Chapitre III:
Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

III- Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

III-1- Equation différentielle

L'équation différentielle des oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext} \qquad \text{(III-1)}$$

F_{ext} : la force généralisée à une force extérieure

L'équation différentielle du mouvement vibratoire forcé est :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \qquad \text{(III-2)}$$

III-2- Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle du mouvement des oscillations forcées est une équation différentielle du second ordre avec un second membre. La solution de l'équation (II-2) est donnée par :

$$q(t) = q_H(t) + q_p(t) \qquad \text{(III-3)}$$

$q_H(t)$: est la solution homogène

$q_p(t)$: est la solution particulière

Les trois cas de solution homogène comme sont citées avant sont proportionnels à un terme exponentiel :

$$q_H(t) \sim e^{-\delta t} \qquad \text{(III-4)}$$

Après un intervalle de temps t supérieur à (3/δ) ou (4/δ), le terme $e^{-\delta t} \to 0$ et $q_H(t) \to 0$. Dans ce cas, la solution générale tend vers la solution particulière. Ce régime est appelé le régime permanent.

$$q(t) \to q_p(t) \qquad \text{(III-5)}$$

Quand la solution homogène est non négligeable et non nulle, le régime est dit transitoire.

III-2-1- Cas d'une excitation sinusoïdale

L'excitation sinusoïdale est de la forme :

$$A(t) = A_0 cos(\Omega t)$$

L'équation du mouvement (III-2) devienne :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = A_0 cos(\Omega t) \quad \text{(III-6)}$$

La méthode des nombres complexes permet de calculer aisément la solution stationnaire. La solution particulière complexe est :

$$q(t) = \underline{q} e^{i\Omega t} \quad \text{(III-7)}$$

$\underline{q}$ est l'amplitude complexe.

$$\underline{q} = q_0 e^{i\varphi} \quad \text{(III-8)}$$

L'excitation A(t) sous forme complexe est égale :

$$A(t) = A_0 e^{i\Omega t} \quad \text{(III-9)}$$

q(t) est une solution de l'équation différentielle si $\dot{q}(t)$ et $\ddot{q}(t)$ vérifient l'équation (III-2).

$$-q_0\Omega^2 e^{i(\Omega t+\varphi)} + 2\delta\left(i\Omega q_0 e^{i(\Omega t+\varphi)}\right) + w_0^2 q_0 e^{i(\Omega t+\varphi)} = A_0 e^{i\Omega t}$$

$$q_0[(w_0^2 - \Omega^2) + 2i\delta\Omega]e^{i\varphi} = A_0$$

On obtient l'amplitude complexe :

$$\underline{q} = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\delta\Omega} \quad \text{(III-10)}$$

Et on multipliant par le conjugué du dénominateur, on trouve :

$$q_0 = \frac{A_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad \text{(III-11)}$$

Et

$$\varphi = -arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) \quad \text{(III-12)}$$

III-2-2- Cas d'une excitation périodique

La fonction A(t) étant périodique, de période T, son développement de Fourier est :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t) \tag{III-13}$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(n\omega t) + b_n sin(n\omega t) \tag{III-14}$$

La réponse permanente peut être calculée par :

$$q(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n cos(n\omega t+\varphi)+b_n sin(n\omega t+\varphi)}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2}} \tag{III-15}$$

III-3- Pulsation de résonnance

Pour calculer la pulsation de résonnance, la dérivée de q_0 est égale à zéro.

$$\frac{dq_0}{d\Omega} = 0 \Longrightarrow \frac{-2A_0\left[-\Omega\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)+2\delta^2\Omega\right]}{\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\delta^2\Omega^2\right]^{3/2}} = 0 \tag{III-16}$$

$$\Longrightarrow \Omega[(\omega_0^2 - \Omega^2) - 2\delta^2] = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \Omega_1 = 0 \\ \Omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \end{cases} \tag{III-17}$$

La pulsation de résonnance est donnée par :

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{III-18}$$

En remplaçant Ω_R dans l'amplitude, on obtient :

$$q_0(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}} \tag{III-19}$$

Pour les faibles amortissements :

$$q_0(\Omega_R) = \frac{A_0}{2\delta\omega_0} \tag{III-20}$$

La figure III-1 représente la variation de l'amplitude q_0 (à gauche) et le déphasage φ (à droite). Pour l'amplitude on remarque qu'il existe un maximum à la pulsation Ω_R seulement si l'amortissement est faible pour que $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$

