University Physics Series

سلسلة الفيزياء الجامعية

مقدمة في ميكانيكا الكم

ديفيد ج. جريفيثس

David J. Griffiths

ترجمة : **كمال أ. خليفة كرفة**

جامعة غليزان

آخر تحديث : December 14, 2021

الفهرس

تمهيد من المؤلـــف

المعادلات الأساسية

معادلة شرودينغر

$$\imath\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi$$

معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن

$$H\psi = E\psi, \qquad \psi = \psi e^{-\imath Et/\hbar}$$

مؤثر هاميلتون

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V$$

مؤثر الزخم

$$\mathbf{p} = -\imath\hbar\nabla$$

الاعتماد الزمني لقيمة متوقعة

$$\frac{\mathrm{d}\langle Q\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\imath}{\hbar}\langle[H,Q]\rangle + \left\langle\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right\rangle$$

مبدأ الارتياب المعمم

$$\sigma_A\sigma_B \geq \left|\frac{1}{2\imath}\langle[A,B]\rangle\right|$$

مبدأ الارتياب لهايزنبرغ

$$\sigma_x\sigma_p \geq \hbar/2$$

المبدل المُقنَّن

$$[x,p] = \imath\hbar$$

الزخم الزاوي

$$[L_x, L_y] = \imath\hbar L_z, \qquad [L_y, L_z] = \imath\hbar L_x, \qquad [L_z, L_x] = \imath\hbar L_y$$

مصفوفات بولي

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

الثوابت الأساسية

ثابت بلانك: $\hbar = 1.05457 \times 10^{-24}\,\mathrm{J\,s}$

سرعة الضوء: $c = 2.99792 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$

كتلة الإلكترون: $m_e = 9.10938 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

كتلة البروتون: $m_p = 1.67262 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

شحنة البروتون: $e = 1.60218 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

شحنة الالكترون: $-e = -1.60218 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

نفاذية الفضاء: $\epsilon_0 = 8.85419 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/J\,m}$

ثابت بولتزمان: $k_B = 1.28065 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$

ذرة الهيدروجين

ثابت التركيب الدقيق:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 1/137.03$$

نصف قطر بوهر:

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar}{\alpha m_e c} = 5.29177 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$$

طاقات بوهر:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2\hbar^2 n^2} = \frac{E_1}{n^2}(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

طاقة الربط:

$$-E_1 = \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} = \frac{\alpha^1 m_e c^2}{2} = 13.6057\,\mathrm{eV}$$

الحالة الأرضية (الأساسية):

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}$$

علاقة ريدبارغ:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

ثابت ريدبارغ:

$$R = -\frac{E_1}{2\pi\hbar c} = 1.09737\,/\mathrm{m}$$

الباب 1

الدالة الموجية

1.1 معادلة شرودينجر

2.1 الترجمة الإحصائية

3.1 الاحتمالية

4.1 الاستنظام

5.1 الزخم/الاندفاع

من أجل جسيم في الحالة/التابع الموجي Ψ فإن القيمة المتوقعة لـ x هي

$$\boxed{\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,|\Psi(x,t)|^2\,\mathrm{d}x.} \tag{1.1}$$

ماذا تعني هذه بالضبط؟ إنها قطعا **لا** تعني أنه إذا قمت بقياس إزاحة/موضع جسيم واحد مرارا و تكرارا، فإن $\int x|\Psi|^2\mathrm{d}x$ هو متوسط النتائج التي ستحصل عليها. على العكس: القياس الأول (الذي نتيجته/حصيلته غير محددة) سيؤدي إلى انهيار الدالة الموجية إلى دالة حادة (شكلها مثل المسمار) عند القيمة المتحصل عليها حقيقة/بالفعل، و القياسات اللاحقة/التالية (إذا تم إجراؤها بسرعة) ستكرر ببساطة النتيجة نفسها. بالأحرى، $\langle x\rangle$ هي متوسط القياسات التي تم إجراؤها على جسيمات **جميعها** في الحالة Ψ، مما يعني أنه إما يجب عليك أن تجد طريقة ما لإعادة الجسيم إلى حالته الأصلية بعد كل قياس، و إما عليك إعداد **مجموعة** كاملة من الجسيمات، كل منها في نفس الحالة/التابع Ψ، و قياس إزاحاتها/مواضعها جميعها: $\langle x\rangle$ هي متوسط **هذه** النتائج. (أود أن أتصور صفا من القارورات على رف، كل منها تحتوي على جسيم في الحالة Ψ (بالنسبة إلى مركز القارورة). تم تعيين طالب دراسات عليا لكل

قارورة، و عند الإشارة يقوم جميعهم بقياس إزاحات/مواضع جسيماتهم. نقوم بعد ذلك بإنشاء رسم بياني للنتائج، والذي يجب أن يتطابق مع $|\Psi|^2$ ونحسب المتوسط، والذي يجب أن يتوافق مع $\langle x\rangle$. (بالطبع، بما أننا نستخدم عينة محدودة فقط فلا يمكننا توقع اتفاق تام، و لكن كلما كانت القارورات التي نستخدمها أكثر كلما كان لزاما أن نقترب أكثر.)) باختصار، **القيمة المتوقعة هي متوسط القياسات المتكررة على مجموعة من الجمل المعدة بشكل متماثل**، و ليس متوسط القياسات المتكررة على نفس الجملة الواحدة.

الآن، مع مرور الزمن، ستتغير $\langle x\rangle$ (بسبب الاعتماد الزمني لـ Ψ)، و قد نكون مهتمين بمعرفة مدى السرعة التي تتحرك بها. بالرجوع إلى المعادلتين (??) و (1.1) نرى أن

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t}=\int x\frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\imath\hbar}{2m}\int x\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\Psi\right)\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

يمكن تبسيط هذه العبارة باستخدام التكامل-بالتجزئة:

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t}=-\frac{\imath\hbar}{2m}\int\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\mathrm{d}x. \tag{1.3}$$

(لقد استخدمت حقيقة أن $\partial x/\partial x=1$، و تخلصت من الجزء الحدودي، على أساس أن Ψ تؤول إلى الصفر عند اللانهاية $\pm\infty$.) بإجراء تكامل-بالتجزئة آخر، على الجزء الثاني، نستنتج:

$$\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t}=-\frac{\imath\hbar}{m}\int\psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

ماذا سنفعل بهذه النتيجة؟ لاحظ أننا نتحدث عن "سرعة" القيمة **المتوقعة** لـ x، وهي ليست نفس الشيء مثل سرعة الجسيم. ما من شيء رأيناه حتى الآن سيمكننا من حساب سرعة الجسيم. ليس حتى من الواضح ما **تعنيه** السرعة في ميكانيكا الكم: إذا كان الجسيم ليس له موضع/إزاحة محدد (قبل القياس)، فإنه ليس لديه سرعة محددة بشكل جيد. كل ما يمكننا أن نطلبه بشكل معقول هو **احتمال** الحصول على قيمة معينة. سنرى في الفصل 3 كيفية إنشاء الكثافة الاحتمالية للسرعة، بإعطاء Ψ؛ في الوقت الحالي، يكفي افتراض أن **القيمة المتوقعة للسرعة تساوي المشتق الزمني للقيمة المتوقعة للموضع/للإزاحة**:

$$\langle v\rangle=\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t}. \tag{1.5}$$

تخبرنا المعادلة (1.4)، إذن، كيف نحسب $\langle v\rangle$ مباشرة من Ψ.

في الواقع، من المعتاد العمل مع الزخم/الاندفاع ($p=mv$)، بدلاً من السرعة:

$$\boxed{\langle p\rangle=m\frac{\mathrm{d}\langle x\rangle}{\mathrm{d}t}=-\imath\hbar\int\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\mathrm{d}x.} \tag{1.6}$$

اسمحوا لي أن أكتب عبارتي $\langle x\rangle$ و $\langle p\rangle$ بطريقة أكثر إيحائية:

$$\langle x\rangle=\int\Psi^*[x]\Psi\mathrm{d}x, \tag{1.7}$$

$$\langle p\rangle=\int\Psi^*\left[-\imath\hbar(\partial/\partial x)\right]\Psi\mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

نقول أن المؤثر x "يمثل" الموضع/الإزاحة، والمؤثر p "يمثل" الزخم؛ لحساب القيم المتوقعة نقوم "بتوسيط" المؤثر المناسب بين Ψ^* و Ψ، و نكامل.

هذا جميل، لكن ماذا عن المقادير الأخرى؟ الحقيقة هي أنه يمكن التعبير عن **جميع** المتغيرات الديناميكية الكلاسيكية بدلالة الموضع والزخم. الطاقة الحركية، على سبيل المثال، هي

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m},$$

و الزخم الزاوي هو

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

(هذا الأخير، بالطبع، لا يحدث لحركة في بعد واحد). لحساب القيمة المتوقعة **لأي** مقدار من هذا القبيل، $Q(x,p)$، نقوم بسهولة بإبدال كل p بـ $-\imath\hbar(\partial/\partial x)$، إدخال المؤثر الناتج بين Ψ^* و Ψ، و نكامل:

$$\boxed{\langle Q(x,p)\rangle = \int \Psi^* \left[Q(x, -\imath\hbar\partial/\partial x)\right] \Psi \, \mathrm{d}x.} \tag{1.9}$$

على سبيل المثال، القيمة المتوقعة للطاقة الحركية هي

$$\langle T\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\int \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\, \mathrm{d}x. \tag{1.10}$$

إن المعادلة (1.9) هي وصفة لحساب القيمة المتوقعة لأي مقدار ديناميكي، لجسيم في الحالة Ψ؛ إنها تتضمن المعادلتين (1.7) و (1.8) كحالتين خاصتين. لقد حاولت أن أجعل المعادلة (1.9) تبدو معقولة، بالنظر إلى التفسير الإحصائي لبورن، ولكن في الحقيقة هذه تمثل طريقة جديدة جذريًا للعمل (مقارنة بالميكانيكا الكلاسيكية) لدرجة أنه من الجيد ممارسة بعض التدريب باستخدامها قبل أن نعود (في الفصل 3) ونضعها على أساس نظري أكثر ثباتًا. في هذه الأثناء، إذا كنت تفضل التفكير في الأمر **كمُسَلَّمة**، فهذا جيد بالنسبة لي.

مسألة 1.6 لماذا لا يمكنك إجراء تكامل-بالتجزئة مباشرة على العبارة الوسطى في المعادلة (1.2)– اسحب مشتق الوقت نحو x، لاحظ أن $\partial x/\partial t = 0$، و استنتج أن $\mathrm{d}\langle x\rangle/\mathrm{d}t = 0$؟

مسألة 1.7 احسب $\mathrm{d}\langle p\rangle/\mathrm{d}t$. الإجابة:

$$\frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle \tag{1.11}$$

هذا مثال على نظرية **إهرنفست**، التي تؤكد أن **القيم المتوقعة تخضع للقوانين الكلاسيكية** .

مسألة 1.8 لنفترض أنك أضفت ثابتًا V_0 إلى الطاقة الكامنة (أعني بكلمة "ثابت" أنه مستقل عن x وكذلك t). في الميكانيكا الكلاسيكية لا يغير هذا أي شيء، ولكن ماذا عن ميكانيكا **الكم**؟ بين أن دالة الموجة تلتقط عامل طور يعتمد على الوقت: $\exp(-\imath V_0 y/\hbar)$. ما هو تأثير هذا على القيمة المتوقعة للمتغير الديناميكي؟

6.1 مبدأ الارتياب

الباب 2

معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن

1.2 الحالات المتوقفة

تحدثنا كثيرًا في الباب 1 عن الدالة الموجية، وكيف تستخدمها لحساب المقادير المختلفة ذات الأهمية. حان الوقت للتوقف عن المماطلة ومواجهة ما هو، منطقيًا، السؤال الأولي: كيف تحصل على $\Psi(x,t)$ في المقام الأول؟ نحن بحاجة إلى حل معادلة شرودنغر،

$$\imath\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\,\Psi, \tag{2.1}$$

لجهد محدد $V(x,t)$. في هذا الباب (ومعظم هذا الكتاب) سأفترض أن V مستقل عن t. في هذه الحالة يمكن حل معادلة شرودنغر بطريقة فصل المتغيرات (خط الهجوم الأول للفيزيائي على أي معادلة تفاضلية جزئية): نحن نبحث عن حلول تكون **جداءات** ،

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\varphi(t), \tag{2.2}$$

حيث ψ (أحرف صغيرة) هي دالة لـ x وحدها، و φ هي دالة لـ t وحدها. في ظاهره، هذا قيد غريب/غير معقول، ولا يمكننا أن نأمل في الحصول على أكثر من مجموعة فرعية صغيرة من مجموع الحلول بهذه الطريقة. لكن انتظر، لأن الحلول التي نحصل عليها ظهرت أنها ذات أهمية كبيرة. علاوة على ذلك (كما هو الحال عادةً مع فصل المتغيرات) سنكون قادرين في النهاية على دمج الحلول القابلة للفصل معًا بطريقة لإنشاء الحل الأعم.

من أجل حلول قابلة للفصل لدينا

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \psi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\varphi$$

(مشتقات عادية، الآن) ، وتقرأ معادلة شرودنغر

$$\imath\hbar\psi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\varphi + V\psi\varphi.$$

أو بالقسمة على $\psi\varphi$:

$$\imath\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + V. \tag{2.3}$$

الآن، الطرف الأيسر دالة للمتغير t وحده، والطرف الأيمن دالة للمتغير x وحده. الطريقة الوحيدة التي يمكن أن يكون بها هذا صحيحًا هي إذا كان كلا الجانبين في الواقع **ثابتًا** – وإلا، من خلال تغيير t، يمكنني تغيير الجانب الأيسر دون لمس الجانب الأيمن، ولن يكون الطرفان متساويين. (هذه حجة دقيقة ولكنها حاسمة، لذا إذا كانت جديدة بالنسبة لك، فتأكد من التوقف والتفكير فيها مليًا.) للأسباب التي ستظهر قريبا/في لحظة، سنطلق على ثابت الفصل E. ومن ثم

$$\imath\hbar\frac{1}{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = E,$$

أو

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\imath E}{\hbar}\varphi, \tag{2.4}$$

و

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + V = E,$$

أو

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + V\psi = E\psi.} \tag{2.5}$$

أدى فصل المتغيرات إلى تحويل معادلة تفاضلية **جزئية** إلى معادلتين تفاضليتين **عاديتين** (المعادلتان (2.4) و (2.5)). أولاهما سهلة الحل (فقط اضرب في $\mathrm{d}t$ و قم بالتكامل)؛ الحل العام هو $C\exp(-\imath Et/\hbar)$، ولكن يمكننا أيضًا امتصاص الثابت C في ψ (نظرًا لأن المقدار المهم هو الجداء $\psi\varphi$). ومنه

$$\varphi(t) = e^{-\imath Et/\hbar}. \tag{2.6}$$

الثانية (المعادلة (2.5)) تسمى **معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن**؛ لا يمكننا أن نذهب بعيدا معها حتى يتم تحديد الجهد $V(x)$.

سيخصص الجزء المتبقي من هذا الباب لحل معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن لمجموعة متنوعة من الجهود البسيطة. لكن قبل أن أتطرق إلى ذلك، لك كل الحق في أن تسأل: ما هو الشيء العظيم/المميز في الحلول القابلة للفصل؟ بعد كل شيء، فإن معظم حلول معادلة شرودنغر (المعتمدة على الزمن) لا تأخذ شكل $\psi(x)\varphi(t)$. أقدم ثلاث إجابات - اثنتان منها فيزيائية وواحدة رياضية:

1. هي **حالات ثابت/متوقفة**. على الرغم من أن الدالة الموجية نفسها،

$$\psi(x,t) = \psi(x)\, e^{-\imath Et/\hbar}, \tag{2.7}$$

(من الواضح) أنها تعتمد على t، **كثافة الاحتمال**،

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*\Psi = \psi^*\, e^{+\imath Et/\hbar}\, \psi\, e^{-\imath Et/\hbar} = |\psi(x)|^2, \tag{2.8}$$

لا- الاعتماد على الزمن يلغى. يحدث الشيء نفسه عند حساب القيمة المتوقعة لأي متغير ديناميكي؛ تختزل المعادلة (1.9) إلى

$$\langle Q(x,p)\rangle = \int \psi^* \left[Q\left(x, -\imath\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\right] \psi\, \mathrm{d}x. \tag{2.9}$$

كل **قيمة متوقعة ثابتة** في الزمن؛ يمكننا أيضًا إسقاط المعامل $\varphi(t)$ تمامًا، واستخدام ψ بدلاً من Ψ. (في الواقع، من الشائع الإشارة إلى ψ على أنها "دالة الموجة"، ولكن هذه لغة متساهلة يمكن أن تكون خطيرة، ومن المهم أن نتذكر أن دالة الموجة الحقيقية تحمل دائمًا عامل التذبذب المعتمد على الزمن.) على وجه الخصوص، $\langle x\rangle$ ثابت، وبالتالي (المعادلة (1.6)) $\langle p\rangle = 0$. لا شيء يحدث أبدا في حالة متوقفة/ثابتة.

2. إنها حالات **طاقة إجمالية محددة**. في الميكانيكا الكلاسيكية، تسمى الطاقة الكلية (الحركية بالإضافة إلى الكامنة) بالهاميلتوني:

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{2.10}$$

المؤثر الهاميلتوني الموافق، الذي تم الحصول عليه عن طريق الاستبدال المقنن $p \to -\imath\hbar(\partial/\partial x)$، هو بالتالي

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = V(x). \tag{2.11}$$

وبالتالي يمكن كتابة معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن (المعادلة (2.5))

$$\hat{H}\psi = E\psi, \tag{2.12}$$

والقيمة المتوقعة للطاقة الإجمالية هي

$$\langle H\rangle = \int \psi^* \hat{H}\psi \mathrm{d}x = \int \psi^*\, E\, \psi\, \mathrm{d}x = E\int |\psi|^2 \mathrm{d}x = E. \tag{2.13}$$

(لاحظ أن استنظام Ψ يستلزم استنظام ψ.) علاوة على ذلك،

$$\hat{H}^2\psi = \hat{H}(\hat{H}\psi) = \hat{H}(E\psi) = E(\hat{H}\psi) = E^2\psi,$$

وبالتالي

$$\langle H^2 \rangle = \int \psi^* \hat{H}^2 \psi \, \mathrm{d}x = E^2 \int |\psi|^2 \mathrm{d}x = E^2.$$

ومنه فإن متغير $\hat{H}$

$$\sigma_H^2 = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 = E^2 - E^2 = 0. \tag{2.14}$$

لكن تذكر، إذا كانت $\sigma = 0$، فيجب على كل عنصر في العينة أن يشترك في نفس القيمة (التوزيع له انتشار معدوم). الخلاصة: الحل القابل للفصل له خاصية أن كل قياس للطاقة الإجمالية سيعطي القيمة E. (لهذا السبب اخترت هذا الحرف لثابت الفصل.)

3. الحل العام هو **تركيب خطي** من الحلول القابلة للفصل. كما نحن على وشك الاكتشاف، فإن معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن (المعادلة (2.5)) تنتج مجموعة لا نهائية من الحلول $(\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \ldots$، والتي نكتبها كـ $\{\psi_n(x)\}$)، لكل منها ثابت فصل $(E_1, E_2, E_3, \ldots = \{E_n\})$؛ وبالتالي هناك دالة موجية مختلفة لكل **طاقة مسموح** بها:

$$\Psi_1(x,t) = \psi_1(x)\, e^{-\imath E_1 t/\hbar}, \qquad \Psi_2(x,t) = \psi_2(x)\, e^{-\imath E_2 t/\hbar}, \ldots$$

الآن (كما يمكنك التحقق بنفسك بسهولة) فإن معادلة شرودنغر (المعتمدة على الزمن) (المعادلة (2.1)) لها خاصية أن أي تركيب خطي من الحلول هو بحد ذاته حل. بمجرد إيجاد الحلول القابلة للفصل، يمكننا فورًا إنشاء حل أكثر عموما، من الشكل

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \, \psi_n(x)\, e^{-\imath E_n t/\hbar}. \tag{2.15}$$

يحدث أن كل حل لمعادلة شرودنغر (المعتمدة على الزمن) يمكن كتابته بهذه الشكل - إنها ببساطة مسألة إيجاد الثوابت الصحيحة $(c_1, c_2, \ldots)$، بحيث تتلاءم مع **الشروط الأولية** للمسألة المطروحة. سترى في الفصول التالية كيف يعمل كل هذا في الواقع، وفي الباب 3 سنضعه في لغة أكثر أناقة. لكن النقطة الأساسية هي: بمجرد حل معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن، فقد أتممت؛ الانتقال من هناك إلى الحل العام لمعادلة شرودنغر المعتمدة على الزمن هو، من حيث المبدأ، بسيط وسهل.

