne en régime critique (roue sur le sol à l'arrêt et masse $m/4$ en mouvement vertical)
- 3- On enfonce la masse $m/4$ d'une hauteur $d = 5$ cm et on lâche le système à $t = 0$ sans vitesse initiale. Déterminer l'évolution de l'altitude x de la masse $m/4$.

Exercice N°2

Soit le système mécanique (Figure II-18) composé d'un disque (M, R) qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal, d'un ressort k et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α .

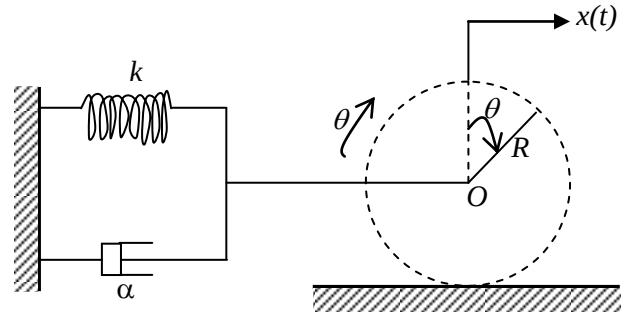


Fig. II-18. Système mécanique

- 1- Déterminer l'équation différentielle du mouvement en fonction de δ et ω_0 , et déduire ω_D .
- 2- Trouver l'équation du mouvement, ($J_{/O} = \frac{1}{2}MR^2$)

Exercice N°3

Le système est constitué de 2 masses m_1 et m_2 , d'une tige de masse négligeable et de longueur L et d'un ressort k_1 et d'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α (Figure II-19).

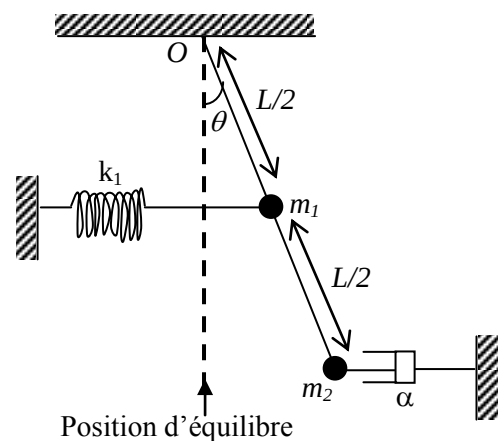


Fig. II-19. Système mécanique

- 1- Ecrire l'équation différentielle du mouvement, sachant que le système effectue des oscillations de faible amplitude.
- 2- Déterminer la pulsation propre du système.
- 3- Trouver l'équation du mouvement, sachant que : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. On donne : $\frac{m_1}{4} = m_2 = m$ et $\frac{k_1}{4} = k$