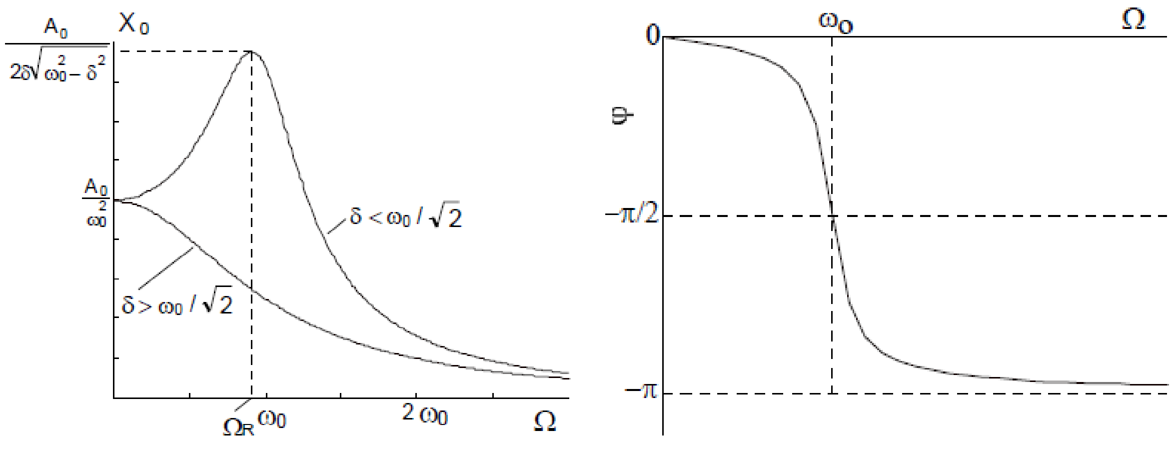

Fig. III-1. Amplitude et le déphasage en fonction de Ω

III-4- Bande Passante

On définit bande passante, la bande de pulsation pour les quelles l'amplitude est égale à $\frac{q_{0(\Omega_R)}}{\sqrt{2}}$. Elle est donnée par :

$$B = \Omega_1 - \Omega_2 = 2\delta \qquad \text{(III-21)}$$

III-5- Coefficient de Qualité

Il est définit par le rapport de la pulsation propre à la largeur de la bande passante B.

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\delta} \qquad \text{(III-22)}$$

III-6- Impédance mécanique

On appelle impédance mécanique d'entrée du système mécanique, le rapport des amplitudes complexes de la force *F* et de la vitesse *v*.

$$Z = \frac{F}{v} \qquad \text{(III-23)}$$

III-6-1- Amortisseur

La force de frottement$F = \alpha v$, on déduit l'impédance complexe d'un amortisseur :

$$Z_\alpha = \alpha \qquad \text{(III-24)}$$

III-6-2- Masse

D'après la 2ième loi de Newton, la force F s'écrit :

$F = m\frac{dv}{dt}$

On en déduit l'impédance complexe d'une masse :

$$Z_m = im\Omega = m\Omega e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{(III-25)}$$

III-6-3- Ressort

La force : $F = kx$

Et l'impédance d'un ressort est donné par :

$$Z_k = \frac{k}{i\Omega} = -i\frac{k}{\Omega} \quad \text{(III-26)}$$

III-7- Exercices corrigés

Exercice N°1

Etablir l'équation différentielle en courant puis en charge du circuit oscillatoire électrique RLC de la figure III-2. On donne :
R= 80Ω, L=10 H, C=0.005 F, U_0=53 V, Ω=3 rad/s, U(t)=U_0cos(Ωt).
1- Calculer la période propre T_o et le coefficient d'amortissement δ.
2- Déterminer la solution du régime transitoire, et en déduire sa pseudo pulsation ω_D.
3- Déterminer la solution du régime permanente.