لقد حدث الكثير في الصفحات الأربع الماضية، لذا اسمحوا لي أن ألخص، من منظور مختلف نوعًا ما. ها هي المسألة العامة: يتم إعطاؤك الجهد $V(x)$ (مستقل عن الزمن)، والدالة الموجية الابتدائية $\Psi(x,0)$؛ مهمتك هي العثور على الدالة الموجية، $\Psi(x,t)$، لأي زمن لاحق. للقيام بذلك، يجب عليك حل معادلة شرودنغر (المعتمدة على الزمن) (المعادلة (2.1)). الاستراتيجية هي أولاً حل معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن (المعادلة (2.5))؛ ينتج عن هذا، بشكل عام، مجموعة لا حصر لها من الحلول، $\{\psi_n(x)\}$، لكل منها طاقتها الخاصة، $\{E_n\}$. لموافقة/مطابقة

$\Psi(x,0)$، قم بتدوين التركيب الخطي العام لهذه الحلول:

$$\Psi(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\psi_n(x); \tag{2.16}$$

المعجزة هي أنه يمكنك دائمًا مطابقة/موافقة الحالة الأولية المحددة عن طريق الاختيار المناسب للثوابت $\{c_n\}$. لإنشاء $\Psi(x,t)$، يمكنك ببساطة الحاق كل جزء باعتماده المميز على الزمن ("معامل التذبذب")، $\exp(-\imath E_n t/\hbar)$:

$$\boxed{\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\psi_n(x)\,e^{-\imath E_n t/\hbar}=\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\Psi_n(x,t).} \tag{2.17}$$

الحلول القابلة للانفصال نفسها،

$$\Psi_n(x,t)=\psi_n(x)\,e^{-\imath E_n t/\hbar}, \tag{2.18}$$

هي حالات متوقفة، بمعنى أن جميع الاحتمالات والقيم المتوقعة مستقلة عن الزمن، ولكن هذه الخاصية قطعا لا يشاركها فيها الحل العام (المعادلة (2.17)): الطاقات مختلفة، بالنسبة للحالات المتوقفة المختلفة، ولا تلغى الأسيات، عندما تقوم بإنشاء $|\Psi|^2$.

مثال 2.1

لنفترض أن جسيما يبدأ في تركيب خطي من حالتين متوقفتين فقط:

$$\Psi(x,0)=c_1\psi_1+c_2\psi_2.$$

(لتبسيط الأمور، سأفترض أن الثوابت c_n والحالات ψ_n حقيقية.) ما هي الدالة الموجية $\Psi(x,t)$ في الأزمنة اللاحقة؟ أوجد كثافة الاحتمال، وصف حركته.

الحل: الجزء الأول سهل:

$$\Psi(x,t)=c_1\psi_1\,e^{-\imath E_1 t/\hbar}+c_2\psi_2\,e^{-\imath E_2 t/\hbar},$$

حيث E_1 و E_2 هما الطاقتان المرتبطتان بـ ψ_1 و ψ_2. يتبع هذا

$$\begin{aligned}|\Psi(x,t)|^2&=\left(c_1\psi_1\,e^{\imath E_1 t/\hbar}+c_2\psi_2\,e^{\imath E_2 t/\hbar}\right)\left(c_1\psi_1\,e^{-\imath E_1 t/\hbar}+c_2\psi_2\,e^{-\imath E_2 t/\hbar}\right)\\&=c_1^2\psi_1^2+c_2\psi_2^2+2c_1c_2\psi_1\psi_2\cos\left[(E_2-E_1)t/\hbar\right].\end{aligned}$$

كثافة الاحتمال تتذبذب جيبيًا، بتردد زاوي $\omega=(E_2-E_1)/\hbar$ ؛ هذه بالتأكيد ليست حالة متوقفة. لكن لاحظ أن الأمر يتطلب تركيبا خطيا من الحالات المتوقفة (ذات الطاقات المختلفة) لإنتاج حركة.

قد تتساءل ماذا تمثل المعاملات $\{c_n\}$ فيزيائيًا. سأخبرك بالإجابة، على الرغم من أن الشرح يجب أن ينتظر إلى الباب 3:

$$|c_n|^2 \text{ : هو احتمال أن يعطي قياس للطاقة القيمة } E_n \tag{2.19}$$

سينتج عن قياس مختص/مؤهل/كفؤ دائمًا إحدى القيم "المسموح بها" (ومن هنا جاءت التسمية)، و $|c_n|^2$ هو احتمال الحصول على القيمة المعينة E_n. بالطبع يجب أن يكون مجموع هذه الاحتمالات 1:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1,} \tag{2.20}$$

ويجب أن تكون القيمة المتوقعة للطاقة

$$\boxed{\langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \, E_n.} \tag{2.21}$$

سنرى قريبًا كيف يتم ذلك في بعض الأمثلة الملموسة. لاحظ أخيرًا أنه نظرًا لأن الثوابت $\{c_n\}$ مستقلة عن الزمن، وكذلك احتمال الحصول على طاقة معينة، ومن باب أولى، القيمة المتوقعة لـ H. هذه هي مظاهر **انحفاظ الطاقة** في ميكانيكا الكم.

المسألة 2.1 برهن النظريات الثلاث التالية:

(a) من أجل الحلول القابلة للاستنظام، يجب أن يكون ثابت الفصل E حقيقيًا. تلميح: اكتب E (في المعادلة (2.7)) كـ: $E_0 + \Gamma$ (مع E_0 و Γ حقيقي)، وبين أنه إذا كانت المعادلة (??) ستبقى صالحة من أجل كل t ، يجب أن تكون Γ صفرًا.

(b) يمكن دائمًا اعتبار الدالة الموجية المستقلة عن الزمن $\psi(x)$ حقيقية (على عكس $\Psi(x,t)$، والتي تعتبر مركبة بالضرورة). هذا لا يعني أن كل حل لمعادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن هو حل حقيقي؛ ما نقوله هو أنه إذا كان لديك حل ليس كذلك، فيمكن التعبير عنه دائمًا كمجموعة/كتركيب خطي من الحلول (بنفس الطاقة) التي هي كذلك. لذلك قد تتمسك أيضًا بـ ψs التي تكون حقيقية. تلميح: إذا كانت $\psi(x)$ تحقق المعادلة (2.5)، من أجل E معين، كذلك يفعل المرافق، وبالتالي أيضًا التركيبان الخطيان الحقيقيان $(\psi + \psi^*)$ و $(\psi - \psi^*)$

(c) إذا كانت $V(x)$ دالة زوجية (أي $V(-x) = V(x)$)، فيمكن اعتبار $\psi(x)$ دائمًا إما زوجيًا أو فردية. تلميح: إذا كانت $\psi(x)$ تحقق بالمعادلة (2.5)، من أجل E معين، فإن $\psi(-x)$ تفعل ذلك أيضًا، وبالتالي أيضًا التراكيب الخطية الفردية والزوجية $\psi(x) \pm \psi(-x)$.

المسألة 2.2* بين أن E يجب أن تتجاوز الحد الأدنى لقيمة $V(x)$، لكل حل قابل للاستنظام لمعادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن. ما هو المُنَاظر الكلاسيكي لهذه العبارة؟ تلميح: أعد كتابة المعادلة (2.5) في الشكل

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left[V(x) - E\right]\psi;$$

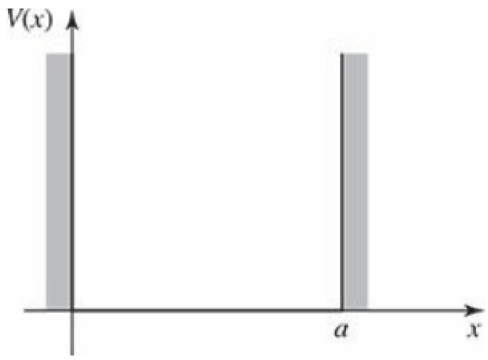
إذا كان $E < V_{\min}$ ، فإن ψ ومشتقه الثاني لهما دائمًا نفس الإشارة – ناقش بأن مثل هذه الدالة لا يمكن استنظامها.

2.2 البئر المربع اللانهائي

لنفترض أن

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a, \\ \infty, & \text{ما عدا ذلك} \end{cases} \tag{2.22}$$

(الشكل **2.1**). يكون الجسيم في هذا الجهد حرًا تمامًا، باستثناء الطرفين ($x = 0$ و $x = a$)، حيث تمنعه قوة لانهائية من الهروب. سيكون النموذج الكلاسيكي عبارة عن عربة على مسار هوائي أفقي بدون احتكاك، مع ممتص صدامات مرنة تمامًا – ستبقى في ارتداد ذهابًا وإيابًا إلى الأبد. (هذا الجهد مصطنع بالطبع، لكنني أحثك على معاملته باحترام. على الرغم من بساطته - أو بالأحرى، بسبب بساطته على وجه التحديد - فهو بمثابة اختبار يمكن الوصول إليه بشكل رائع، لجميع الطرق البارعة/الجميلة التي تأتي لاحقًا. سنشير إليه كثيرًا.) خارج البئر، $\psi(x) = 0$ (احتمال



الشكل 2.1: جهد البئر المربع اللانهائي (المعادلة (2.22)).

العثور على الجسيم هناك **صفر**). داخل البئر، حيث تقرأ معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن (المعادلة (2.5))

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi, \tag{2.23}$$

أو

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -k^2\psi, \qquad \text{حيث} \qquad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \tag{2.24}$$

(من خلال كتابتها بهذه الطريقة، افترضت ضمنيًا أن $E \geq 0$؛ نعلم من المسألة **1.2** أن $E < 0$ لن تعمل.) المعادلة (2.24) هي معادلة **المتذبذب التوافقي البسيط** الكلاسيكي؛ الحل العام هو

$$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx, \tag{2.25}$$

حيث A و B ثوابت كيفية. عادة، يتم تحديد هذه الثوابت من خلال **لشروط الحدية** للمسألة. ما هي الشروط الحدية المناسبة لـ ψ؟ عادةً ما يكون كل من ψ و $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}x$ مستمرين، ولكن عندما يذهب الجهد إلى ما لا نهاية، يتم

تطبيق أولاهما فقط. (**سأبرر** هذه الشروط الحدية، وحساب الاستثناء عند $V = \infty$، في الفصل ?? ؛ في الوقت الحالي آمل أن تثق بي.)

تتطلب استمرارية $\psi(x)$

$$\psi(0) = \psi(a) = 0, \tag{2.26}$$

وذلك لتتحد مع الحل خارج البئر. ماذا يخبرنا هذا عن A و B؟ حسنا،

$$\psi(0) = A\sin 0 + B\cos 0 = B,$$

إذن $B = 0$ ومنه

$$\psi(x) = A\sin kx. \tag{2.27}$$

وعليه $\psi(a) = A\sin ka$ ومنه إما $A = 0$ (في هذه الحالة يتبقى لنا الحل التافه/الغير مهم - غير القابل للاستنظام- $\psi(x) = 0$)، أو $\sin ka = 0$ والتي تعني أن

$$ka = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots \tag{2.28}$$

لكن $k = 0$ ليس جيدًا (مرة أخرى، قد يعني ذلك ضمنيًا $\psi(x) = 0$)، والحلول السلبية لا تقدم شيئًا جديدًا، نظرًا لأن $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ ويمكننا استيعاب علامة الطرح في A. لذا فإن الحلول **المتميزة/المختلفة** هي

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \text{حيث} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.29}$$

من الغريب أن الشرط الحدي عند $x = a$ لا يحدد الثابت A، بل يحدد الثابت k، وبالتالي القيم المحتملة لـ E:

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.} \tag{2.30}$$

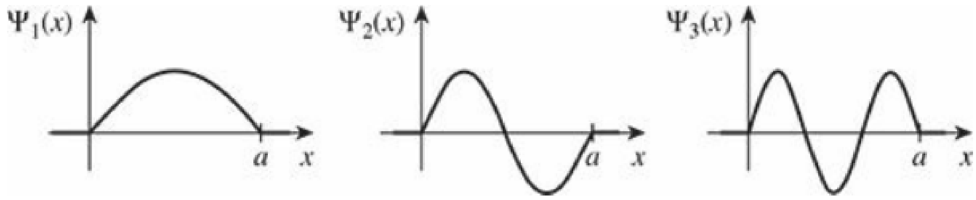
في تناقض جذري مع الحالة الكلاسيكية، لا يمكن أن يكون للجسيم الكمي في البئر المربع اللانهائي أي طاقة قديمة - يجب أن يكون أحد هذه القيم الخاصة ("المسموح بها"). للعثور على A ، نقوم بتطبيع ψ:

$$\int_0^a |A|^2 \sin^2(kx)\mathrm{d}x = |A|^2\,\frac{a}{2} = 1, \quad \text{إذن} \quad |A|^2 = \frac{2}{a}.$$

يحدد هذا مقدار A فقط، ولكن من الأسهل اختيار الجذر الحقيقي الموجب: $A = \sqrt{2/a}$. (طور A لا يحمل أي أهمية فيزيائية على أي حال). داخل البئر، الحلول هي

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).} \tag{2.31}$$

كما وعدنا، قدمت معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن مجموعة لا نهائية من الحلول (واحد لكل عدد صحيح موجب n. تم رسم القليل من هذه الحلول في الشكل 2.2. إنها تشبه تمامًا الموجات المتوقفة على حبل/خيط طوله a؛ ψ_1، التي تحمل أقل طاقة، تسمى **الحالة الأرضية**، وتسمى الحالات الأخرى، التي تزداد طاقاتها بما يتناسب مع n^2، **حالات مثارة/محفزة**. كمجموعة، فإن الدوال $\psi_n(x)$ لها بعض الخصائص المهمة والمثيرة للانتباه:



الشكل 2.2: الحالات الثلاثة الأولى المتوقفة للبئر المربع اللانهائي (المعادلة (2.31)).

1. إنها **زوجية** و **فردية** بالتناوب، بالنسبة لمركز البئر: ψ_1 زوجية، ψ_2 فردية، ψ_3 زوجية، وهكذا.

2. مع ارتفاعك في الطاقة، تحتوي كل حالة تالية على **عقدة** واحدة إضافية (عبور-صفري): ψ_1 ليس لديها أي عقدة (نقطتا النهاية لا يتم احتسابهما)، ψ_2 لها واحدة، ψ_3 لها نقطتان ، وهكذا.

3. إنها **متعامدة** بشكل متبادل/مثنى مثنى، بمعنى أن

$$\int \psi_m^*(x)\,\psi_n(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad (m \neq n) \tag{2.32}$$

البرهان:

$$\begin{aligned}
\int \psi_m^*(x)\,\psi_n(x)\mathrm{d}x &= \frac{2}{a}\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\int_0^a \left[\cos\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \cos\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right]\mathrm{d}x \\
&= \left\{\frac{1}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{m-n}{a}\pi x\right) - \frac{1}{(m+n)\pi}\sin\left(\frac{m+n}{a}\pi x\right)\right\}\Big|_0^a \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sin[(m-n)\pi]}{(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)\pi]}{(m+n)}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

لاحظ أن هذه الحجة لا تعمل إذا كان $m = n$. (هل يمكنك تحديد النقطة التي تفشل عندها؟) في هذه الحالة يخبرنا الاستنظام أن التكامل هو 1. في الواقع، يمكننا الجمع بين التعامد والاستنظام في عبارة واحدة:

$$\boxed{\int \psi_m^*(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn},} \tag{2.33}$$

حيث δ_{nm} (المسمى **دلتا كرونيكر**) مُعرف بـ

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases} \tag{2.34}$$

نقول إن ψ **متعاظمة**.

4. إنها **كاملة/تامة**، بمعنى أن أي دالة أخرى، $f(x)$ يمكن التعبير عنها كتركيب خطي منها:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \tag{2.35}$$

لست على وشك إثبات اكتمال/تمام الدوال $\sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a)$، ولكن إذا درست الحساب المتقدم، فسوف تدرك أن المعادلة (2.35) ليست سوى متسلسلة فوريه لـ $f(x)$، وحقيقة أنه يمكن نشر أي دالة بهذا طريقة تسمى أحيانًا **نظرية ديريتشليت**.

يمكن تحديد المعاملات c_n - من أجل $f(x)$ معطاة - من خلال طريقة أسميها **خدعة فوريه**، والتي تستغل بشكل جميل العلاقة المتعاظمية لـ $\{\psi_n\}$: اضرب كلا طرفي المعادلة (2.35) بواسطة $\psi_m^*(x)$، وقم بالتكامل.

$$\int \psi_m^*(x)\, f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int \psi_m^*(x)\, \psi_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\delta_{nm} = c_m. \tag{2.36}$$

(لاحظ كيف تقتل دلتا كرونيكر كل معامل في المجموع باستثناء المعامل الذي من أجله $n = m$). وبالتالي فإن المعامل n في نشر $f(x)$ هو

$$\boxed{c_n = \int \psi_n^*(x)\, f(x)\mathrm{d}x.} \tag{2.37}$$

هذه الخصائص الأربعة قوية للغاية، وهي ليست خاصة ب البئر المربع اللامتناهي/اللانهائي. الأولى صحيحة عندما يكون الجهد نفسه دالة متماثلة؛ والثانية عامة/عالمية، بغض النظر عن شكل الجهد. التعامد أيضًا عام جدًا - سأبين لك البرهان في الباب 3. التتميم/الاكتمال صحيح لجميع الجهود التي من المحتمل أن تواجهها، لكن البراهين تميل إلى أن تكون سيئة/معقدة وشاقة؛ أخشى أن معظم الفيزيائيين **يفترضون** ببساطة الاكتمال/التتميم ويأملون في الأفضل.

الحالات المتوقفة (المعادلة (2.18)) للبئر المربع اللانهائي هي

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, e^{-\imath\left(n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2\right)t}. \tag{2.38}$$

لقد زعمت (المعادلة (2.17)) أن الحل الأكثر عمومية لمعادلة شرودنغر (المعتمدة على hg.lk) هو تركيب خطي من الحالات المتوقفة:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\, e^{-\imath\left(n^2\pi^2\hbar^2/2ma^2\right)t}. \tag{2.39}$$

يضمن اكتمال/تتميم ψs (تم تأكيده في هذه الحالة من خلال نظرية ديريتشليت) أنه يمكنني دائمًا التعبير عن $\Psi(x,t)$ بهذه الطريقة، كما أن تعاظميتهم تجيز استخدام خدعة فوريه لتحديد المعاملات الفعلية:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{a}}\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\,\psi(x,0)\,\mathrm{d}x. \tag{2.40}$$

هذا يفعلها: بإعطاء الدالة الموجية الأولية، $\Psi(x,0)$، نحسب أولاً معاملات النشر c_n، باستخدام المعادلة (2.40)، ثم نعوضها في المعادلة (2.39) للحصول على $\Psi(x,t)$. مسلحين بالدالة الموجية، نحن في وضع يمكننا من حساب أي مقادير ديناميكية ذات أهمية، باستخدام الإجراءات الواردة في الباب 1. وهذه الطقوس نفسها تنطبق على أي جهد - الأشياء الوحيدة التي تتغير هي الشكل الوظيفي لـ ψ ومعادلة الطاقات المسموح بها.

مثال 2.2 جسيم في بئر مربع لانهائي له الدالة الموجية الأولية

$$\Psi(x,0) = Ax(a-x), \qquad (0 \le x \le a),$$

من أجل ثابت A (انظر الشكل **2.3**). خارج البئر، بالطبع، $\Psi = 0$. أوجد $\Psi(x,t)$.

