Université Ahmed Zabana-Relizane

Fiche TD 2- Calcul diff-master 1 -2021/2022

$1^{ère}$ année master-LMD-Maths

Exercice 1:

Démontrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$

définie par $f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local,

mais que f n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global.

Exercice 2:

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = \left(x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1\right)$

Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0,0)$.

Démontrer qu'il existe un ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant x_0

et $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et $f(x, \varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in I$

Exercice 3:

Montrer que la relation $x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 = 1$

définit y comme fonction de x au voisinage du point $(-1, 1)$.

Calculer alors $\frac{dy}{dx}$ en ce point.

Exercice 4:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que $|ab| < 1$.

1. Soit $v \in \mathbb{R}$. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = x + a\sin(v - b\sin x)$.

Démontrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. On pose $f(x,y) = (x + a\sin y, y + b\sin x)$.

Démontrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-meme.

Exercice 5: Déterminer une solution y de l'équation $x = y + \frac{y}{\ln y}$ en x pour $x, y > 0$ proches de 0, de la forme $y(x) = x\left(1 + u\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)$ avec u classe C^∞ au voisinage de 0 et $u(0) = 0$. Calculer $u'(0)$ et $u''(0)$.

Correction

Exercice 1: Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. La matrice jacobienne de f en (x_0, y_0) est

$$\begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant est $4x_0^2 + 4y_0^2 > 0$. Ainsi, par le théorème d'inversion local, f réalise un $\mathcal{C}^1$. difféomorphisme local en (x_0, y_0). Pour autant, f n'est pas un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme global de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ sur $f\left(\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}\right)$ car f n'est pas injective : on a $f(1,1) = f(-1,-1) = (0,2)$ par exemple.

Exercice 2: II s'agit d'appliquer le théorème des fonctions implicites et donc de démontrer que la différentielle partielle de f par rapport aux variables y et z, au point (x_0, y_0, z_0), est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Autrement dit, il s'agit de démontrer que la matrice A suivante est inversible:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

Calculons cette matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -2y_0 & 2z_0 \\ x_0 z_0 & x_0 y_0 \end{pmatrix}$$

Son déterminant vaut $-2x_0\left(y_0^2 + z_0^2\right)$. Puisque $x_0 y_0 z_0 = 1$, et donc $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ et $z_0 \neq 0$, on déduit facilement que ce déterminant n'est jamais nul.

Exercice 3

Posons $f(x,y) = x^4 + x^3y^2 - y + y^2 + y^3 - 1$.

f définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $f(-1,1) = 0$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - 1 + 2y + 3y^2$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2 \neq 0$$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites au voisinage de $(-1,1)$. II existe un intervalle I de R contenant -1, un intervalle J de R contenant 1 et une fonction $g : I \to J$

telle que, pour tout couple $(x, y) \in I \times J$,

$$f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = g(x)$$

Pour calculer la dérivée de g en -1, on peut utiliser la formule suivante:

$$g'(-1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)}$$

Or,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 3x^2y^2$$