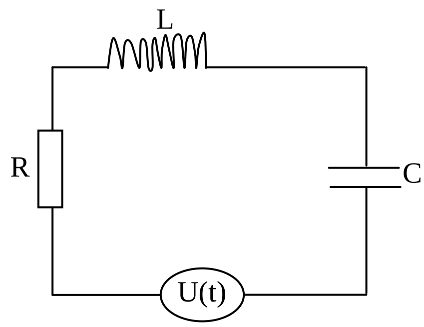

Fig. III-2. Circuit RLC

Solution N°1

1- $\sum_{i=1}^{3} V_i = U \ \Rightarrow \ V_L + V_c + V_R = U$

$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{c}\int i(t)dt + Ri = U \ \Rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{c}q = U$

$\Rightarrow \ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{Lc}q = \frac{U_0 cos(\Omega t)}{L}$

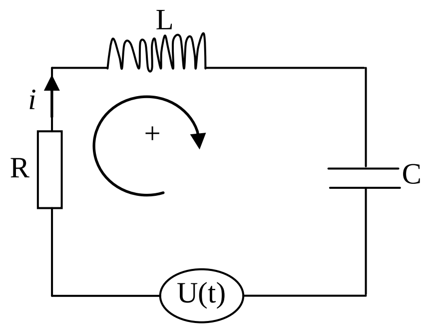

Fig. III-3. Maille du circuit

Par analogie, on trouve :

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{Lc}} \ \Rightarrow \ T_0 = 2\pi\sqrt{Lc} = 1.4s$

$\delta = \frac{R}{2L} = 4$

2- La solution transitoire :

L'équation différentielle du mouvement devient :

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 5.3cos(3\text{t})$$

La solution générale est :

$$q(t) = q_p(t) + q_H(t)$$

$q_H(t)$ est la solution homogène calculée lorsque $A(t)=0$. L'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 0$$

On calcul le déterminant :

$$\Delta' = \delta^2 - \omega_0^2 = 16 - 20 = -4 < 0$$

Et

$$q_H(t) = Ae^{-4t}cos(\omega_D t + \varphi)$$

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 2$$

$$q_H(t) = Ae^{-4t}cos(2t + \varphi)$$

La solution particulière est calculée lorsque $A(t) \neq 0$:

$$\ddot{q} + 8\dot{q} + 20q = 5.3cos(3\text{t})$$

La solution particulière suit la forme du second membre.

$$q_p(t) = q_0 cos(3t + \varphi)$$

Pour calculer q_0 et φ à partir de la méthode des nombres complexes. On suppose la solution complexe de la forme :

$$q_p(t) = q_0 e^{i(3t+\varphi)} = q_0 e^{i\varphi} e^{3it}$$

En remplaçant la solution dans l'équation différentielle,

$$-9q_0 e^{i\varphi} + 24iq_0 e^{i\varphi} + 20q_0 e^{i\varphi} = 5.3 \;\Rightarrow\; q_0 e^{i\varphi}(11 + 24i) = 5.3$$

$$q_0 = \frac{5.3}{\sqrt{11^2 + 24^2}} = 0.2$$

$$\varphi = -arctg\left(\frac{24}{11}\right) = -65.4° = -1.14\,rad$$

Et la solution particulière :

$$q_p(t) = 0.2cos(3t - 1.14)$$

$$q(t) = Ae^{-4t}cos(2t + \varphi) + 0.2cos(3t - 1.14)$$

3- La solution permanente est calculée lorsque $q_H(t) \rightarrow 0$. Donc elle est donnée par :

$$q(t) = 0.2cos(3t - 1.14)$$

Exercice N°2

Soit le pendule inversé de la figure III-4. ($I = mL^2$). Au repos la tige OC est verticale et les ressorts sont non déformés.

1- Donner l'équation différentielle du mouvement de ce système (dans le cas des petites oscillations).
On donne : m=0,2 kg, k_1=9 N/m, k_2=5 N/m, β=0,9 kg/s, L = 0,5 m et f(t)=cos(2t).
2- Donner la pulsation propre, la pulsation amortie (pseudo pulsation), le décrément logarithmique.
3- Donner la solution du régime Permanent.
4- Donner la solution du régime Transitoire.