الحل: أولًا نحتاج إلى تحديد A باستنظام $\Psi(x,0)$:

$$1 = \int_0^a |\Psi(x.,0)|^2 \mathrm{d}x = |A|^2 \int_0^a x^2(a-x)^2 \mathrm{d}x = |A|^2 \frac{a^5}{30},$$

إذن

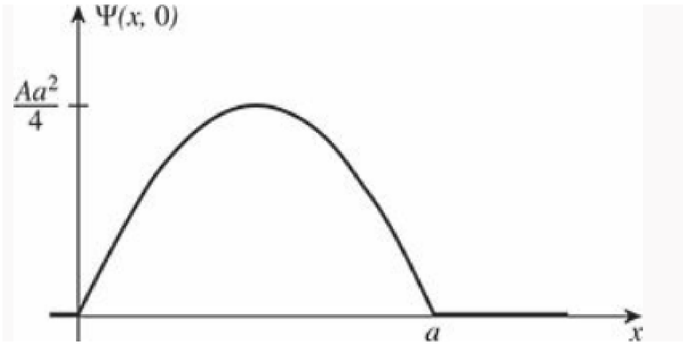
$$A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}.$$

المعامل n هو (المعادلة (2.40))

$$\begin{aligned}
c_n &= \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sqrt{\frac{30}{a^5}} x(a-x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\left[a\int_0^a x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x - \int_0^a x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right] \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\left\{a\left[\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{ax}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]_0^a\right. \\
&\left. - \left[2\left(\frac{a}{n\pi}\right)^2 x\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) - \frac{(n\pi x/a)^2 - 2}{(n\pi/a)^3}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right]_0^a\right\} \\
&= \frac{2\sqrt{15}}{a^3}\left[-\frac{a^3}{n\pi}\cos(n\pi) + a^3\frac{(n\pi)^2-2}{(n\pi)^3}\cos(n\pi) + a^3\frac{2}{(n\pi)^3}\cos(0)\right] \\
&= \frac{4\sqrt{15}}{(n\pi)^3}\left[\cos(0) - \cos(n\pi)\right] \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ زوجي} \\ 8\sqrt{15}/(n\pi)^3, & n \text{ فردي} \end{cases}
\end{aligned}$$

ومنه (المعادلة (2.39))

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{30}{a}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) e^{-\imath n^2\pi^2\hbar t/2ma^2}.$$



الشكل 2.3: الدالة الموجية الابتدائية في المثال 2.2.

مثال 2.3 تأكد من أن المعادلة (2.20) محققة من أجل الدالة الموجية في المثال 2.2. إذا قمت بقياس طاقة جسيم في هذه الحالة ، فما هي النتيجة الأكثر احتمالا؟ ما هي القيمة المتوقعة للطاقة؟

الحل: تشبه الدالة الموجية الابتدائية (الشكل 2.3) عن كثب الحالة الأرضية ψ_1 (الشكل 2.2). هذا يشير إلى أن $|c_1|^2$ يجب أن يهيمن، وفي الواقع

$$|c_1|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\right)^2 = 0.998555\ldots$$

تشكل باقي المعاملات الفرق:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 = \left(\frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}\right)^2 \sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^6} = 1.$$

النتيجة الأكثر احتمالا لقياس الطاقة هي $E_1 = \pi^2\hbar^2/2ma^2$ - أكثر من 99.8٪ من جميع القياسات ستعطي هذه القيمة. القيمة المتوقعة للطاقة (المعادلة (2.21)) هي

$$\langle H\rangle = \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\left(\frac{8\sqrt{15}}{n^3\pi^3}\right)^2\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2} = \frac{480\hbar^2}{\pi^4 ma^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{1}{n^4} = \frac{5\hbar^2}{ma^2}.$$

كما قد يتوقع الواحد، إنها قريبة جدًا من E_1 (5 بدلاً من $\pi^2 \approx 4.935$) - أكبر قليلاً، بسبب اختلاط/امتزاج الحالات المثارة.

بالطبع، ليس من قبيل المصادفة أن المعادلة (2.20) ظهرت بشكل صحيح في المثال 2.2. في الواقع، هذه تأتي من استنظام Ψ (c_n مستقلة عن الزمن، لذلك سأقوم بالبرهان من أجل $t = 0$؛ إذا كان هذا يزعجك، يمكنك بسهولة

تعميم البرهان إلى t كيفي).

$$
\begin{aligned}
1 &= \int |\Psi(x,0)|^2 \mathrm{d}x = \int \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(x)\right)^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)\right) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_m^* c_n \delta_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2.
\end{aligned}
$$

(مرة أخرى، تختار دلتا كرونيكر المعامل $m = n$ في الجمع على m.) وبالمثل، يمكن التحقق من القيمة المتوقعة للطاقة (المعادلة (2.21)) بشكل صريح: تقول معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن (المعادلة (2.12))

$$\hat{H}\psi_n = E_n \psi_n, \tag{2.41}$$

أو

$$
\begin{aligned}
\langle H \rangle &= \int \Psi^* \hat{H} \Psi \mathrm{d}x = \int \left(\sum c_m \psi_m\right)^* \hat{H} \left(\sum c_n \psi_n\right) \mathrm{d}x \\
&= \sum\sum c_m^* c_n \, E_n \int \psi_m^* \psi_n \mathrm{d}x = \sum |c_n|^2 E_n.
\end{aligned}
$$

المسألة 2.3 بين أنه لا يوجد حل مقبول لمعادلة شرودنغر (المستقلة عن الزمن) للبئر المربع اللانهائي بـ $E = 0$ أو $E < 0$. (هذه حالة خاصة للنظرية العامة في المسألة **1.2**، ولكن هذه المرة قم بذلك عن طريق حل معادلة شرودنغر بشكل صريح، وبين أنك لا تستطيع تحقيق الشروط الحدية.)

المسألة 2.4* أحسب $\langle x\rangle, \langle x^2\rangle, \langle p\rangle, \langle p^2\rangle, \sigma_x, \sigma_p$، للحالة المتوقفة n للبئر المربع اللانهائي. تأكد من أن مبدأ الارتياب محقق. ما هي الحالة الأقرب إلى حد الارتياب؟

المسألة 2.5* جسيم في البئر المربع اللانهائي له كدالة موجية أولية مزيج متساوٍ من أول حالتين متوقفتين:

$$\Psi(x,0) = A\left[\psi_1(x) + \psi_2(x)\right].$$

(a) استنظم $\Psi(x,0)$. (أي، أوجد A. هذا سهل للغاية، إذا استغليت العلاقة التعاظمية لكل من ψ_1 و ψ_2. تذكر أنه بعد الاستنظام عند $t=0$، يمكنك أن تطمئن إلى أنها ستبقى مستنظمة - إذا كنت تشك في ذلك، فتحقق منه بشكل صريح بعد القيام بالجزء (b) .)

(b) أوجد $\Psi(x,t)$ و $|\Psi(x,t)|^2$. عبر عن الأخيرة كدالة جيبية للزمن، كما في المثال **1.2**. لتبسيط النتيجة، دع $\omega \equiv \pi^2\hbar/2ma^2$.

(c) أحسب $\langle x\rangle$. لاحظ أنه يتذبذب مع الزمن. ما هو التردد الزاوي للتذبذب؟ ما سعة التذبذب؟ (إذا كانت السعة أكبر من $a/2$، فاذهب مباشرة إلى السجن.)

(d) أحسب $\langle p\rangle$. (كما قد يقول بيتر لوور: "افعلها بالطريقة السريعة، جوني!")

(e) إذا قمت بقياس طاقة هذا الجسيم، فما هي القيم التي قد تحصل عليها، وما هو احتمال الحصول على كل منها؟ أوجد القيمة المتوقعة لـ H. كيف تُقَارن مع E_1 و E_2؟

المسألة 2.6 على الرغم من أن ثابت الطور **الكلي** للدالة الموجية ليس له أهمية فيزيائية (يُختزل كلما قمت بحساب مقدار قابل للقياس)، فإن الطور **النسبي** للمعاملات في المعادلة (2.17) مهمة. على سبيل المثال، افترض أننا قمنا بتغيير الطور النسبي لـ ψ_1 و ψ_2 في المسألة **2.2**:

$$\Psi(x,0) = A\left[\psi_1(x) + e^{i\varphi}\psi_2(x)\right],$$

حيث φ ثابت ما. أوجد $\Psi(x,t)$ و $|\Psi(x,t)|^2$ وقارن نتائجك بما حصلت عليه من قبل. أدرس الحالات الخاصة $\varphi=\pi/2$ و $\varphi=\pi$. (من أجل استكشاف بياني لهذه المسألة، انظر التطبيق الحاسوبي في الهامش 9 من هذا الباب.)

المسألة 2.7* جسيم في بئر مربع لانهائي له دالة موجة ابتدائية

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq a/2, \\ A(a-x), & a/2 \leq x \leq a. \end{cases}$$

(a) أرسم $\Psi(x,0)$ و حدد الثابت A.

(b) أوجد $\Psi(x,t)$.

(c) ما هو احتمال أن ينتج عن قياس الطاقة القيمة E_1؟

(d) أوجد القيمة المتوقعة للطاقة باستخدام المعادلة (2.21).

المسألة 2.8 يبدأ جسيم كتلته m في بئر مربع لانهائي (بعرض a) في الحالة

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} A, & 0 \leq x \leq a/2, \\ 0, & a/2 \leq x \leq a, \end{cases}$$

من أجل ثابت ما A، إذن إنها (عند $t=0$) متساوية الاحتمال أن توجد في أي نقطة في النصف الأيسر من البئر. ما هو احتمال أن ينتج عن قياس الطاقة (في زمن لاحق) القيمة $\pi^2\hbar^2/2ma^2$؟

المسألة 2.9 بالنسبة للدالة الموجية في المثال **2.2**، أوجد القيمة المتوقعة لـ H، عند الزمن $t=0$، "الطريقة القديمة":

$$\langle H \rangle = \int \Psi^*(x,0)\, \hat{H}\, \Psi(x,0) \mathrm{d}x.$$

قارن النتيجة التي حصلنا عليها في المثال **2.2**. ملاحظة: نظرًا لأن $\langle H \rangle$ مستقل عن الزمن، فلا يوجد فقدان للعمومية في استخدام $t=0$.

3.2 المتذبذب التوافقي

نموذج المتذبذب التوافقي الكلاسيكي هو كتلة m مرتبطة بنابض ذي ثابت مرونة k. تخضع الحركة **لقانون هوك**،

$$F = -kx = m\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t^2}$$

(بإهمال الاحتكاك) والحل هو

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t),$$

حيث

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.42}$$

هو التردد (الزاوي) للتذبذب. الطاقة الكامنة هي

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2; \tag{2.43}$$

منحناه البياني هو قطع مكافئ.

بالطبع، لا يوجد شيء مثل المتذبذب التوافقي **المثالي** - إذا قمت بتمديده بعيدا/كثيرا، فسوف ينقطع النابض، وعادة ما يفشل قانون هوك بوقت طويل قبل الوصول إلى هذه النقطة. ولكن من الناحية العملية، فإن أي جهد يكون **بالتقريب** قطعا مكافئًا، في جوار حد أدنى محلي (الشكل 2.4). بشكل رسمي، إذا قمنا بنشر $V(x)$ في متسلسلة تايلور حول الحد الأدنى:

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots ,$$

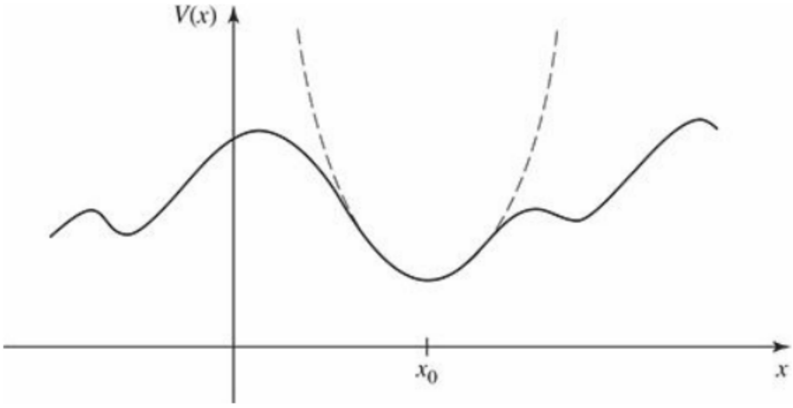
اطرح $V(x_0)$ (يمكنك إضافة ثابت إلى $V(x)$ بحصانة، لأن ذلك لا يغير القوة) ، لاحظ/اعرف أن $V'(x_0) = 0$ (لأن x_0 هو الحد الأدنى)، وقم بإسقاط المعاملات ذات الترتيب-الأعلى (التي تكون مهملة طالما بقيت $(x - x_0)$ صغيرة) ، نحصل على

$$V(x) \approx \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2,$$

الذي يصف التذبذب التوافقي البسيط (حول النقطة x_0، مع ثابت مرونة فعال $k = V''(x_0)$. ولهذا السبب فإن المتذبذب التوافقي البسيط مهم للغاية: تقريبًا أي حركة تذبذبية هي بالتقريب توافقية بسيطة، طالما أن السعة صغيرة.

المسألة الكمومية/الكمية هي حل معادلة شرودنغر من أجل الجهد

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{2.44}$$



الشكل 2.4: قطع مكافئ تقريبي (منحنى متقطع) لجهد كيفي، بالقرب من الحد الأدنى المحلي.

(من المعتاد حذف ثابت المرونة لصالح التردد الكلاسيكي، باستخدام المعادلة (2.42)). كما رأينا، يكفي حل معادلة شرودنغر المستقلة عن الزمن:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi=E\psi. \tag{2.45}$$

ستجد في الأدبيات/المراجع طريقتين مختلفتين تمامًا لهذه المسألة. الأولى هي حل سهل "بالقوة العمياء" للمعادلة التفاضلية، باستخدام طريقة **متسلسلة القوة**؛ لها ميزة أنه يمكن تطبيق نفس الإستراتيجية على العديد من المسائل الأخرى (في الواقع، سنستخدمها في الباب 4 لدراسة/معالجة ذرة الهيدروجين). والثانية هي طريقة جبرية ذكية بشكل ملفت للغاية/شيطاني، باستخدام ما يسمى **بالمؤثرات السلمية**. سأوضح لك الطريقة الجبرية أولاً، لأنها أسرع وأبسط (وممتعة أكثر)؛ إذا كنت تريد تخطي طريقة متسلسلة القوة في الوقت الحالي، فلا بأس بذلك، ولكن يجب عليك بالتأكيد التخطيط لدراستها في مرحلة ما.

1.3.2 الطريقة الجبرية

لنبدأ، دعنا نعيد كتابة المعادلة (2.45) بشكل أكثر إيحاءً:

$$\frac{1}{2m}\left[\hat{p}^2+(m\omega x)^2\right]\psi=E\psi, \tag{2.46}$$

حيث $\hat{p}\equiv -\imath\hbar\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ هو مؤثر الزخم. الفكرة الأساسية هي **تحليل** الهاميلتوني،

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left[\hat{p}^2+(m\omega x)^2\right]. \tag{2.47}$$

لو كانت هذه أعدادا/أرقاما، فسيكون الأمر سهلاً:

$$u^2+v^2=(u+\imath v)(u-\imath v).$$

هنا، مع ذلك، ليس الأمر بهذه البساطة ، لأن $\hat{p}$ و x مؤثران، والمؤثرات، بشكل عام، لا تتبادل ($x\hat{p}$ ليس هو نفسه $\hat{p}x$، كما سنرى بعد قليل - رغم أنك قد ترغب في التوقف الآن وتفكر في الأمر بنفسك). ومع ذلك، فإن هذا يدفعنا لفحص المقادير

$$\hat{a}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \left(\mp \imath \hat{p} + m\omega x\right) \tag{2.48}$$

(العامل في الأمام موجود فقط لجعل النتائج النهائية تبدو أجمل).

حسنًا، ما هو الجداء $\hat{a}_{-}\hat{a}_{+}$؟

$$\begin{aligned}\hat{a}_{-}\hat{a}_{+} &= \frac{1}{2\hbar m\omega} \left(\imath \hat{p} + m\omega x\right)\left(-\imath \hat{p} + m\omega x\right) \\ &= \frac{1}{2\hbar m\omega} \left[\hat{p}^2 + (m\omega x)^2 - \imath m\omega (x\hat{p} - \hat{p}x)\right].\end{aligned}$$

كما كان متوقعًا، هناك معامل/جزء إضافي يتضمن $(x\hat{p} - \hat{p}x)$. نسمي هذا **مبدل** x و $\hat{p}$؛ إنه مقياس لمدى سوء فشلهم في التبادل. بشكل عام، مبدل المؤثرين $\hat{A}$ و $\hat{B}$ (مكتوب بأقواس مربعة) هو

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \tag{2.49}$$

بهذا الترميز

$$\hat{a}_{-}\hat{a}_{+} = \frac{1}{2\hbar m\omega} \left[\hat{p}^2 + (m\omega x)^2\right] - \frac{\imath}{2\hbar}[x, \hat{p}]. \tag{2.50}$$

نحتاج إلى معرفة مبدل x و $\hat{p}$. تحذير: من المعروف أن المؤثرات زلقة في العمل معها في الشكل المجرد، وأنت ملزم بارتكاب أخطاء ما لم تمنحها "دالة اختبار"، $f(x)$، لتؤثر عليها. في النهاية يمكنك التخلص من دالة الاختبار، وستُترك بمعادلة تتضمن المؤثرات وحدها. في الحالة الحالية لدينا:

$$\begin{aligned}[x, \hat{p}] &= \left[x(-\imath\hbar)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f) - (-\imath\hbar)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xf)\right] = -\imath\hbar\left(x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} - f\right) \\ &= \imath\hbar\, f(x).\end{aligned} \tag{2.51}$$

بإسقاط دالة الاختبار، والتي أدت الغرض منها،

$$\boxed{[x, \hat{p}] = \imath\hbar.} \tag{2.52}$$

تُعرف هذه الصيغة الجميلة والشاملة بـ **علاقة التبديل المقننة**.

بهذا تصبح المعادلة (2.50)

$$\hat{a}_{-}\hat{a}_{+} = \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} + \frac{1}{2}, \tag{2.53}$$

أو

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right). \tag{2.54}$$

من الواضح أن الهاميلتوني لا يتحلل بشكل مثالي - فهناك $1/2$ إضافيًا على اليمين. لاحظ أن ترتيب $\hat{a}_+$ و $\hat{a}_-$ مهم هنا؛ نفس الحجة، مع $\hat{a}_+$ على اليسار، تعطي

$$\hat{a}_+\hat{a}_- = \frac{1}{\hbar\omega}\hat{H} - \frac{1}{2}, \tag{2.55}$$

بشكل خاص

$$[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1. \tag{2.56}$$

في هذه الأثناء، يمكن كتابة الهاميلتوني بشكل مساوٍ:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right). \tag{2.57}$$

بدلالة $\hat{a}_\pm$، إذن، تأخذ معادلة شرودنغر للمتذبذب التوافقي الشكل

$$\hbar\omega\left(\hat{a}_\pm\hat{a}_\mp \pm \frac{1}{2}\right)\psi = E\psi \tag{2.58}$$

(في معادلات مثل هذه تقرأ العلامات العليا على طول الطريق، أو أخرى العلامات السفلية).

الآن، ها هي الخطوة الحاسمة: أدعي أن:

> إذا كانت ψ تحقق معادلة شرودنغر مع طاقة E (أي: $\hat{H}\psi = E\psi$)، فإن $\hat{a}_+\psi$ تحقق معادلة شرودنغر مع طاقة $(E+\hbar\omega)$: $\hat{H}(\hat{a}_+\psi) = (E+\hbar\omega)(\hat{a}_+\psi)$.

البرهان:

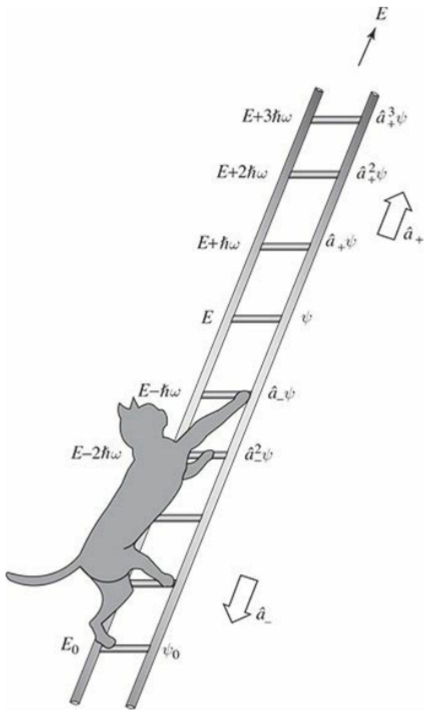
$$\begin{aligned}
\hat{H}(\hat{a}_+\psi) &= \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2}\right)(\hat{a}_+\psi) = \hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_-\hat{a}_+ + \frac{1}{2}\hat{a}_+\right)\psi \\
&= \hbar\omega\hat{a}_+\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ + \frac{1}{2}\right)\psi = \hat{a}_+\left[\hbar\omega\left(\hat{a}_+\hat{a}_- + 1 + \frac{1}{2}\right)\psi\right] \\
&= \hat{a}_+\left(\hat{H} + \hbar\omega\right)\psi = \hat{a}_+(E+\hbar\omega)\psi = (E+\hbar\omega)(\hat{a}_+\psi).
\end{aligned}$$

(لقد استخدمت المعادلة (2.56) لاستبدال $\hat{a}_-\hat{a}_+$ بـ $(\hat{a}_+\hat{a}_- = 1)$ في السطر الثاني. لاحظ أنه على الرغم من أهمية ترتيب $\hat{a}_+$ و $\hat{a}_-$، فإن ترتيب $\hat{a}_\pm$ وأي ثوابت - مثل $\hbar$ و ω و E - لا يهم؛ يتبادل المؤثر مع أي ثابت.)

على نفس المنوال، يعد $\hat{a}_-\psi$ حلاً مع طاقة $(E-\hbar\omega)$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}(\hat{a}_-\psi) &= \hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - \frac{1}{2}\right)(\hat{a}_-\psi) = \hbar\omega\hat{a}_-\left(\hat{a}_+\hat{a}_- - \frac{1}{2}\right)\psi \\
&== \hat{a}_-\left[\hbar\omega\left(\hat{a}_-\hat{a}_+ - 1 - \frac{1}{2}\right)\psi\right] \\
&= \hat{a}_-\left(\hat{H} - \hbar\omega\right)\psi = \hat{a}_-(E-\hbar\omega)\psi = (E-\hbar\omega)(\hat{a}_-\psi).
\end{aligned}$$

هنا، إذن، آلة رائعة لتوليد حلول جديدة، ذات طاقات أعلى وأقل - إذا تمكنا من إيجاد حل واحد، للبدأ! نسمي $\hat{a}_\pm$ **مؤثرات سُلَمية**، لأنها تسمح لنا بالتسلق صعودًا وهبوطًا في الطاقة؛ $\hat{a}_+$ هو **مؤثر الرفع**، و $\hat{a}_-$ **مؤثر الخفض**. يوضح الشكل 2.5 "سلم" الحالات.



الشكل 2.5: "سلم" الحالات للمتذبذب التوافقي.

لكن انتظر! ماذا لو قمت بتطبيق مؤثر الخفض بشكل متكرر؟ في النهاية سأصل إلى حالة ذات طاقة أقل من الصفر، والتي (وفقًا للنظرية العامة في المسألة 2.2) غير موجودة! في مرحلة ما يجب أن تفشل الآلة/الطريقة. كيف يمكن أن يحدث ذلك؟ نحن نعلم أن $\hat{a}\psi$ هو حل جديد لمعادلة شرودنغر، ولكن ليس هناك ما يضمن أنه سيكون قابلاً للاستنظام - فقد يكون صفرًا، أو قد يكون تكامله التربيعي غير محدود. عمليا هو الأول: هناك "الدرجة الأدنى" (نسميها ψ_0) بحيث

$$\hat{a}_-\psi_0 = 0. \tag{2.59}$$

يمكننا استخدام هذه لتحديد $\psi_0(x)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + m\omega x\right)\psi_0 = 0.$$

أو

$$\frac{\mathrm{d}\psi_0}{\mathrm{d}x} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0.$$

هذه المعادلة التفاضلية سهلة الحل

$$\int \frac{\mathrm{d}\psi_0}{\psi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}\int x\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad \ln\psi_0 = -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \text{ثابت},$$

إذن

$$\psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

يمكننا أيضا استنظامها مباشرة

$$1 = |A|^2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar}\mathrm{d}x = |A|^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}},$$

إذن $A^2 = \sqrt{m\omega/\pi\hbar}$ وبالتالي

$$\boxed{\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.} \tag{2.60}$$

لتحديد طاقة هذه الحالة، نضعها في معادلة شرودنغر (في شكل المعادلة (2.58)) ، $\hbar\omega(\hat{a}_+\hat{a}_- + 1/2)\psi_0 = E\psi_0$، واستغلال حقيقة أن $\hat{a}_-\psi_0 = 0$:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega. \tag{2.61}$$

مع وضع قدمنا الآن بشكل آمن في الدرجة السفلية (**الحالة الأرضية** للمتذبذب الكمي)، فإننا ببساطة نطبق مؤثر الرفع (بشكل متكرر) لتوليد الحالات المثارة/المحفزة، وزيادة الطاقة بواسطة $\hbar\omega$ مع كل خطوة:

$$\boxed{\psi_n(x) = A_n(\hat{a}_+)^n\,\psi_0(x), \qquad \text{مع} \qquad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,} \tag{2.62}$$

حيث أن A_n هو ثابت الاستنظام. من خلال تطبيق مؤثر الرفع (بشكل متكرر) على ψ_0، يمكننا (من حيث المبدأ) بناء جميع الحالات المتوقفة للمتذبذب التوافقي. في غضون ذلك، ودون أن نفعل ذلك صراحة، حددنا الطاقات المسموح بها!

مثال 2.4

أوجد الحالة المثارة الأولى للمتذبذب التوافقي.

الحل: باستخدام المعادلة (2.62)

$$\begin{aligned}\psi_1(x) = A_1\,\hat{a}_+\,\psi_0 &= \frac{A_1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\left(-\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+m\omega x\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\\ &= A_1\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,x\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.\end{aligned} \tag{2.63}$$

يمكننا أن نستنظمها "باليد"

$$\int|\psi_1|^2\mathrm{d}x = |A_1|^2\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\mathrm{d}x = |A_1|^2,$$

إذن، كما يحدث، $A_1 = 1$.

لا أريد حساب ψ_{50} بهذه الطريقة (بتطبيق مؤثر الرفع خمسين مرة!)، لكن لا تهتم: من حيث المبدأ تقوم المعادلة (2.62) بالمهمة - باستثناء الاستنظام.

يمكنك حتى الحصول على الاستنظام جبريًا، لكن الأمر يتطلب بعض الأعمال البارعة، لذا راقب عن كثب. نحن نعلم أن $\hat{a}_\pm\psi_n$ يتناسب مع $\psi_{n\pm1}$،

$$\hat{a}_+\psi_n = c_n\psi_{n+1}, \qquad \hat{a}_-\psi_n = d_n\psi_{n-1} \tag{2.64}$$

ولكن ما هما عاملا التناسب c_n و d_n؟ لاحظ أولاً أنه من أجل "أي" دالتين، $f(x)$ و $g(x)$،

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(\hat{a}_\pm g)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{a}_\mp f)^*g\,\mathrm{d}x. \tag{2.65}$$

في لغة الجبر الخطي، $\hat{a}_\mp$ هو **المرافق الهارميتي** (أو **المصاحب**) لـ $\hat{a}_\pm$.

البرهان:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(\hat{a}_\pm g)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\int_{-\infty}^{+\infty}f^*\left(\mp\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=m\omega x\right)g\mathrm{d}x,$$

ويأخذ التكامل بالتجزئة $\int f^*(\mathrm{d}g/\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$ إلى $-\int(\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)^*g\mathrm{d}x$ (تزول المعاملات/الأجزاء الحدية/الحدودية للسبب الموضح في الحاشية ??)، وبالتالي

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}f^*(\hat{a}_\pm g)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(\pm\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+m\omega x\right)f\right]^*g\mathrm{d}x\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{a}_\mp f)^*g\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

بشكل خاص

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{a}_\pm\psi_n)^*(\hat{a}_\pm\psi_n)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{a}_\mp\hat{a}_\pm\psi_n)^*\psi_n\mathrm{d}x.$$

لكن (باستدعاء المعادلتين (2.58) و (2.62))

$$\hat{a}_+\hat{a}_-\psi_n = n\psi_n, \qquad \hat{a}_-\hat{a}_+\psi_n = (n+1)\psi_n, \tag{2.66}$$

إذن

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{a}_+\psi_n)^*(\hat{a}_+\psi_n)\mathrm{d}x = |c_n|^2\int|\psi_{n+1}|^2\mathrm{d}x = (n+1)\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_n|^2\mathrm{d}x,$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{a}_-\psi_n)^*(\hat{a}_-\psi_n)\mathrm{d}x = |d_n|^2\int|\psi_{n-1}|^2\mathrm{d}x = n\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_n|^2\mathrm{d}x.$$

ولكن بما أن ψ_n و $\psi_{n\pm1}$ مستنظمتان فيتبع ذلك أن $|c_n|^2 = n+1$ و $|d_n|^2 = n$ ومنه

$$\boxed{\hat{a}_+\psi_n = \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1}, \qquad \hat{a}_-\psi_n = \sqrt{n}\,\psi_{n-1}.} \tag{2.67}$$

وبالتالي

$$\psi_1 = \hat{a}_+\psi_0, \qquad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_+\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_+)^2\psi_0,$$
$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}_+\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3\cdot 2}}(\hat{a}_+)^3\psi_0 \qquad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{4}}\hat{a}_+\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{4\cdot 3\cdot 2}}(\hat{a}_+)^4\psi_0,$$

و هكذا. من الواضح أن

$$\boxed{\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}_+)^n\psi_0,} \tag{2.68}$$

وهو ما يعني أن معامل الاستنظام في المعادلة (2.62) هو $A_n = 1/\sqrt{n!}$ (على وجه الخصوص $A_1 = 1$) مؤكدا نتيجتنا في المثال (**1.3.2**).

كما في حالة البئر المربع اللانهائي، فإن الحالات المتوقفة للمتذبذب التوافقي متعامدة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m^*\psi_n\mathrm{d}x = \delta_{mn}. \tag{2.69}$$

يمكن إثبات هذه باستخدام المعادلة (2.66) والمعادلة(2.65) مرتين - أولا تحريك $\hat{a}_+$ ثم تحريك $\hat{a}_-$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m^*(\hat{a}_+\hat{a}_-)\psi_n\mathrm{d}x = n\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m^*\psi_n\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{a}_-\psi_m)^*(\hat{a}_-\psi_n)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}(\hat{a}_+\hat{a}_-\psi_m)^*\psi_n\mathrm{d}x$$
$$= m\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_m^*\psi_n\mathrm{d}x.$$

ما لم يكن $m=n$، إذن، يجب أن يكون $\int\psi_m^*\psi_n\mathrm{d}x$ صفرًا. تعني العلاقة التعاظمية أنه يمكننا مرة أخرى استخدام خدعة فوريه (المعادلة (2.37)) لتحديد المعاملات c_n، عندما ننشر $\psi(x,0)$ كتركيب خطي من الحالات المتوقفة المعادلة (2.16)). كما هو الشأن دائمًا، $|c_n|^2$ هو احتمال أن ينتج عن قياس الطاقة القيمة E_n.

مثال 2.5

أوجد القيمة المتوقعة للطاقة الكامنة في الحالة المتوقفة n للمتذبذب التوافقي.

الحل:

$$\langle V\rangle = \left\langle \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \right\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* x^2 \psi_n \mathrm{d}x.$$

هناك جهاز جميل لتقدير التكاملات من هذا النوع (يتضمن قوى x أو $\hat{p}$): استخدم التعريف (المعادلة (2.48)) للتعبير عن x و $\hat{p}$ بدلالة مؤثري الرفع والخفض:

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-); \qquad \hat{p} = \imath\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-).} \tag{2.70}$$

في هذا المثال نحن مهتمون بـ x^2:

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(\hat{a}_+)^2 + (\hat{a}_+\hat{a}_-) + (\hat{a}_-\hat{a}_+) + (\hat{a}_-)^2\right]$$

ومنه

$$\langle V\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \left[(\hat{a}_+)^2 + (\hat{a}_+\hat{a}_-) + (\hat{a}_-\hat{a}_+) + (\hat{a}_-)^2\right] \psi_n \mathrm{d}x.$$

لكن $(\hat{a}_+)^2\psi_n$ هي (بصرف النظر عن الاستنظام) $\psi n+2$، وهي متعامدة مع ψ_n، والأمر نفسه ينطبق على $(\hat{a}_-)^2\psi_n$ ، والذي يتناسب مع ψ_{n-2}. إذن، فإن هذين الجزأين يسقطان، ويمكننا استخدام المعادلة (2.66) لتحديد المتبقيين:

$$\langle V\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(n+n+1) = \frac{1}{2}\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

كما حدث، فإن القيمة المتوقعة للطاقة الكامنة هي بالضبط **نصف** الإجمالي (النصف الآخر، بالطبع، حركية). هذه ميزة خاصة بالمتذبذب التوافقي، كما سنرى لاحقًا (المسألة ??).

المسألة 2.10*

(a) أنشئ $\psi_2(x)$.

(b) أرسم ψ_0, ψ_1 و ψ_2.

(c) تحقق من تعامد ψ_0, ψ_1 و ψ_2، من خلال التكامل الصريح. تلميح: إذا قمت باستغلال زوجية وفردية الدوال، فلا يبقى سوى تكامل واحد فقط ليُفعل.

المسألة 2.11*

(a) أحسب $\langle x\rangle, \langle p\rangle, \langle x^2\rangle$ و $\langle p^2\rangle$ من أجل الحالات ψ_0 (المعادلة (2.60)) و ψ_1 (المعادلة (2.63))، من خلال التكامل الصريح. تعليق: في هذه المسألة وغيرها من المسائل المتعلقة بالمتذبذب التوافقي، فإنه يبسط الأمور إذا أدخلت المتغير $\xi \equiv \sqrt{m\omega/\hbar}x$ و الثابت $\alpha \equiv (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$.

(b) تحقق من مبدأ الارتياب لهذه الحالات.

(c) أحسب $\langle T\rangle$ و $\langle V\rangle$ لهذا الحالات. (لا يُسمح بتكامل جديد!) هل مجموعهما هو ما تتوقعه؟

المسألة 2.12* أحسب $\langle x\rangle, \langle p\rangle, \langle x^2\rangle, \langle p^2\rangle$ و $\langle T\rangle$ من أجل الحالات المتوقفة n للمتذبذب التوافقي، باستخدام طريقة المثال **1.3.2**. تأكد من تحقق مبدأ الارتياب.

المسألة 2.13 يبدأ جسيم في جهد متذبذب توافقي في الحالة

$$\Psi(x,0) = A\left[3\psi_0(x) + 4\psi_1(x)\right].$$

(a) أوجد A.

(b) أنشئ $\Psi(x,t)$ و $|\Psi(x,t)|^2$. لا تكن متحمسًا جدًا إذا كانت $|\Psi(x,t)|^2$ تتذبذب بالضبط بالتردد الكلاسيكي؛ ماذا كان سيحدث لو أنني حددت $\psi_2(x)$، بدلاً من $\psi_1(x)$؟

(c) أوجد $\langle x\rangle$ و $\langle p\rangle$. تحقق من صحة نظرية إهرنفست (المعادلة (11.1)) لهذه الدالة الموجية.

(d) إذا قمت بقياس طاقة هذا الجسيم، فما هي القيم التي قد تحصل عليها، وبأي احتمالات؟

2.3.2 الطريقة التحليلية

نعود الآن إلى معادلة شرودنغر للمتذبذب التوافقي،

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi, \tag{2.71}$$

ونحلها مباشرة بطريقة متسلسلة الطاقة. تبدو الأشياء أنظف قليلاً إذا عرفنا المتغير عديم-البعد

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x; \tag{2.72}$$

بدلالة ξ تقرأ معادلة شرودنغر

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} = (\xi^2 - K)\psi, \tag{2.73}$$

حيث K هو الطاقة، في وحدات $(1/2)\hbar\omega$:

$$K \equiv \frac{2E}{\hbar\omega}. \tag{2.74}$$

تتمثل مسألتنا في حل المعادلة (2.73)، وفي هذه العملية نحصل على القيم "المسموح بها" لـ K (ومن ثم E).

بادئ ذي بدء، لاحظ أنه عند ξ كبير جدًا (أي عند x كبير جدًا)، فإن ξ^2 يهيمن تمامًا على الثابت K، لذلك في هذا النظام/الطور

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} \approx \xi^2\psi, \tag{2.75}$$

والتي لها على الحل التقريبي (تحقق منه!)

$$\psi(\xi) \approx Ae^{-\xi^2/2} + Be^{+\xi^2/2}. \tag{2.76}$$

من الواضح أن الجزء B غير قابل للاستنظام (ينفجر عندما $|x| \to \infty$)؛ الحلول المقبولة فيزيائيا، إذن، لها الشكل المقارب

$$\psi(\xi) \to (\quad)e^{-\xi^2/2}, \quad \text{عند} \quad \xi \quad \text{كبير} \tag{2.77}$$

هذا يقترح إلى أننا "نقشر" الجزء الأسي،

$$\psi(\xi) = h(\xi)\, e^{-\xi^2/2}, \tag{2.78}$$

على أمل أن ما تبقى، $h(\xi)$، له شكل دالي أبسط من $\psi(\xi)$ نفسها. باشتقاق المعادلة)87.2(،

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} = \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi} - \xi h\right)e^{-\xi^2/2},$$

و

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \left(\frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh}{d\xi} + (\xi^2 - 1)h\right) e^{-\xi^2/2},$$

ومنه تصبح معادلة شرودنغر (المعادلة (2.73))

$$\frac{d^2h}{d\xi^2} - 2\xi\frac{dh}{d\xi} + (K - 1)h = 0. \tag{2.79}$$

أقترح البحث عن حلول للمعادلة (2.79) في شكل متسلسلة قوة في ξ:

$$h(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\xi^j. \tag{2.80}$$

4.2 الجسيم الحر

ننتقل إلى ما كان ينبغي أن يكون أبسط حالة على الإطلاق: الجسيم الحر ($V = 0$ في كل مكان). من الناحية الكلاسيكية، ستكون هذه مجرد حركة بسرعة ثابتة، لكن في ميكانيكا الكم المسألة دقيقة بشكل مدهش. تقرأ معادلة شرودنغر المستقلة-عن-الزمن

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi, \tag{2.81}$$

أو

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -k^2\psi. \qquad \text{حيث} \qquad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{2.82}$$

حتى الآن، إنها مثل الموجود داخل البئر المربع اللانهائي (المعادلة (2.24))، حيث تكون الإمكانية صفرًا أيضًا؛ لكن هذه المرة، أفضل كتابة الحل العام بشكل أسي (بدلاً من الجيب وجيب التمام)، لأسباب ستظهر في الوقت المناسب:

$$\psi(x) = A\, e^{\imath kx} + B\, e^{-\imath kx}. \tag{2.83}$$

على عكس البئر المربع اللامتناهي، لا توجد شروط حدودية لتقييد القيم المحتملة لـ k (ومن ثم E)؛ يمكن للجسيم الحر أن يحمل **أي** طاقة (إيجابية). بإلحاق الاعتماد القياسي على الزمن،

$$\Psi(x,t) = A\, e^{\imath k(x-(\hbar k/2m)t)} + B\, e^{-\imath k(x+(\hbar k/2m)t)}. \tag{2.84}$$

الآن، أي دالة لـ x و t تعتمد على هذه المتغيرات في التركيبة الخاصة $x \pm vt$ (لثابت ما v) تمثل موجة ذات شكل غير متغير، تنتقل في اتجاه-$\mp x$ بسرعة v: إن نقطة ثابتة على شكل-الموجة (على سبيل المثال، الحد الأقصى أو الحد الأدنى) يوافق قيمة ثابتة لمتغير الدالة، وبالتالي x و t بحيث

$$x \pm vt = \text{ثابت}, \qquad \text{أو} \qquad x = \mp vt + \text{ثابت}.$$

نظرًا لأن كل نقطة على شكل-الموجة تتحرك بنفس السرعة، فإن شكلها لا يتغير أثناء انتشارها. وبالتالي فإن الجزء الأول في المعادلة (2.84) يمثل موجة تنتقل إلى اليمين، والثاني يمثل موجة (بنفس الطاقة) تتجه إلى **اليسار**. بالمناسبة، نظرًا لأنها تختلف فقط من خلال الإشارة الموجودة أمام k ، فقد نكتب أيضًا

$$\Psi_k(x,t) = A\, e^{\imath\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)}, \tag{2.85}$$

ولتكن k تشمل السالب لتغطية حالة الموجات التي تنتقل إلى اليسار:

$$k \equiv \pm\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \qquad \text{مع} \qquad \begin{cases} k > 0 & \Rightarrow \text{تنتقل نحو اليمين.} \\ k < 0 & \Rightarrow \text{تنتقل نحو اليسار.} \end{cases} \tag{2.86}$$

من الواضح أن "الحالات الثابتة" للجسيم الحر هي موجات منتشرة/متنقلة؛ طولها الموجي هو $\lambda = 2\pi/|k|$، ووفقًا لمعادلة دي برولي (المعادلة (??))، فإنها تحمل زخما

$$p = \hbar\, k. \tag{2.87}$$

سرعة هذه الموجات (معامل t على معامل x) هي

$$v_{\text{كم}} = \frac{\hbar |k|}{2m} = \sqrt{\frac{E}{2m}}. \tag{2.88}$$

من ناحية أخرى، السرعة **الكلاسيكية** للجسيم الحر مع بطاقة E تعطى بواسطة $E = (1/2)mv^2$ (حركية بحتة، لأن $V = 0$) ، وبالتالي

$$v_{\text{كلاسيكي}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 2\, v_{\text{كم}} \tag{2.89}$$

يبدو أن الدالة الموجية الميكانيكية الكمومية/الكمية/المكممة تنتقل **بنصف** سرعة الجسيم المفترض أن تمثله! سنعود إلى هذا التناقض بعد قليل – هناك مشكلة أكثر خطورة نحتاج إلى مواجهتها أولاً: هذه الدالة الموجية غير قابلة للاستنظام:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k^* \Psi_k \mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x = |A|^2\,(\infty). \tag{2.90}$$

في حالة الجسيم الحر، إذن، لا تمثل الحلول القابلة للفصل حالات يمكن تحقيقها فيزيائيًا. لا يمكن أن يوجد الجسيم الحر في حالة ثابتة؛ أو بعبارة أخرى، **لا يوجد شيء اسمه جسيم حر ذو طاقة محددة**.