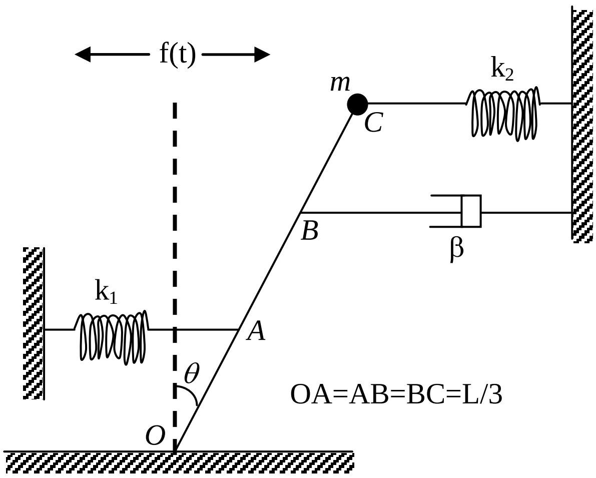

Fig. III-4. Oscillations forcées du système masse ressort

Solution N°2

1- L'équation différentielle du mouvement :

$L=E_c-E_p$

$$E_c = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{L}{3}\right)^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2L^2\theta^2 + mgLcos\theta$$

$$D = \frac{1}{2}\beta \dot{OB}^2 = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{2L}{3}\right)^2\dot{\theta}^2$$

L'équation de Lagrange pour les oscillations forcées est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}=F_{ext}$$

Après dérivation et en remplaçant terme par terme dans l'équation de Lagrange, on obtient :

$$mL^2\ddot{\theta}+\frac{4L^2}{9}\beta\dot{\theta}+\left(\frac{L^2k_1}{9}+L^2k_2-mgL\right)\theta=F(t)$$

$$\ddot{\theta}+\frac{4}{9m}\beta\dot{\theta}+\left(\frac{k_1}{9m}+\frac{k_2}{m}-\frac{g}{L}\right)\theta=\frac{1}{mL^2}cos(2t)$$

2- La pulsation propre :

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k_1+9k_2}{9m}-\frac{g}{L}}=3.16\,rad/s$$

La pseudo pulsation : $\omega_D=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}=2.78\,rad/s$

Le décrément logarithmique : $d=\delta T \Rightarrow d=0.94$

3- La solution du régime permanent :

$$\theta_p(t)=\theta_0 cos(2t+\varphi)$$

Avec :

$$\theta_0=\frac{1/_{mL^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2-4\delta^2\Omega^2}}$$

Et

$$\varphi=-arctg\left(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right)$$

En remplaçant les données numériques, on trouve :

$$\theta_p(t)=0.18cos(2t-0.2\pi)$$

4- La solution au régime transitoire :

$$\theta(t)=\theta_H(t)+\theta_p(t)$$

L'équation différentielle sans second membre s'écrit :

$$\ddot{\theta}+1.5\dot{\theta}+10\theta=0$$

$\Delta=-17.5<0$ et la solution homogène :

$\theta(t) = Ae^{-\frac{3}{2}t}cos(2.78t + \varphi)$

A et φ sont des constantes d'intégration calculées à partir des conditions initiales.

Exercice N°3

Un générateur de signaux fournit une tension en créneaux de période $T=2.10^{-3}$s et d'amplitude V_0=15V.

$$\begin{cases} V(t) = -15V \ \ pour \ 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ V(t) = +15V \ \ pour \ \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

1- Donner le développement en série de Fourier de la tension en créneaux étudiée.
2- Calculer numériquement les termes correspondant à n≤9.

On applique une tension V(t) à un dipôle RLC et on mesure la tension V'(t) au bornes de R. On donne L=1H, R=100Ω, C est calculée pour que l'on ait la résonnance pour la fréquence de la tension V(t).

3- Déterminer les coefficients a'_n et b'_n de la série de Fourier qui est le développement de la tension$V'(t)$.
4- Calculer numériquement les termes correspondant à n≤9. Commenter les résultats obtenus.