لكن هذا لا يعني أن الحلول القابلة للفصل غير ذات فايدة لنا. لأنها تلعب دورًا **رياضيًا** مستقلًا تمامًا عن تفسيرها الفيزيائي: لا يزال الحل العام لمعادلة شرودنغر المعتمدة على الزمن عبارة عن تركيبة خطية من الحلول القابلة للفصل (فقط هذه المرة تكون **تكاملا** على المتغير **المستمر** k، بدلاً من مجموع على المؤشر المتميز/المنفصل n):

$$\boxed{\Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k)\, e^{\imath\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)} \mathrm{d}k.} \tag{2.91}$$

(تم أخذ المقدار $1/\sqrt{2\pi}$ في الاعتبار للملاءمة؛ ما يلعب دور المعامل c_n في المعادلة (2.17) هو التركيبة $(1/\sqrt{2\pi})\phi(k)\mathrm{d}k$.)
الآن يمكن استنظام هذه الدالة الموجية (من أجل $\phi(k)$ مناسبة). لكنها تحمل بالضرورة **نطاقًا** من $k's$، وبالتالي مجموعة من الطاقات والسرعات. نسميها **الحزمة الموجية**.

في مسألة الكم العامة، نعطى $\Psi(x,0)$، ويطلب منا إيجاد $\Psi(x,t)$. بالنسبة للجسيم الحر، يتخذ الحل شكل المعادلة (2.91)؛ السؤال الوحيد هو كيفية تحديد $\phi(k)$ لمطابقة الدالة الموجية الأولية:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k)\, e^{\imath kx}\, \mathrm{d}k. \tag{2.92}$$

هذه مسألة كلاسيكية في تحليل فوريه [Fourier]؛ الإجابة تعطى من خلال نظرية بلانشيريل [Plancherel] (انظر المسألة **4.2**):

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{\imath kx}\, \mathrm{d}k \quad \Leftrightarrow \quad F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-\imath kx}\, \mathrm{d}x.} \tag{2.93}$$

يسمى $F(k)$ تحويل فورييه لـ $f(x)$؛ $f(x)$ هو تحويل فورييه العكسي لـ $F(k)$ (الاختلاف الوحيد هو الإشارة في الأس). هناك، بالطبع، بعض القيود على الدوال المسموح بها: يجب أن تكون التكاملات **موجودة**. من أجل أهدافنا، هذه مضمونة من خلال المتطلبات الفيزيائية التي تقضي باستنظام $\Psi(x,0)$ نفسها. لذا فإن حل مسألة الكم العامة للجسيم الحر هو المعادلة (2.91) مع

$$\boxed{\phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(x,0)\,e^{-\imath kx}\,\mathrm{d}x.} \tag{2.94}$$

مثال 2.6

جسيم حر، والذي يتمركز ابتداء في المجال $-a<x<a$، يتم تجريره عند اللحظة $t=0$:

$$\Psi(x,0)=\begin{cases}A, & -a<x<a,\\ 0, & \text{غير ذلك}\end{cases} \tag{2.95}$$

حيث A و a ثوابت حقيقية موجبة. ابحث عن $\Psi(x,t)$.

الحل: أولاً نحتاج أن نستنظم $\Psi(x,0)$:

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,0)|^2\mathrm{d}x=|A|^2\int_{-a}^{+a}\mathrm{d}x=2a|A|^2 \qquad \Rightarrow \qquad A=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

بعد ذلك نحسب $\phi(k)$ باستخدام المعادلة (2.94):

$$\phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2a}}\int_{-a}^{+a}e^{-\imath kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\frac{e^{-\imath kx}}{-\imath k}\bigg|_{-a}^{+a}=\frac{1}{k\sqrt{\pi a}}\left(\frac{e^{\imath ka}-e^{-\imath ka}}{2\imath}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\frac{\sin(ka)}{k}.$$

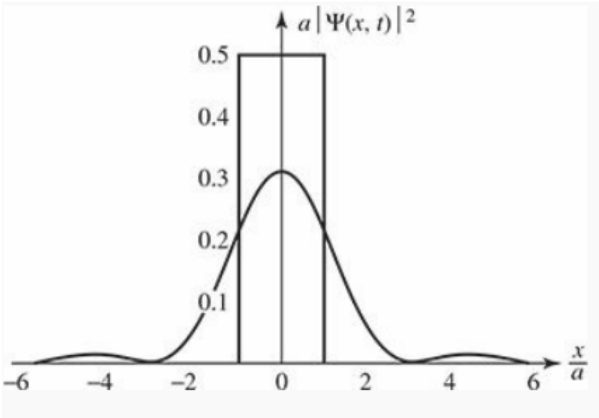
أخيرًا، نعوض هذه في المعادلة (2.91):

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\pi\sqrt{2a}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(ka)}{k}\,e^{\imath\left(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t\right)}\mathrm{d}k. \tag{2.96}$$

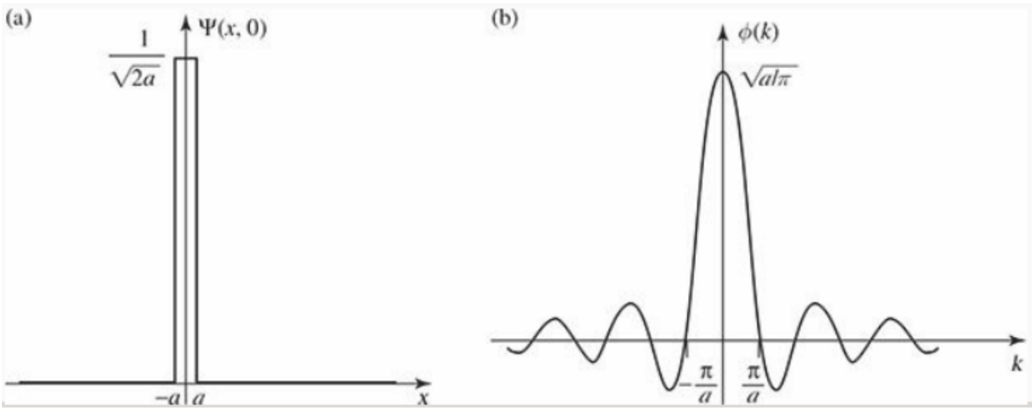
لسوء الحظ، لا يمكن حل هذا التكامل بدلالة دوال أولية، على الرغم من أنه يمكن بالطبع حسابه عدديًا (الشكل 2.6). (في الواقع، هناك حالات قليلة ثمينة يمكن فيها حساب تكامل $\Psi(x,t)$ (المعادلة (2.91)) بشكل صريح؛ راجع المسألة ?? من أجل مثال خاص جميل.)

في الشكل 2.7 قمت برسم $\Psi(x,0)$ و $\phi(k)$. لاحظ أنه من أجل a صغير، تكون $\Psi(x,0)$ ضيقة (في x)، بينما تكون $\phi(k)$ واسعة (في k)، والعكس صحيح من أجل a كبير. لكن k مرتبط بالزخم، بواسطة المعادلة (2.87)، لذلك فإن هذا مظهر من مظاهر مبدأ الارتياب: يمكن تحديد الموضع جيدًا (a صغير)، أو الزخم (a كبير)، ولكن ليس كليهما.

أعود الآن إلى المفارقة المشار إليها سابقًا: حقيقة أن الحل القابل للفصل $\Psi_k(x,t)$ ينتقل بسرعة "خاطئة" للجسيم

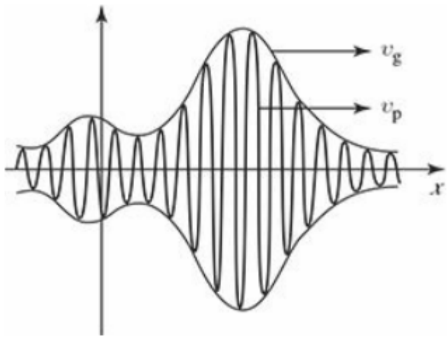


الشكل 2.6: رسم بياني لـ $|\Psi(x,t)|^2$ (المعادلة (2.96)) عند اللحظة $t=0$ (المستطيل) وعند $t=ma^2/\hbar$ (المنحنى).



الشكل 2.7: (a) رسم بياني لـ $\Psi(x,0)$، (b) رسم بياني لـ $\phi(k)$.

الذي يمثله ظاهريًا. بالمعنى الدقيق للكلمة، تبخرت المشكلة عندما اكتشفنا أن Ψ_k ليست حالة يمكن تحقيقها فيزيائيًا. ومع ذلك، من المهم معرفة كيفية يتم احتواء المعلومات حول سرعة الجسيم في الدالة الموجية (المعادلة (2.91)). الفكرة الأساسية هي: الحزمة الموجية هي تراكب للدوال الجيبية التي يتم تعديل سعتها بواسطة ϕ (الشكل **2.8**)؛ إنها تتكون من "تموجات" موجودة داخل "غلاف/ظرف". ما يتوافق مع سرعة الجسيم ليس هو سرعة التموجات الفردية (ما يسمى **سرعة الطور**)، ولكن بالأحرى سرعة الغلاف/الظرف (**سرعة المجموعة**)- والتي، اعتمادًا على طبيعة الموجات، يمكن أن تكون أكبر من أو أقل من أو تساوي سرعة التموجات التي تتكون منها. بالنسبة للموجات الموجودة على خيط/حبل، تكون سرعة المجموعة هي نفسها سرعة الطور. بالنسبة لموجات الماء، تكون نصف سرعة الطور، كما قد تكون لاحظت عندما تقذف حجرًا في بركة (إذا ركزت على تموج معين، فسترى أنه يتراكم من الخلف ، يتحرك للأمام من خلال المجموعة، ويتلاشى في المقدمة، بينما تنتشر المجموعة ككل بنصف تلك السرعة). ما أريد أن أوضحه هو أنه بالنسبة للدالة الموجية للجسيم الحر في ميكانيكا الكم، فإن سرعة المجموعة تساوي ضعف سرعة الطور - تمامًا لمطابقة سرعة الجسيم الكلاسيكية. تكمن المشكلة إذن في تحديد سرعة المجموعة لحزمة موجية ذات الشكل



الشكل 2.8: حزمة موجية. ينتقل "الغلاف" بسرعة المجموعة؛ تنتقل "التموجات" بسرعة الطور.

العام

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k)\, e^{\imath(kx-\omega t)} \mathrm{d}k. \tag{2.97}$$

في حالتنا $\omega = (\hbar k^2/2m)$، ولكن ما يجب أن أقوله الآن ينطبق على أي نوع من الحزمة الموجية، بغض النظر عن **علاقة التشتت/التبدد** (صيغة ω كدالة لـ k. لنفترض أن $\phi(k)$ بلغت ذروتها بشكل ضيق حول قيمة معينة k_0. (لا يوجد شيء **غير قانوني** حول الانتشار الواسع في k، ولكن مثل هذه الحزم الموجية تتغير بشكل سريع - تنتقل المكونات المختلفة بسرعات مختلفة، وبالتالي فإن فكرة "المجموعة"، ذات السرعة المحددة جيدًا، تفقد معناها.) بما أن المتكامل مهمل إلا بالقرب من k_0، يمكننا أيضًا القيام بنشر-تايلور للدالة حول هذه النقطة، والاحتفاظ بالمعاملات القيادية/المهمة فقط:

$$\omega(k) \approx \omega_0 + \omega_0'(k - k_0),$$

حيث ω_0' هو مشتق ω بالنسبة إلى k عند النقطة k_0.

بتغيير المتغيرات من k إلى s (لتوسيط التكامل عند k_0)، لدينا

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0+s)\, e^{\imath[(k_0+s)x-(\omega_0+\omega_0's)t]} \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\imath(k_0x-\omega_0t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k_0+s) e^{\imath s(x-\omega_0')} \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{2.98}$$

الجزء في المقدمة هو موجة جيبية ("التموجات") تتحرك بسرعة ω_0/k_0. يتم تعديلها بواسطة التكامل ("الغلاف") ، وهو دالة لـ $x - \omega_0't$، وبالتالي ينتشر بسرعة ω_0'. هكذا تكون سرعة الطور

$$v_{\text{طور}} = \frac{\omega}{k}, \tag{2.99}$$

بينما سرعة المجموعة هي

$$v_{\text{مجموعة}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}, \tag{2.100}$$

(تم حساب كليهما عند k_0).

في حالتنا، $\omega = (\hbar k^2/2m)$، ومنه $\omega/k = (\hbar k/2m)$، بينما $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k = (\hbar k/m)$، وهو أكبر بالضعف. هذا يؤكد أن سرعة المجموعة لحزمة الموجة تتطابق مع سرعة الجسيم الكلاسيكية:

$$v_{\text{كلاسيكية}} = v_{\text{مجموعة}} = 2v_{\text{طور}}. \tag{2.101}$$

مسألة 2.17* بيّن أن $\left[Ae^{\imath kx} + Be^{-\imath kx}\right]$ و $[C\cos(kx) + D\sin(kx)]$ طرق متكافئة لكتابة نفس دالة ، وحدد الثوابت C و D بدلالة A و B، وبالعكس. تعليق: في ميكانيكا الكم، عندما $V = 0$، تمثل الأسية موجات متنقلة، وتكون أكثر ملاءمة في مناقشة الجسيم الحر، بينما تتوافق الجيب وجيب التمام مع الموجات المتوقفة، والتي تنشأ بشكل طبيعي في حالة البئر المربع اللانهائي.

مسألة 2.18 أوجد تيار الاحتمال J (المسألة ??) لدالة موجة الجسيم الحر المعادلة (2.85). في أي اتجاه يتدفق الاحتمال؟

مسألة 2.19** تم تصميم هذه المسألة لإرشادك إلى "برهان" لنظرية بلانشيريل، من خلال البدء بنظرية متسلسلة فوريه العادية على مجال محدود، والسماح لهذا المجال بالتوسع إلى اللانهاية.

(a) تنص نظرية ديريتشليت على أنه يمكن نشر "أي" دالة $f(x)$ على المجال $[-a,a]$ كمتسلسلة فوريه:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right].$$

بين أنه يمكن كتابة هذا بشكل مكافئ ك

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,e^{\imath n\pi x/a}.$$

ماهو c_n بدلالة a_n و b_n؟

(b) بين (عن طريق التعديل المناسب لخدعة فوريه) أن

$$c_n=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a}f(x)\,e^{-\imath n\pi x/a}\mathrm{d}x.$$

(c) احذف n و c_n لصالح المتغيرين الجديدين k و $F(k)=\sqrt{2/\pi}ac_n$. بين أن (a) و (b) أصبحتا الآن

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(k)\,e^{\imath kx}\Delta k;\qquad F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{-\imath kx}\,\mathrm{d}x,$$

حيث Δk هي الزيادة في k من إحدى n إلى التي تلي.

(d) خذ النهاية $a\to\infty$ للحصول على نظرية بلانشيريل. تعليق: نظرًا لاختلاف أصولهما تمامًا، من المدهش (والممتع) أن الصيغتين - واحدة لـ $F(k)$ بدلالة $f(x)$ والأخرى لـ $f(x)$ بدلالة $F(k)$ - لهما بنيتين متماثلتين عند النهاية $a\to\infty$.

مسألة 2.20 جسيم حر له الدالة الموجية الأولية

$$\Psi(x,0) = A\,s^{-a|x|},$$

حيث A و a ثوابت حقيقية موجبة.

(a) قم باستنظام $\Psi(x,0)$.

(b) جد $\phi(k)$.

(c) أنشىء $\Psi(x,t)$، في شكل تكامل.

(d) ناقش حالات النهاية (a كبير جدا و a صغير جدا).

الباب 3

الرسميات

الباب 4

ميكانيكا الكم في ثلاثة أبعاد

1.4 معادلة شرودينجر

التعميم إلى ثلاثة أبعاد بسيكط. تصبح معادلة شرودينغر

2.4 ذرة الهيدروجين

3.4 الزخم الزاوي

كما رأينا، يتم تمييز الحالات/التوابع الثابتة لذرة الهيدروجين بثلاثة أعداد كمية: n، ℓ وm. يحدد الرقم الكمي الرئيسي (n) طاقة الحالة (المعادلة (??)) ؛ ترتبط ℓ و m بالزخم الزاوي المداري. في النظرية الكلاسيكية للقوى المركزية، تعد الطاقة والزخم الزاوي الكميتين الأساسيتين المحفوظتين، وليس من المستغرب أن يلعب الزخم الزاوي دورًا مهمًا في نظرية الكم.

كلاسيكياً، الزخم الزاوي لجسيم (بالنسبة لمركز الإحداثيات) تعطى بالصيغة:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \tag{4.1}$$

والتي تعني

$$L_x = yp_z - zp_y, \qquad L_y = zp_x - xp_z, \qquad L_z = xp_y - yp_x. \tag{4.2}$$

يتم الحصول على عوامل الكم الموافقة من خلال الوصفة القياسية

$$p_x \to -\imath\hbar\partial/\partial x, \qquad p_y \to -\imath\hbar\partial/\partial y, \qquad p_z \to -\imath\hbar\partial/\partial z.$$

في هذا الفصل سوف نحصل على القيم الذاتية لمؤثري الزخم الزاوي من خلال تقنية/طريقة جبرية بحتة تذكرنا بتلك التي استخدمناها في الباب 1 للحصول على الطاقات المسموح بها للمتذبذب التوافقي؛ كل هذا يعتمد على الاستغلال الذكي لعلاقات التبادل/التبديل. بعد ذلك سوف ننتقل إلى المشكلة الأكثر صعوبة لتحديد الدوال الذاتية.

1.3.4 القيم الذاتية

إن المؤثرين L_x و L_y لا يتبادلان؛ في الواقع

$$\begin{aligned}[L_x, L_y] &= [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] \\ &= [yp_z, zp_x] - [yp_z, zp_z] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

من علاقات التبادل/التبديل المقننة عليها (المعادلة (??))، نعلم أن العوامل الوحيدة هنا التي **تفشل** في التبادل هي x مع p_x، و y مع p_y، و z مع p_z. لذا فإن الجزأين الأوسطين يتساقطان، تاركين

$$[L_x, L_y] = yp_x[p_z, z] + xp_y[z, p_z] = \imath\hbar(xp_y - yp_x) = \imath\hbar L_z. \tag{4.4}$$

بالطبع ، كان من الممكن أن نبدأ بـ $[L_y, L_z]$ أو $[L_z, L_x]$، ولكن ليست هناك حاجة لحساب هذه بشكل منفصل – يمكننا الحصول عليها على الفور عن طريق التبديل الدوري للمؤشرات ($x \to y, y \to z, z \to x$):

$$\boxed{[L_x, L_y] = \imath\hbar L_z; \qquad [L_y, L_z] = \imath\hbar L_x; \qquad [L_z, L_x] = \imath\hbar L_y.} \tag{4.5}$$

هذه هي علاقات التبادل/التبديل الأساسية للزخم الزاوي؛ كل شيء يتبع منها.

لاحظ أن L_x, L_y و L_z هي مؤثرات غير **متوافقة**. وفقًا لمبدأ الارتياب المعمم (المعادلة (??))،

$$\sigma_{L_x}^2 \sigma_{L_y}^2 \geq \left(\frac{1}{2\imath}\langle \imath\hbar L_z\rangle\right)^2 = \frac{\hbar^2}{4}\langle L_z\rangle^2,$$

أو

$$\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2}\left|\langle L_z\rangle\right|. \tag{4.6}$$

لذلك سيكون من غير المجدي البحث عن الحالات/التوابع التي تكون في نفس الوقت دوال ذاتية L_x و L_y. من ناحية أخرى، فإن **مربع** الزخم الزاوي الكلي،

$$L^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, \tag{4.7}$$

يقبل التبادل مع L_x:

$$\begin{aligned}[L^2, L_x] &= [L_x^2, L_x] + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_z] \\ &= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z \\ &= L_y(-\imath\hbar L_z) + (-\imath\hbar L_z)L_y + L_z(-\imath\hbar L_y) + (-\imath\hbar L_y)L_z \\ &= 0. \end{aligned}$$

(لقد استخدمت المعادلة (??) لتبسيط التبادلات؛ بالطبع، **أي** مؤثر **يتبادل** مع نفسه.) ويترتب على ذلك أن L^2 يتبادل أيضًا مع L_y و L_z.

$$[L^2, L_x] = 0, \qquad [L^2, L_y] = 0, \qquad [L^2, L_z] = 0. \tag{4.8}$$

أو، بشكل أكثر اختصارا،

$$[L^2, \mathbf{L}] = 0. \tag{4.9}$$

إذن L^2 متوافق مع كل مركبة لـ $\mathbf{L}$، ويمكننا أن نأمل في العثور بشكل متزامن على دوال ذاتية لـ L^2 و (على سبيل المثال) L_z:

$$L^2 f = \lambda f, \qquad \text{و} \qquad L_z f = \mu f. \tag{4.10}$$

سنستخدم تقنية/طريقة **المؤثر السلمي**، مشابه جدًا لتلك التي طبقناها على المتذبذب التوافقي في الفصل **1.3.2**. ليكن

$$L_\pm \equiv L_x \pm \imath L_y. \tag{4.11}$$

إن علاقتها التبادلية مع L_z هي

$$[L_z, L_\pm] = [L_z, L_x] \pm \imath[L_z, L_y] = \imath\hbar \pm \imath(-\imath\hbar L_x) = \pm\hbar(L_x \pm \imath L_y)$$

أو

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm. \tag{4.12}$$

أيضا (من المعادلة (??))

$$[L^2, L_\pm] = 0. \tag{4.13}$$

أزعم أنه إذا كانت f دالة ذاتية لـ L^2 و L_z، فكذلك تكون $L_\pm f$: تقول المعادلة (4.13)

$$L^2(L_\pm f) = L_\pm(L^2 f) = L_\pm(\lambda f) = \lambda(L_\pm f), \tag{4.14}$$

إذن $L_\pm f$ هي دالة ذاتية لـ L^2، بنفس القيمة الذاتية λ، و تقول المعادلة (4.12)

$$L_z(L_\pm f) = (L_z L_\pm - L_\pm L_z)f + L_\pm L_z f = \pm\hbar L_\pm f + L_\pm(\mu f) \tag{4.15}$$

$$= (\mu \pm \hbar)(L_\pm f), \tag{4.16}$$

إذن $L_\pm f$ هي دالة ذاتية لـ L_z بقيمة ذاتية **جديدة** $\mu \pm \hbar$. نسمي L_+ **مؤثر الرفع**، لأنه **يزيد** القيمة الذاتية لـ L_z بـ $\hbar$، و L_- **مؤثر الخفض**، لأنه **يخفض** القيمة الذاتية بـ $\hbar$.

من أجل قيمة معينة لـ λ، نحصل على "سلم" من الحالات/التوابع، كل "درجة" مفصولة عن جيرانها بوحدة واحدة من $\hbar$ في القيمة الذاتية لـ L_z (انظر الشكل **4.1**). لصعود السلم نطبق مؤثر الرفع، وللنزول مؤثر الخفض. لكن هذه العملية لا يمكن أن تستمر إلى الأبد: في النهاية سنصل إلى حالة/تابع تتجاوز فيها المركبة z **الإجمالي**، وهذا لا يمكن أن يكون. يجب أن تكون هناك "درجة عليا"، f_t، بحيث:

$$L_+ f_t = 0. \tag{4.17}$$

لتكن $\hbar\ell$ القيمة الذاتية لـ L_z عند الدرجة العليا (ستظهر مناسبة الحرف ℓ بعد قليل):

$$L_z f_t = \hbar\ell f_t; \qquad L^2 f_t = \lambda f_t. \tag{4.18}$$

الآن

$$\begin{aligned} L_\pm L_\mp &= (L_x \pm \imath L_y)(L_x \mp \imath L_y) = L_x^2 + L_y^2 \mp \imath(L_x L_y - L_y L_x) \\ &= L^2 - L_z^2 \mp \imath(\imath\hbar L_z), \end{aligned}$$

أو، بوضعها بالطريقة المعاكسة،

$$L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z. \tag{4.19}$$

يتبع من هذا أنه

$$L^2 f_t = (L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z) f_t = (0 + \hbar^2\ell^2 + \hbar^2\ell) f_t = \hbar^2\ell(\ell+1) f_t,$$

و بالتالي

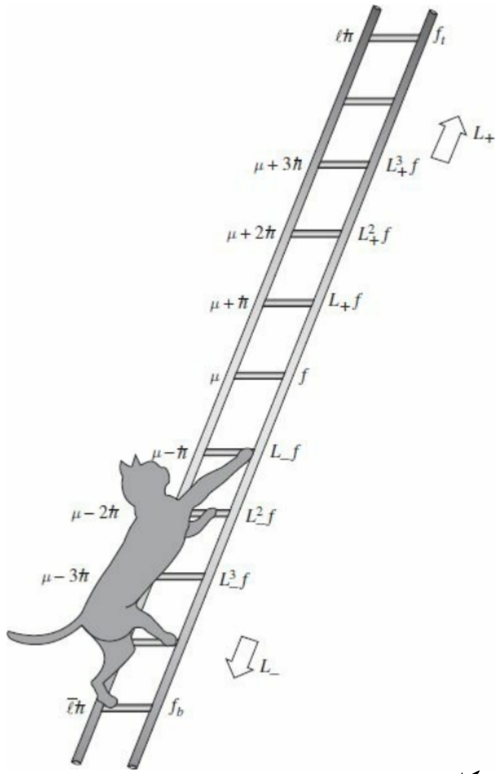
$$\lambda = \hbar^2\ell(\ell+1). \tag{4.20}$$

هذا يخبرنا بالقيمة الذاتية لـ L^2 بدلالة القيمة الذاتية **القصوى/الحدية** لـ L_z. وفي الوقت نفسه، هنالك أيضًا (لنفس السبب) درجة **سفلى**، f_b، بحيث

$$L_- f_b = 0. \tag{4.21}$$

لتكن $\hbar\bar{\ell}$ القيمة الذاتية لـ L_z عند هذه الدرجة السفلى

$$L_z f_b = \hbar\bar{\ell} f_b; \qquad L^2 f_b = \lambda f_b. \tag{4.22}$$



الشكل 4.1: ″سلم″ حالات/توابع الزخم الزاوي.

باستخدام المعادلة (4.19) لدينا

$$L^2 f_b = (L_+L_- + L_z^2 = \hbar L_z) f_b = (0 + \hbar\bar{\ell}^2 - \hbar^2\bar{\ell}) f_b = \hbar\bar{\ell}(\bar{\ell}-1) f_b,$$

و بالتالي

$$\lambda = \hbar^2\bar{\ell}(\bar{\ell}-1). \tag{4.23}$$

بمقارنة المعادلتين (4.20) و (4.23)، نرى أن $\ell(\ell+1) = \bar{\ell}(\bar{\ell}-1)$، لذلك إما $\bar{\ell} = \ell + 1$ (وهو أمر سخيف /غير معقول– ستكون الدرجة السفلى أعلى من الدرجة العليا!) أو غير ذلك

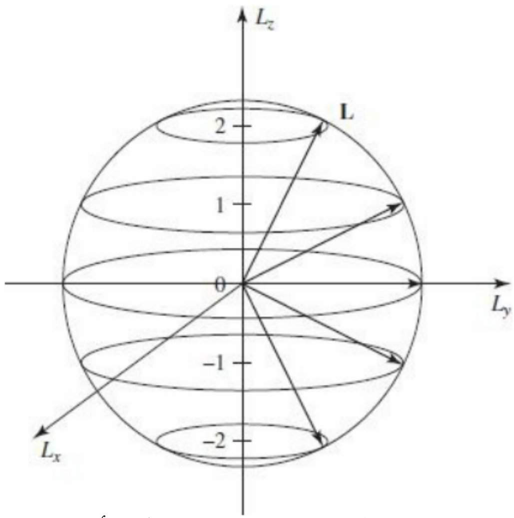
$$\bar{\ell} = -\ell. \tag{4.24}$$

إذن فالقيم الذاتية لـ L_z هي $m\hbar$، حيث m (مناسبة هذا الحرف ستكون واضحة أيضًا بد قليل) يذهب من $-\ell$ إلى $+\ell$، بخطوات عدد صحيح N. على وجه الخصوص، يتبع ذلك أن $\ell = -\ell + N$، وبالتالي $\ell = N/2$، لذلك يجب أن يكون ℓ عددًا **صحيحًا** أو **نصف عدد صحيح**. تتميز الدوال الذاتية بالأرقام ℓ و m:

$$\boxed{L^2 f_\ell^m = \hbar^2\ell(\ell+1) f_\ell^m; \qquad L_z f_\ell^m = \hbar m f_\ell^m,} \tag{4.25}$$

حيث

$$\ell = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots; \qquad m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell-1, \ell. \tag{4.26}$$



الشكل 4.2: حالات/توابع الزخم الزاوي (من أجل $\ell = 2$).

من أجل قيمة معينة لـ ℓ، يوجد $2\ell + 1$ قيم مختلفة لـ m (يعني $2\ell + 1$ "درجة" على "السلم").

يحب بعض الأشخاص توضيح ذلك بالرسم التخطيطي في الشكل **4.2** (رُسِم للحالة $\ell = 2$). من المفترض أن تمثل الأسهم الزخوم الزاوية المحتملة (بوحدات $\hbar$) – فكلها لها نفس الطول $\sqrt{\ell(\ell+1)}$ (في هذه الحالة $\sqrt{6} = 2.45$) ، ومركباتها z هي القيم المسموح بها لـ $m(-2 \quad -1 \; 0 \; 1 \; 2)$. لاحظ أن سعة المتجهات/الأشعة (نصف قطر الكرة) **أكبر** من الحد الأقصى للمركبة z! (بشكل عام، $\sqrt{\ell(\ell+1)} > \ell$ ، باستثناء الحالة "التافهة/السهلة" $\ell = 0$.) من الواضح أنه لا يمكنك جعل الزخم الزاوي يشير تمامًا على طول الاتجاه z. في البداية، يبدو هذا سخيفًا. "لماذا لا يمكنني فقط اختيار المحاور الخاصة بي بحيث يشير z على طول اتجاه متجه /شعاع الزخم الزاوي؟" حسنًا، للقيام بذلك، يجب أن تعرف المركبات الثلاثة جميعها في آن واحد، ويقول مبدأ الارتياب (المعادلة (4.6)) أن هذا مستحيل. "حسنًا، تماما، ولكن بالتأكيد من حين لآخر، ولحسن حظي، سأصوب محوري z على طول اتجاه $\mathbf{L}$." لا لا! لقد أضعت النقطة. ليس الأمر مجرد أنك لا **تعرف** المركبات الثلاثة لـ $\mathbf{L}$؛ لا توجد **ثلاثة** مركبات – ببساطة لا يمكن للجسيم أن يكون له متجه/شعاع زخم زاوي محدد، أكثر مما يمكن أن تكون له إزاحة و زخم محددان في آن واحد. إذا كان لـ L_z قيمة محددة جيدًا، فإن L_x و L_y ليس لهما. من المضلل حتى رسم المتجهات/الأشعة في الشكل **4.2** – في أحسن الأحوال يجب تلطيخها/نشرها حول خطوط العرض، للإشارة إلى أن L_x و L_y غير محددين.

أتمنى أن تكون معجبًا: **بوسائل جبرية بحتة**، بدءًا من علاقات التبادل/التبديل الأساسية للزخم الزاوي (المعادلة (4.5))، حددنا القيم الذاتية لـ L^2 و L_z – دون أن نرى أبدًا الدوال الذاتية نفسها! ننتقل الآن إلى مسألة بناء الدوال الذاتية لكن يجب أن أحذرك من أن هذا عمل أكثر فوضوية. فقط من أجل أن تعلم إلى أين نحن متجهون، سأعطيك النكتة: الدوال الذاتية لـ L^2 و L_z ليست سوى الدوال التوافقياة الكروية القديمة، $f_\ell^m = Y_\ell^m$ – التي توصلنا إليها عن طريق مسار مختلف في الفصل ?? (لهذا اخترت نفس الحرفين ℓ و m بالطبع). ويمكنني الآن أن أشرح سبب كون الدوال التوافقية الكروية متعامدة: إنها دوال ذاتية لمؤثرات هرميتية (L^2 و L_z) تنتمي إلى قيم ذاتية مختلفة (النظرية 2، الفصل ??).

مسألة 4.21* يغير مؤثرا الرفع والخفض قيمة m بوحدة واحدة:

$$L_+ f_\ell^m = (A_\ell)^m f_\ell^{m+1}, \qquad L_- f_\ell^m = (B_\ell^m) f_\ell^{m-1} \tag{4.27}$$

حيث A_ℓ^m و B_ℓ^m هما ثابتان. السؤال: ما هما، إذا كان يجب استنظام الدوال الذاتية؟ تلميح: بين أولاً أن $L_\mp$ هو المرافق الهرميتي لـ $L_\pm$ (نظرًا لأن L_x و L_y هما ملحوظان، يمكن أن تفترض أنهما هرميتيان ... لكن اثبت ذلك إذا أردت)؛ ثم استخدم المعادلة (4.19). الإجابة:

$$\begin{aligned} A_\ell^m &= \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m+1)} = \hbar\sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}, \\ B_\ell^m &= \hbar\sqrt{\ell(\ell+1) - m(m-1)} = \hbar\sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

لاحظ ما يحدث في أعلى وأسفل السلم (أي عند تطبيق L_+ على f_ℓ^ℓ أو L_- على $f_\ell - \ell$).

مسألة 4.22*

(a) بدءًا من علاقات التبديل المقننة للإزاحة والزخم (المعادلة ??())، احسب المبدلات التالية:

$$\begin{aligned} &[L_z, x] = i\hbar y, \qquad [L_z, y] = -i\hbar x, \qquad [L_z, z] = 0 \\ &[L_z, p_x] = i\hbar p_y, \qquad [L_z, p_y] = -i\hbar x, \qquad [L_z, p_z] = 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

(b) استعمل هذه النتائج لتحصل على $[L_z, L_x] = i\hbar L_y$ مباشرة من المعادلة (4.2)

(c) جد المبدلات $[L_z, r^2]$ و $[L_z, p^2]$ (حيث، بالطبع، $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ و $p^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$).

(d) بين أن الهاميلتونين $H = (p^2/2m) + V$ يتبادل مع كل المركبات الثلاثة لـ $\mathbf{L}$، بشرط أن V يعتمد على r فقط. (و عليه فإن H, L^2 و L_z هي ملحوظات متلائمة/متوافقة مثنى مثنى).

مسألة 4.23**

(a) أثبت أنه بالنسبة لجسيم في كمون/جهد V، فإن معدل التغير في القيمة المتوقعة للزخم الزاوي المداري $\mathbf{L}$ يساوي القيمة المتوقعة لعزم الدوران:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle \mathbf{L}\rangle = \langle \mathbf{N}\rangle,$$

حيث

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times (-\nabla V)$$

(هذه هي النسخة/النظيرة الدورانية لنظرية إهرنفست.)

(b) بين أن $\mathrm{d}\langle \mathbf{L}\rangle/\mathrm{d}t = 0$ لأي جهد/كمون متناظر كرويًا. (هذا أحد أشكال التعبير الكمي عن **انحفاظ الزخم الزاوي**).

2.3.4 الدوال الذاتية

أولًا ، علينا إعادة كتابة L_x و L_y و L_z في إحداثيات كروية. الآن، $\mathbf{L} = -\imath\hbar(\mathbf{r} \times \nabla)$ والانحدار، في الإحداثيات الكروية، هو:

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}; \tag{4.30}$$

وفي الوقت نفسه $\mathbf{r} = r\,\hat{r}$، إذن

$$\mathbf{L} = -\imath\hbar\left[r(\hat{r}\times\hat{r})\frac{\partial}{\partial r} + (\hat{r}\times\hat{\theta})\frac{\partial}{\partial\theta} + (\hat{r}\times\hat{\phi})\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]. \tag{4.31}$$

ولكن $(\hat{r}\times\hat{r}) = 0$ و $(\hat{r}\times\hat{\theta}) = \hat{\phi}$ و $(\hat{r}\times\hat{\phi}) = -\hat{\theta}$ (أنظر الشكل ??)، وبالتالي

$$\mathbf{L} = -\imath\hbar\left(\hat{\phi}\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \hat{\theta}\,\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \tag{4.32}$$

يمكن حل متجهي/شعاعي الوحدة $\hat{\theta}$ و $\hat{\phi}$ إلى مكوناتهما الديكارتية:

$$\hat{\theta} = (\cos\theta\cos\phi)\hat{\imath} + (\cos\theta\sin\phi)\hat{\jmath} - (\sin\theta)\hat{k}; \tag{4.33}$$

$$\hat{\phi} = -(\sin\phi)\hat{\imath} + (\cos\phi)\hat{\jmath}. \tag{4.34}$$

ومنه

$$\mathbf{L} = -\imath\hbar\left[(-\sin\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath})\frac{\partial}{\partial\theta} - \left(\cos\theta\cos\phi\,\hat{\imath} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\jmath} - \sin\theta\,\hat{k}\right)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right] \tag{4.35}$$

وبالتالي

$$L_x = -\imath\hbar\left(-\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\phi\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \tag{4.36}$$

$$L_y = -\imath\hbar\left(+\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\phi\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \tag{4.37}$$

و

$$\boxed{L_z = -\imath\hbar\,\frac{\partial}{\partial\phi}.} \tag{4.38}$$

وسنحتاج أيضا مؤثري الرفع والخفض:

$$L_\pm = L_x \pm L_y = -\imath\hbar\left[(-\sin\phi \pm \imath\cos\phi)\frac{\partial}{\partial\theta} - (\cos\phi \pm \imath\sin\phi)\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right].$$

ولكن $\cos\phi \pm \imath\sin\phi = e^{\pm\imath\phi}$. ومنه

$$L_\pm = \pm\hbar e^{\pm\imath\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \pm \imath\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right). \tag{4.39}$$

وبشكل خاص (المسألة ??):

$$L_+L_- = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \imath\frac{\partial}{\partial\phi}\right), \tag{4.40}$$

وبالتالي (المسألة ??):

$$\boxed{L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].} \tag{4.41}$$

نحن الآن في وضع يسمح لنا بتحديد $f_\ell^m(\theta,\phi)$. إنها دالة ذاتية لـ L^2، مع قيمة ذاتية $\hbar^2\ell(\ell+1)$:

$$L^2 f_\ell^m = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] f_\ell^m = \hbar^2\ell(\ell+1)f_\ell^m$$

لكن هذه هي بالضبط "المعادلة الزاوية" (المعادلة (??)). وهي أيضًا دالة ذاتية لـ L_z مع قيمة ذاتية $m\hbar$:

$$L_z f_\ell^m = -\imath\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}f_\ell^m = \hbar m\, f_\ell^m,$$

لكن هذه توافق المعادلة السمتية (المعادلة (??)). لقد قمنا بالفعل بحل نظام المعادلات هذا! النتيجة (المستنظمة بشكل مناسب) هي التوافقية الكروية، $Y_\ell^m(\theta,\phi)$. الخلاصة: التوافقيات الكروية هي دوال ذاتية لـ L^2 و L_z. عندما قمنا بحل معادلة شرودينغر بفصل المتغيرات، في الفصل **1.4**، كنا نبني عن غير قصد دوالا ذاتية متزامنة للمؤثرات التبادلية الثلاثة H و L^2 و L_z:

$$H\psi = E\psi, \qquad L^2\psi = \hbar^2\ell(\ell+1)\psi, \qquad L_z\psi = m\hbar\psi. \tag{4.42}$$

بالمناسبة، يمكننا استخدام المعادلة (4.41) لإعادة كتابة معادلة شرودينغر (المعادلة (??)) بشكل أكثر اختصارا:

$$\frac{1}{2mr^2}\left[-\hbar^2\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + L^2\right]\psi + V\psi = E\psi.$$

هناك لفة/نكتة تدعو للفضول في هذه القصة: تسمح النظرية الجبرية للزخم الزاوي لـ ℓ (وبالتالي أيضًا m) بأخذ قيم **نصف**-عدد صحيح (المعادلة (4.26))، في حين أن فصل المتغيرات أسفر عن دوال ذاتية فقط لقيم **عدد** صحيح (المعادلة (??)). قد تفترض أن الحلول ذات النصف-عدد الصحيح زائفة، لكن اتضح أنها ذات أهمية عميقة، كما سنرى في الفصول التالية.