Solution N°3

1- Le développement en série de Fourier :

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)cosn\omega tdt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} -V_0cosn\omega tdt + \int_{T/2}^{T} +V_0cosn\omega tdt\right]$$

$$= \frac{2V_0}{n\omega T}(-2sinn\pi)=0$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)sinn\omega tdt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} -V_0sinn\omega tdt + \int_{T/2}^{T} +V_0sinn\omega tdt\right]$$

$$= \frac{V_0}{n\pi}(2 - 2(-1)^n)$$

Pour n pair $b_n = 0$

Pour n impair $b_n = -\frac{4V_0}{n\pi}$

En posant *n=2p+1*, le développement de Fourier est donné par :

$$V(t) = -\frac{4V_0}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{sin(2p+1)\omega t}{2p+1}$$

2- Application numérique :

B_1	B_3	B_5	B_7	B_9
-19.1	-6.37	-3.82	-2.73	-2.12

Le circuit est alimenté par la tension en créneau d'amplitude V_0=15V. Par superposition de tensions sinusoïdales de plusieurs Ω=ω, 3ω, …, nω. Les termes B_n sont les amplitudes des harmoniques de rang n.

$$\frac{b'_n}{b_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\Omega - \frac{1}{C\Omega}\right)^2}}$$

Avec :

Ω=nω, $LC\omega^2=1$, on trouve :

$$\frac{b'_n}{b_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{n^2 LC\omega^2 - 1}{nC\omega}\right)^2}}$$

$$\frac{b'_n}{b_n} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega\frac{n^2 - 1}{n}\right)^2}}$$

En remplaçant les valeurs numériques, on obtient :

$$\frac{b'_n}{b_n} = \frac{100}{\sqrt{100^2 + \left(10^2\pi\frac{n^2 - 1}{n}\right)^2}}$$

Les calculs sont regroupés dans le tableau suivant :

n	1	3	5	7	9
$\frac{b'_n}{b_n}$	1	0.012	0.0066	0.0046	0.0036
b'_n	-19.1	-0.076	-0.025	-0.013	0.0076

On remarque que le terme fondamental est favorisé, et que le signal de sortie va rester à peu près sinusoïdal.

III-8- Exercice non corrigés

Exercice N°1

Dans la figure III-5, la masse m est fixée à un ressort k et un amortisseur α. On applique à la masse m une force $F(t)=F_0\sin(\omega t)$.

1. Trouver l'équation différentielle du mouvement forcé amorti.
2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle, en calculant la solution homogène et la solution particulière.

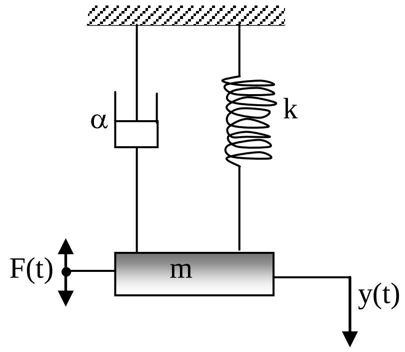

Fig. III-5. Oscillations forcées du système masse-ressort

Exercice N°2

Dans la figure III-6, un disque circulaire homogène, de masse M et de rayon R, peut osciller sans frottements autour de son axe horizontal O. Deux masses m_1 et m_2 sont soudées aux extrémités d'une tige de masse négligeable liée rigidement au disque et passant par O. Les distances de m_1 et m_2 au centre sont notées respectivement l_1 et l_2. Un ressort vertical, de constante de raideur k a une extrémité fixe et l'autre est reliée au disque en un point A situé à une distance " a " de O. En position d'équilibre la tige est verticale avec m_1 en bas et le point A est au même niveau que le centre O. Le disque subit un frottement visqueux de coefficient α au point B. La masse m_1 est soumise à une force $F(t)=F_0\cos(\Omega t)$ perpendiculaire à la tige.

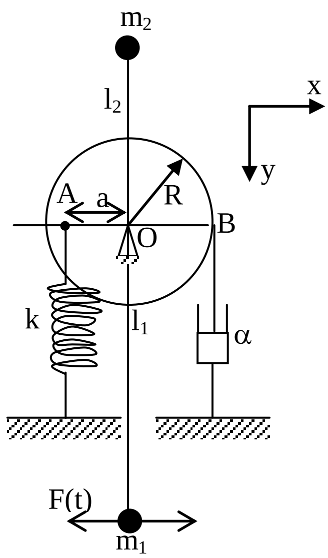

Fig. III-6. Oscillations forcées du système masse-ressort

Exercice N°3

Trouver le développement en série de Fourier de la force F(t) appliquée au système oscillatoire définit par l'équation suivante :

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F(t)}{m}$$

avec F(t) est une fonction périodique de période 2π tel que :

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & pour\ 0 \leq t \leq \pi \\ -F_0 & pour\ \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$