مسألة 4.24*

(a) استنتج المعادلة (4.40) من المعادلة (4.39). تلميح: استخدم دالة اختبار؛ وإلا فمن المحتمل أن تسقط بعض الأجزاء.

(b) استنتج المعادلة (4.41) من المعادلات (4.38) و (4.40). تلميح: استخدم المعادلة (4.19).

مسألة 4.25*

(a) ما هو $L_+ Y_\ell^m$ ؟ (لا يسمح بأي حساب!)

(b) استخدم النتيجة (a) مع المعادلة (4.39) وحقيقة أن $L_z Y_\ell^\ell = \hbar \ell Y_\ell^\ell$ لتحديد $Y_\ell^\ell(\theta, \phi)$، حتى ثابت استنظام.

(c) حدد ثابت الاستنظام بتكامل مباشر. قارن إجابتك النهائية مع ما تحصلت عليه في المسألة ??.

مسألة 4.26 لقد بينت في المسألة ?? أن

$$Y_2^1(\theta, \phi) = -\sqrt{15/8\pi} \sin\theta \cos\theta e^{\imath\phi}.$$

طبق مؤثر الرفع لإيجاد $Y_2^2(\theta, \phi)$. استخدم المعادلة (4.28) لتحصل على الاستنظام.

مسألة 4.27** جسيمان (كتلتهما m_1 و m_2) متصلان بنهايتي قضيب صلب عديم الكتلة بطول a. الجملة حرة لتدور في ثلاثة أبعاد حول مركز الكتلة (الثابت).

(a) بين أن الطاقات المسموح بها لهذا الدوار الصلب هي

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2I} n(n+1), \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \text{حيث} \qquad I = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} a^2$$

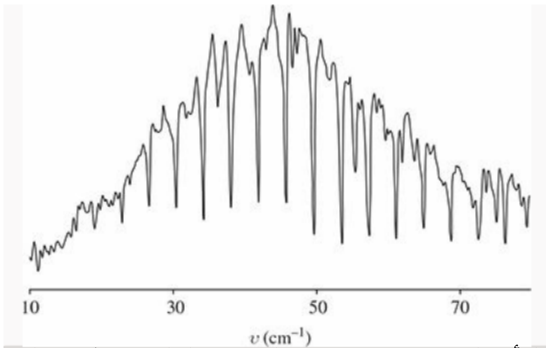
هو عزم عطالة الجملة. تلميح: أولاً عبر عن الطاقة (الكلاسيكية) بدلالة الزخم الزاوي.

(b) ما هي الدوال الذاتية المستنظمة لهذه الجملة؟ (لتكن θ و ϕ تحددان اتجاه محور الدوار) ما هو انحلال مستوى الطاقة n؟

(c) ما هو الطيف الذي تتوقعه لهذه الجملة؟ (أعط صيغة لترددات الخطوط الطيفية). إجابة:

$$\nu_j = \hbar j / 2\pi I, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

(d) يوضح الشكل **4.3** جزءًا من الطيف الدوراني لأول أكسيد الكربون (CO). ما هو تباعد التردد ($\Delta\nu$) بين الخطوط المتجاورة؟ انظر كتلتي ^{12}C و ^{16}O، ومن m_1 و m_2 و $\Delta\nu$ حدد المسافة بين الذرات.



الشكل 4.3: طيف دوران CO. لاحظ أن الترددات في وحدات التحليل الطيفي: عكس السنتيمترات. للتحويل إلى هرتز، اضرب في $c = 3.00 \times 10^{10}\ \mathrm{cm/s}$. أعيد إصدارها بإذن من جون إم براون وآلان كارينجتون، **التحليل الطيفي الدوراني للجزيئات ثنائية الذرة** ، مطبعة جامعة كامبريدج، 2003، والتي تم بدورها اقتباسها من إي في لوينشتاين، مجلة الجمعية البصرية الأمريكية، 50، 1163 (1960).

4.4 اللف/السْبِن

في الميكانيكا **الكلاسيكية**، يسمح الجسم الصلب بنوعين من الزخم الزاوي: المداري ($\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$)، المرتبط بحركة مركز الكتلة، , و**اللف** ($\mathbf{S} = I\omega$)، المرتبط بالحركة **حول** مركز الكتلة. على سبيل المثال، تمتلك الأرض زخمًا زاويًا مداريًا يُعزى إلى دورتها السنوية حول الشمس، وزخما زاويا لفيا يأتي من دورانها اليومي حول محور شمال-جنوب. في السياق الكلاسيكي، يعتبر هذا التمايز إلى حد كبير مسألة ملائمة، لأنه عندما تعتبره بطريقة مباشرة، فإن $\mathbf{S}$ ليس سوى مجموع الزخم الزاوي "المداري" لجميع الصخور والكتل الترابية التي تشكل الأرض، حيث يدورون حول المحور. لكن شيئًا مشابهًا يحدث في ميكانيكا الكم، وهنا يكون التمايز قطعا جوهريا. بالإضافة إلى الزخم الزاوي المداري، المرتبط (في حالة الهيدروجين) بحركة الإلكترون حول النواة (كما هو موصوف بواسطة التوافقيات الكروية)، يحمل الإلكترون أيضًا شكلًا **آخر** من الزخم الزاوي، والذي لا علاقة له بالحركة في الفضاء (وهو الذي لا يتم وصفه بأي دالة لمتغيرات الموضع r, θ, ϕ) ولكنه مماثل إلى حد ما للدوران الكلاسيكي (وبالتالي، نستخدم نفس الكلمة). لن يكون من المجدي التأكيد على هذا التشابه إلى حد بعيد جدا: الإلكترون (على حد علمنا) هو نقطة غير ذي بنية، ولا يمكن أن يتحلل زخمه الزاوي المغزلي/اللفي إلى زخم زاوي مداري للأجزاء المكونة (انظر المسألة 4.4). يكفي أن نقول أن الجسيمات الأولية تحمل زخمًا زاويًا **جوهريًا** (S) بالإضافة إلى الزخم الزاوي "الخارجي" (L).

النظرية **الجبرية** للسبن/للف هي نسخة كربونية من نظرية الزخم الزاوي المداري، بدءًا من علاقات التبديل /التبادل الأساسية:

$$[S_x, S_y] = \imath\hbar S_z, \qquad [S_y, S_z] = \imath\hbar S_x, \qquad [S_z, S_x] = \imath\hbar S_y. \tag{4.43}$$

ويترتب على ذلك (كما كان من قبل) أن المتجهات/الأشعة الذاتية لـ S^2 و S_z تحقق

$$S^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \qquad S_z|sm\rangle = \hbar m|sm\rangle; \tag{4.44}$$

و

$$S_{\pm}|sm\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1)-m(m\pm 1)}|s(m\pm 1)\rangle, \tag{4.45}$$

حيث $S_{\pm} = S_x \pm \imath S_y$. لكن المتجهات/الأشعة الذاتية هذه المرة ليست توافقيات كروية (فهي ليست دالات لـ θ و ϕ على الإطلاق)، ولا يوجد سبب لاستبعاد قيم نصف-عدد صحيح لـ s و m:

$$s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots; \qquad m = -s, -s+1, \ldots, s-1, s. \tag{4.46}$$

يحدث أن كل جسيم أولي له قيمة **محددة وثابتة** لـ s، والتي نسميها **لف/سبن** تلك الأنواع المعينة: الميزونات π لها لف/سبن 0؛ الإلكترونات لها لف/سبن 1/2؛ الفوتونات لها لف/سبن 1؛ الباريونات Δ لها لف/سبن 3/2؛ الجرافيتونات لها لف/سبن 2؛ وما إلى ذلك. على النقيض من ذلك، فإن العدد الكمي للزخم الزاوي المداري ℓ (للإلكترون في ذرة الهيدروجين، على سبيل المثال) يمكن أن يأخذ أي قيمة (عدد صحيح) تريدها، وسوف يتغير من قيمة إلى أخرى عندما يكون النظام مضطربًا. لكن s ثابت، لأي جسيم معين، وهذا يجعل نظرية اللف/السبن بسيطة نسبيًا.

مسألة 4.28 إذا كان الإلكترون عبارة عن كرة صلبة كلاسيكية بنصف قطر

$$r_c = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2},$$

(ما يسمى نصف قطر الإلكترون الكلاسيكي، والذي تم الحصول عليه بافتراض أن كتلة الإلكترون تُعزى إلى الطاقة المخزنة في مجاله الكهربائي، عبر صيغة أينشتاين $E = mc^2$، والزخم الزاوي هو $(1/2)\hbar$)، إذن ما مدى سرعة تحرك نقطة على "خط الاستواء" (بـ m/s)؟ هل هذا النموذج منطقي؟ (في الواقع، من المعلوم تجريبياً أن نصف قطر الإلكترون أقل بكثير من r_c ولكن هذا فقط يجعل الأمور أسوأ.

1.4.4 اللف/السبن 1/2

إلى حد بعيد الحالة الأكثر أهمية هي $s = 1/2$، لأن هذا هو لف/سبن الجسيمات التي تتكون منها المادة العادية (البروتونات والنيوترونات والإلكترونات)، وكذلك جميع الكواركات وجميع اللبتونات. علاوة على ذلك، بمجرد أن تفهم اللف/السبن 1/2، فإنه من السهل استنباط الشكلية/النظرية لأي لف أعلى. هناك حالتان ذاتيتان فقط: $\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$، والتي نسميها **لف أعلى** (بشكل غير رسمي ↑) ، و $\left|\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\rangle$، **لف أسفل** (↓) باستخدام هذه كمتجهات/أشعة أساسية، يمكن تمثيل الحالة العامة لجسيم ذي لف-$1/2$ بمصفوفة عمود مكونة من عنصرين (أو **سبينور**):

$$\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_-, \tag{4.47}$$

مع

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

تمثل لف أعلى، و

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.49}$$

من أجل لف أسفل.

بالنسبة لهذا الأساس، تصبح مؤثرات اللف/السبن مصفوفات 2×2، والتي يمكن حسابها من خلال ملاحظة تأثيرها على χ_+ و χ_-. تقول المعادلة (4.44)

$$S^2\chi_+ = \frac{3}{4}\hbar^2\,\chi_+ \qquad \text{و} \qquad S^2\chi_- = \frac{3}{4}\hbar^2\chi_-. \tag{4.50}$$

إذا كتبنا S^2 كمصفوفة بعناصر (حتى الآن) غير محددة،

$$S^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix},$$

زمنه فإن المعادلة الأولى تقول

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{أو} \qquad \begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\hbar^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

و منه $c = (3/4)\hbar^2$ و $e = 0$. تقول المعادلة الثانية

$$\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{أو} \qquad \begin{pmatrix} d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4}\hbar^2 \end{pmatrix}$$

و منه $d = 0$ و $f = (3/4)\hbar^2$. الخلاصة:

$$S^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

و بالمثل

$$S_z\chi_+ = \frac{\hbar}{2}\chi_+, \qquad S_z\chi_- = -\frac{\hbar}{2}\chi_-, \tag{4.52}$$

والتي يتبع منها

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

في غضون ذلك ، تقول المعادلة (4.45)

$$S_+\chi_- = \hbar\chi_+, \qquad S_-\chi_+ = \hbar\chi_-, \qquad S_+\chi_+ = S_-\chi_- = 0,$$

ومنه

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \qquad S_- = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{4.54}$$

الآن $S_\pm = S_x \pm \imath S_y$، ومنه $S_x = (1/2)(S_+ + S_-)$ و $S_y = (1/2\imath)(S_+ - S_-)$، وبالتالي

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -\imath\\ \imath & 0\end{pmatrix}. \tag{4.55}$$

بما أن S_x, S_y و S_z كلها تحمل المعامل $\hbar/2$، فإنه من الأليق أن نكتب $S = (\hbar/2)\sigma$، حيث

$$\boxed{\sigma_x \equiv \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix}0 & -\imath\\ \imath & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.} \tag{4.56}$$

هذه هي مصفوفات اللف/السبن لباولي الشهيرة. لاحظ أن S_x و S_y و S_z و S^2 كلها مصفوفات **هارميتية** (كما ينبغي أن تكون، لأنها تمثل ملحوظات). من ناحية أخرى، S_+ و S_- ليستا هارميتيتان - من الواضح أنهما ليستا ملحوظتين.

إن السبينورات الذاتية لـ S_z هي (بالطبع):

$$\chi_+ = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \left(+\frac{\hbar}{2} \quad \text{القيمة الذاتية}\right); \qquad \chi_- = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \left(-\frac{\hbar}{2} \quad \text{القيمة الذاتية}\right). \tag{4.57}$$

إذا قمت بقياس S_z على جسيم في الحالة العامة χ (المعادلة (4.47))، يمكنك الحصول على $+\hbar/2$، مع احتمال $|a|^2$، أو $-\hbar/2$، مع احتمال $|b|^2$. بما أن هذه هي الاحتمالات الوحيدة،

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \tag{4.58}$$

(أي، يجب أن تكون السبينورات مستنظمة: $\chi^\dagger\chi = 1$).

ولكن ماذا لو اخترت بدلاً من ذلك قياس S_x؟ ما هي النتائج المحتملة، وما هي احتمالات كل منها؟ وفقًا للتفسير الإحصائي المعمم، نحتاج إلى معرفة القيم الذاتية و السبينورات الذاتية لـ S_x. المعادلة المميزة هي

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \hbar/2 \\ \hbar/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\hbar}{2}.$$

ليس من المستغرب (ولكن من دواعي السرور أن نرى كيف تحسب)، فإن القيم المحتملة لـ S_x هي نفس القيم التي لـ S_z. يتم الحصول على السبينورات الذاتية بالطريقة المعتادة:

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \pm\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

ومنه $\beta = \pm\alpha$. من الواضح أن السبينورات (المستنظمة) لـ S_x هي

$$\chi_+^{(x)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \left(\text{القيمة الذاتية} \quad +\frac{\hbar}{2}\right); \qquad \chi_-^{(x)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad \left(\text{القيمة الذاتية} \quad -\frac{\hbar}{2}\right). \tag{4.59}$$

بصفتها متجهات ذاتية لمصفوفة هارميتية، فإنها تغطي الفضاء؛ يمكن التعبير عن السبينور العام χ (المعادلة (4.47)) كتركيب خطي منها:

$$\chi = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)\chi_+^{(x)} + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)\chi_-^{(x)}. \tag{4.60}$$

إذا قمت بقياس S_x فإن احتمال الحصول على $+\hbar/2$ هو $(1/2)|a+b|^2$، واحتمال الحصول على $-\hbar/2$ هو $(1/2)|a-b|^2$. (تحقق بنفسك من أن هذه الاحتمالات تجمع لـ 1).

مثال 4.2 لنفترض أن جسيما ذي لف-1/2 في الحالة

$$\chi = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+\imath \\ 2 \end{pmatrix}.$$

ما هي احتمالات الحصول على $+\hbar/2$ و $-\hbar/2$، إذا كنت تقيس S_z و S_x؟

الحل: هنا $a = (1+\imath)/\sqrt{6}$ و $b = 2/\sqrt{6}$، وبالتالي من أجل S_z فإن احتمال الحصول على $+\hbar/2$ هو $|(1+\imath)/\sqrt{6}|^2 = 1/3$ واحتمال الحصول على $-\hbar/2$ هو $|2/\sqrt{6}|^2 = 2/3$. من أجل S_x فإن احتمال الحصول على $+\hbar/2$ هو $(1/2)|(3+\imath)/\sqrt{6}|^2 = 5/6$ واحتمال الحصول على $-\hbar/2$ هو $(1/2)|(-1+\imath)/\sqrt{6}|^2 = 1/6$. بالمناسبة، القيمة المتوقعة لـ S_x هي

$$\frac{5}{6}\left(+\frac{\hbar}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{\hbar}{3},$$

والتي كان بإمكاننا الحصول عليها بشكل مباشر:

$$\langle S_x\rangle = \chi^\dagger S_x \chi = \begin{pmatrix} (1-\imath)/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \hbar/2 \\ \hbar/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+\imath)/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{3}.$$

أود الآن أن أطلعك على سيناريو قياس وهمي يتضمن اللف-1/2، لأنه يعمل على توضيح بعض الأفكار المجردة التي ناقشناها في الباب 1 بعبارات ملموسة للغاية. لنفترض أننا بدأنا بجسيم في الحالة χ_+. إذا سأل شخص ما، "ما هي المركبة-z للزخم الزاوي لهذا الجسيم؟" ، يمكننا الإجابة بشكل لا لبس فيه: $+\hbar/2$. لقياس S_z من المؤكد أن ترجع تلك القيمة. ولكن إذا سأل المحقق/المستجوب بدلاً من ذلك، "ما هي المركبة-x للزخم الزاوي اللفي/المغزلي لهذا الجسيم؟" نحن ملزمون بالمراوغة: إذا قمت بقياس S_x، فإن الفرص تكون خمسين-خمسين في الحصول إما على $+\hbar/2$ أو $-\hbar/2$. إذا كان السائل فيزيائيًا كلاسيكيًا، أو "واقعيًا" (بالمعنى الوارد في الفصل (2.1) ، فسيعتبر هذه إجابة غير ملائمة - كي لا نقول وقحة -: "هل تخبرني أنك **لا تعرف** الحالة الحقيقة لهذا الجسيم؟ " على العكس تماما؛ أعرف **بالضبط** ما هي حالة الجسيم: χ_+. "حسنًا، إذن، كيف لا يمكنك أن تخبرني ما هي المركبة-x لللف المغزلي/للسبن الخاص به؟" لأنه ببساطة **لا يمتلك** مركبة-x معينة لللف المغزلي/للسبن. في الواقع، **لا يمكنه**، لأنه إذا كان كل من S_x و S_z معرفان جيدًا، فإنه سيتم انتهاك مبدأ الارتياب.

عند هذه النقطة، يمسك مُتحدِّينا أنبوب الاختبار و **يقيس** المركبة-x لللف المغزلي/لسبن الجسيم؛ لنفترض أنه حصل على القيمة $+\hbar/2$. "آها!" (يصرخ منتصرا)، "لقد كذبت! هذا الجسيم له قيمة محددة جيدًا لـ S_x: $+\hbar/2$." "حسنًا، بالتأكيد - له ذلك **الآن**، لكن هذا لا يثبت أنه **كانت** له تلك القيمة، قبل قياسك. "من الواضح أنك قد تحولت إلى شق الشعر. وعلى أي حال، ماذا حدث لمبدأ الارتياب الخاص بك؟ أعرف الآن كلاً من S_x و S_z." "أنا آسف، لكنك لا تفعل: في سياق القياس، قمت بتغيير حالة الجسيم؛ إنه الآن في الحالة $\chi_+^{(x)}$، وبينما تعرف قيمة S_x، لم تعد تعرف قيمة S_z." "لكنني كنت حريصًا للغاية على عدم إزعاج الجسيم عندما قمت بقياس S_x. " حسنًا، إذا كنت لا

تصدقني، فتحقق من ذلك: قم بقياس S_z، وانظر ما الذي ستحصل عليه. (بالطبع ، قد يحصل على $+\hbar/2$، الأمر الذي سيكون محرجًا لحالتي - ولكن إذا كررنا هذا السيناريو بالكامل مرارًا وتكرارًا، فسيحصل في نصف الوقت على $-\hbar/2$.)

بالنسبة للشخص العادي أو الفيلسوف أو الفيزيائي الكلاسيكي، فإن عبارة من الشكل "هذا الجسيم ليس له إزاحة محددة جيدًا" (أو الزخم، أو المركبة-x للزخم الزاوي المغزلي/اللفي، أو أي شيء آخر) يبدو غامضًا وغير كفء، أو (الأسوأ من ذلك كله) عميق. إنها ليست أي واحدة من تلك. لكن معناه الدقيق، كما أعتقد، يكاد يكون من المستحيل توصيله إلى أي شخص لم يدرس ميكانيكا الكم بعمق. إذا وجدت فهمك منزلقا، من وقت لآخر (إذا لم تفعل، فربما لم تفهم المسألة). فارجع إلى جملة اللف/السبن-1/2: إنه أبسط وأنظف سياق للتفكير من خلاله في مفارقات المفاهيم في ميكانيكا الكم.

مسألة 4.29

(a) تحقق من أن مصفوفات اللف/السبن (المعادلتان (4.53) و (4.55)) تخضع لعلاقات التبديل الأساسية للزخم الزاوي، المعادلة (4.43)

(b) بيّن أن مصفوفات باولي المغزلية (المعادلة (4.56)) تحقق قاعدة الضرب

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} + \imath \sum_{\ell} \epsilon_{jk\ell} \sigma_\ell, \tag{4.61}$$

حيث تشير المؤشرات إلى x, y أو z و $\epsilon_{jk\ell}$ هو رمز لوفي-سيفيتا: $+1$ إذا كان $jk\ell = 123, 231$ أو 312؛ -1 إذا كان $jk\ell = 132, 213$ أو 321؛ 0 سوى ذلك.

مسألة 4.30* الكترون في الحالة اللفية/المغزلية

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3\imath \\ 4 \end{pmatrix}$$

(a) حدد ثابت الاستنظام A.

(b) أوجد القيم المتوقعة لـ S_x, S_y و S_z.

(c) أوجد الارتيابات σ_x, σ_y و σ_z. ملاحظة: هذه الرموز هي انحرافات معيارية و ليست مصفوفات باولي!

(d) تأكد من أن نتائجك متوافقة مع جميع مبادئ الارتياب الثلاثة (المعادلة (4.6) وتباديلها الدورية - فقط مع S في مكان L بالطبع).

مسألة 4.31* من أجل السبينور المستنظم الأعم χ (المعادلة (4.47))، أحسب $\langle S_x\rangle, \langle S_y\rangle, \langle S_z\rangle, \langle S_x^2\rangle, \langle S_y^2\rangle$ و $\langle S_z^2\rangle$. تحقق أن $\langle S_x^2\rangle + \langle S_y^2\rangle + \langle S_z^2\rangle = \langle S^2\rangle$

مسألة 4.32*

(a) أوجد القيم الذاتية و السبينورات الذاتية لـ S_y.

(b) إذا قمت بقياس S_y على جسيم في الحالة العامة χ (المعادلة (4.47))، فما هي القيم التي قد تحصل عليها، وما هو احتمال كل منها؟ تحقق من أن الاحتمالات تجمع لـ 1. ملاحظة: لا يلزم أن يكون a و b حقيقيين!

(c) إذا قمت بقياس S_y^2، فما هي القيم التي قد تحصل عليها، وبأي احتمالات؟

مسألة 4.33** قم بإنشاء المصفوفة S_r التي تمثل مركبة الزخم الزاوي المغزلي/اللفي على طول اتجاه عشوائي $\hat{r}$. استخدم الإحداثيات الكروية، والتي من أجلها

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{i} + \sin\theta\sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k} \tag{4.62}$$

أوجد القيم الذاتية و السبينورات الذاتية (المستنظمة) لـ S_r. الإجابة:

$$\chi_+^{(r)} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{\imath\phi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}; \qquad \chi_-^{(r)} = \begin{pmatrix} e^{-\imath\phi}\sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \tag{4.63}$$

ملاحظة: أنت دائمًا حر في الضرب بمعامل طور عشوائي - على سبيل المثال $e^{-\imath\phi}$ - لذلك قد **لا تبدو** إجابتك مطابقة تمامًا لإجابتي.

مسألة 4.34 قم بإنشاء المصفوفات المغزلية/اللفية (S_x, S_y و S_z) لجسيم ذي لف/سبن 1. تلميح: كم عدد الحالات الذاتية لـ S_z؟ حدد تأثير S_z و S_+ و S_- على كل حالة من هذه الحالات. اتبع الإجراء المستخدم في النص من أجل اللف/السبن 1/2.

2.4.4 الكترون في حقل مغناطيسي

يشكل جسيم مشحون لفي/مغزلي ثنائي قطب مغناطيسي. إن **عزمه ثنائي-القطب المغناطيسي** ، μ، يتناسب مع زخمه الزاوي المغزلي/اللفي، S:

$$\mu = \gamma \mathbf{S} \tag{4.64}$$

يسمى ثابت التناسب γ **النسبة الجيرومغناطيسية**. عندما يتم وضع ثنائي قطب مغناطيسي في مجال مغناطيسي $\mathbf{B}$، فإنه يتعرض لعزم دوران $\mu \times \mathbf{B}$، والذي يميل إلى جعله موازيا للحقل (تمامًا مثل إبرة البوصلة). إن الطاقة المرتبطة بهذا العزم هي

$$H = -\mu \cdot \mathbf{B}. \tag{4.65}$$

إذن فإن مصفوفة هاميلتون لجسيم مشحون لفي/مغزلي، في حالة راحة في المجال المغناطيسي $\mathbf{B}$، هي

$$H = -\gamma \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}, \tag{4.66}$$

حيث $\mathbf{S}$ هي مصفوفة اللف/السبن المناسبة (المعادلتان (4.53) و (4.55)، في حالة اللف/السبن 1/2).

مثال 4.3

رحوية لارمور: تخيل جسيمًا ذي لف/سبن 1/2 في حالة راحة في مجال مغناطيسي منتظم، والذي يشير في اتجاه z:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{k}. \tag{4.67}$$

الهاميلتون (المعادلة (4.66)) هو

$$H = -\gamma B_0 S_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.68}$$

إن الحالات/التوابع الذاتية لـ H هي نفسها التي لـ S_z:

$$\begin{cases} \chi_+, & \text{بطاقة} \quad E_+ = -(\gamma B_0 \hbar)/2, \\ \chi_-, & \text{بطاقة} \quad E_- = +(\gamma B_0 \hbar)/2. \end{cases} \tag{4.69}$$

تكون الطاقة في أدنى مستوياتها عندما يكون العزم ثنائي القطب موازيا للحقل - تمامًا كما هو الحال في الوضع الكلاسيكي.

نظرًا لأن الهاميلتون مستقل عن الزمن، فإن الحل العام لمعادلة شرودنغر المعتمدة-على-الزمن،

$$i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = H \chi, \tag{4.70}$$

يمكن التعبير عنها بدلالة الحالات/التوابع الثابتة:

$$\chi(t) = a\chi_+ \, e^{-\imath E_+ t/\hbar} + b\chi_- \, e^{-\imath E_- t/\hbar} = \begin{pmatrix} a e^{\imath\gamma B_0 t/\hbar} \\ b e^{-\imath\gamma B_0 t/\hbar} \end{pmatrix}.$$

يتم تحديد الثوابت a و b بالشروط الأولية:

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

(بالطبع $|a|^2 + |b|^2 = 1$). دون أي خسارة أساسية في العموم سأكتب $a = \cos(\alpha/2)$ و $b = \sin(\alpha/2)$، حيث α هي زاوية ثابتة ستظهر أهميتها الفيزيائية بعد قليل. إذن

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) e^{\imath\gamma B_0 t/\hbar} \\ \sin(\alpha/2) e^{-\imath\gamma B_0 t/\hbar} \end{pmatrix}. \tag{4.71}$$

للتعرف على ما يحدث هنا، دعنا نحسب القيمة المتوقعة لـ S، كدالة للزمن:

$$\begin{aligned} \langle S_x \rangle &= \chi(t)^\dagger S_x \chi(t) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) e^{-\imath\gamma B_0 t/\hbar} & \sin(\alpha/2) e^{\imath\gamma B_0 t/\hbar} \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) e^{\imath\gamma B_0 t/\hbar} \\ \cos(\alpha/2) e^{-\imath\gamma B_0 t/\hbar} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \sin\alpha \cos(\gamma B_0 t). \end{aligned} \tag{4.72}$$

بالمثل

$$\langle S_y \rangle = \chi(t)^\dagger S_x \chi(t) = -\frac{\hbar}{2} \sin\alpha \sin(\gamma B_0 t), \tag{4.73}$$

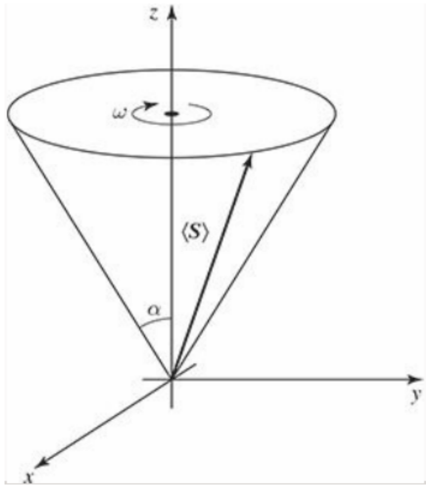
و

$$\langle S_z \rangle = \chi(t)^\dagger S_x \chi(t) = \frac{\hbar}{2} \cos(\alpha). \tag{4.74}$$

إذن تميل $\langle S \rangle$ بزاوية ثابتة α عن المحور z، و تدور/ترجي حول الحقل **بتردد لارمور**:

$$\omega = \gamma \, B_0, \tag{4.75}$$

تمامًا كما هو الحال كلاسيكياً (انظر الشكل 4.4). لا عجب هنا - تضمن نظرية إهرنفست (بالشكل المحصل عليه في المسألة 1.3.4) أن $\langle S \rangle$ يتطور وفقًا للقوانين الكلاسيكية. لكن من الجميل أن ترى كيف يتم ذلك في سياق معين.



الشكل 4.4: رحوية $\langle S\rangle$ في حقل مغناطيسي منتظم.

مثال 4.4

تجربة ستيرن-غيرلاخ: يمكن استخدام هذه القوة لفصل جسيمات بلف/سبن معين. تخيل حزمة من الذرات الثقيلة المتعادلة –تسير في الاتجاه y ، والتي تمر عبر منطقة مجال مغناطيسي ثابت ولكن غير متجانس (الشكل 4.5)– قل

$$\mathbf{B}(x,y,z)=-\alpha x\,\hat{\imath}+(B_0+\alpha z)\hat{k}, \tag{4.76}$$

حيث B_0 هو مجال منتظم قوي ويصف الثابت α انحرافًا بسيطًا عن التجانس. (في الواقع، ما نفضله هو مجرد المركبة z لهذا المجال، ولكن للأسف هذا مستحيل - فهو ينتهك القانون الكهرومغناطيسي $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$؛ سواء أحببنا ذلك أم لا، فإن المركبة x تأتي من أجل الركوب). القوة على هذه الذرات هي

$$\mathbf{F}=\gamma\alpha(-S_x\hat{\imath}+S_z\hat{k}).$$

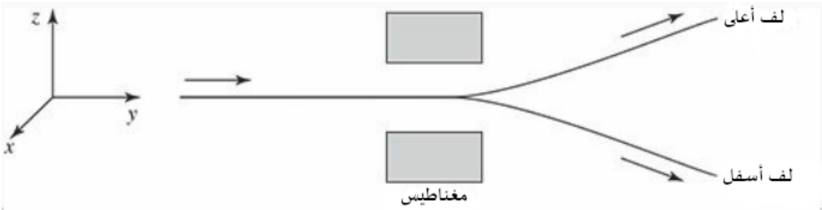
في مجال مغناطيسي غير متجانس، لا يوجد عزم دوران فحسب، بل يوجد أيضًا قوة، على ثنائي القطب المغناطيسي:

$$\mathbf{F}=\nabla(\mu\cdot\mathbf{B}). \tag{4.77}$$

ولكن بسبب رحوية لارمور حول B_0، تتذبذب S_x بسرعة، وتتوسط إلى الصفر؛ القوة **الناتجة** في اتجاه z:

$$F_z=\gamma\alpha\,S_z, \tag{4.78}$$

وتنحرف الحزمة لأعلى أو لأسفل، بما يتناسب مع المركبة z للزخم الزاوي اللفي/المغزلي. من الناحية **الكلاسيكية**، كنا نتوقع وجود لطخة/بقعة (لأن S_z ما كانت لتكون مكممة)، ولكن في الواقع تنقسم الحزمة إلى $2s+1$ تيارات/مجاري منفصلة، مما يدل بشكل جميل على تكميم الزخم الزاوي.



الشكل 4.5: جهاز ستيرن-غيرلاخ.

(إذا كنت تستخدم ذرات الفضة، فإن جميع الإلكترونات الداخلية تكون مقترنة/متزاوجة، بطريقة تلغي زخومها الزاوية. إن صافي اللف/السبن هو ببساطة الذي للإلكترون الأبعد - غير المقترن - لذلك في هذه الحالة $s = 1/2$، و تنقسم الحزمة إلى اثنين.)

لعبت تجربة ستيرن-غيرلاخ دورًا مهمًا في فلسفة ميكانيكا الكم، حيث تعمل كنموذج أولي لإعداد حالة كمومية/كمية ونموذج منير لنوع معين من القياس الكمي. نميل بشكل عرضي إلى افتراض أن الحالة الأولية للجملة/النظام معروفة (تخبرنا معادلة شرودنغر كيف تتطور لاحقًا) - ولكن من الطبيعي أن نتساءل كيف تحصل على جملة/نظام ما في حالة معينة في المقام الأول. حسنًا ، إذا كنت ترغب في إعداد حزمة من الذرات في تكوين/ترتيب لفي/مغزلي معين، فإنك تقوم بتمرير حزمة غير مستقطبة عبر مغناطيس ستيرن-جيرلاخ، وتحديد التيار/المسار الخارج الذي تهتم به (أغلق الآخرين بحواجز ومصاريع /أقفال مناسبة). بالمقابل، إذا كنت تريد **قياس** المركبة z للف/سبن الذرة، فأنت ترسله عبر جهاز ستيرن-غيرلاخ، وتسجل الحاوية/السلة التي يهبط فيها. لا أدعي أن هذه هي دائمًا الطريقة **الأكثر عمليا** للقيام بالمهمة، لكنها نظيفة للغاية من الناحية **المفاهيمية**، وبالتالي فهي سياق مفيد لاستكشاف مشاكل إعداد الحالة/التابع والقياس.

مسألة 4.35 في المثال 2.4.4:

(a) إذا قمت بقياس مركبة الزخم الزاوي المغزلي/اللفي على طول الاتجاه x، في الزمن t، ما هو احتمال أن تحصل على $+\hbar/2$؟

(b) نفس السؤال، ولكن للمركبة y.

(c) نفسه، للمركبة z.

مسألة 4.36** إلكترون في حالة سكون في مجال مغناطيسي متذبذب

$$\mathbf{B} = B_0 \cos(\omega t)\hat{k},$$

حيث B_0 و ω ثابتان.

(a) أنشئ مصفوفة هاميلتون لهذه الجملة/النظام.

(b) يبدأ الإلكترون (عند$t = 0$) في حالة لف/سبن-أعلى بالنسبة بالمحور x (أي: $\chi(0) = \chi_+^{(x)}$). حدد $\chi(t)$ عند أي زمن لاحق. **حذاري**: هذا الهاميلتون يعتمد على الزمن، لذلك لا يمكنك الحصول على $\chi(t)$ بالطريقة المعتادة من الحالات/التوابع الثابتة. لحسن الحظ، في هذه الحالة يمكنك حل معادلة شرودنغر المعتمدة على الزمن (المعادلة (4.70)) مباشرة.

(c) أوجد احتمال الحصول على $-\hbar/2$ إذا قمت بقياس S_x. الإجابة:

$$\sin^2\left(\frac{\gamma B_0}{2\omega}\sin(\omega t)\right).$$

(d) ما هو الحد الأدنى للحقل (B_0) المطلوب لفرض انقلاب كامل في S_x؟

3.4.4 جمع الزخوم الزاوية

لنفترض الآن أن لدينا جسيمين **اثنين**، مع لفين s_1 و s_2. قل، أن الأول في الحالة $|s_1m_1\rangle$ والثاني في الحالة $|s_2m_2\rangle$. نشير إلى الحالة المركبة بـ $|s_1s_2m_1m_2\rangle$:

$$\begin{aligned} S^{(1)^2}|s_1s_2m_1m_2\rangle &= s_1(s_1+1)\hbar^2|s_1s_2m_1m_2\rangle,\\ S^{(2)^2}|s_1s_2m_1m_2\rangle &= s_2(s_2+1)\hbar^2|s_1s_2m_1m_2\rangle,\\ S_z^{(1)}|s_1s_2m_1m_2\rangle &= s_1(s_1+1)\hbar^2|s_1s_2m_1m_2\rangle,\\ S_z^{(2)}|s_1s_2m_1m_2\rangle &= s_1(s_1+1)\hbar^2|s_1s_2m_1m_2\rangle. \end{aligned} \tag{4.79}$$

سؤال: ما هو الزخم الزاوي الكلي،

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}, \tag{4.80}$$

لهذه الجملة؟ هذا يعني: ما هو صافي/ناتج اللف، s، للمجموعة، وما هي المركبة z، m؟ المركبة z سهلة:

$$\begin{aligned} S_z|s_1s_2m_1m_2\rangle &= S_z^{(1)}|s_1s_2m_1m_2\rangle + S_z^{(2)}|s_1s_2m_1m_2\rangle,\\ &= \hbar(m_1+m_2)|s_1s_2m_1m_2\rangle = \hbar m|s_1s_2m_1m_2\rangle, \end{aligned} \tag{4.81}$$

ومنه

$$m = m_1 + m_2; \tag{4.82}$$

انها مجرد **المجموع**. لكن s أكثر دقة، لذا فلنبدأ بأبسط مثال غير بديهي.

مثال 4.5

لنعتبر حالة جسيمين مغزليين-1/2 – على سبيل المثال، الإلكترون والبروتون في الحالة الأرضية للهيدروجين. يمكن أن يكون لكل منهما لف أعلى أو لف أسفل، لذلك هناك أربعة احتمالات في المجمل:

$$\begin{aligned} |\uparrow\uparrow\rangle &= \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, & m&=1,\\ |\uparrow\downarrow\rangle &= \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle, & m&=0,\\ |\downarrow\uparrow\rangle &= \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle, & m&=0,\\ |\downarrow\downarrow\rangle &= \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-1}{2}\right\rangle, & m&=-1. \end{aligned}$$

هذا لا يبدو صحيحًا: من المفترض أن يتقدم m بعدد صحيح من الخطوات، من $-s$ إلى $+s$، لذلك يبدو أن $s = 1$ - ولكن هناك حالة "إضافية" لـ $m = 0$.

إحدى طرق فك هذه المشكلة هي تطبيق مؤثر الخفض $S_- = S_-^{(1)} + S_-^{(2)}$ على هذه الحالة $|\uparrow\uparrow\rangle$، باستخدام المعادلة (4.54) :

$$\begin{aligned} S_-|\uparrow\uparrow\rangle &= \left(S_-^{(1)}|\uparrow\rangle\right)|\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle\left(S_-^{(2)}|\uparrow\rangle\right) \\ &= (\hbar|\downarrow\rangle)|\uparrow\rangle + |\uparrow\rangle(\hbar|\downarrow\rangle) = \hbar\left(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right). \end{aligned}$$

من الواضح أن الحالات الثلاث التي لها $s=1$ هي (في الترميز $|sm\rangle$):

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} |11\rangle & = |\uparrow\uparrow\rangle \\ |10\rangle & = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \\ |1,-1\rangle & = |\downarrow\downarrow\rangle \end{array}\right\} \quad s=1 \quad (\text{ثلاثية}).} \tag{4.83}$$

(كتحقق، حاول تطبيق مؤثر الخفض على $|10\rangle$ ؛ ما الذي يجب أن تحصل عليه؟ انظر المسألة ??(a).) هذا ما يسمى بالتركيب **الثلاثي**، لسبب واضح. في الوقت ذاته، الحالة المتعامدة مع $m=0$ تحمل $s=0$:

$$\boxed{\left\{ |00\rangle \quad = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \right\} \quad s=0 \quad (\text{أحادية}).} \tag{4.84}$$

(إذا قمت بتطبيق مؤثر الرفع أو الخفض على **هذه** الحالة/التابع، فستحصل على صفر. انظر المسألة **3.4.4**(b).)

أدعي، إذن، أن الجمع/التركيب بين جسيمين مغزليين-1/2 يمكن أن يحمل لفا إجماليًا قدره 1 أو 0، اعتمادًا على ما إذا كانا يشغلان التركيب الثلاثي أو الأحادي. **لتأكيد** هذا، أحتاج إلى إثبات أن الحالات/التوابع الثلاثية هي متجهات/أشعة ذاتية لـ S^2 مع قيمة ذاتية $2\hbar^2$ ، والمتجه/الشعاع الأحادي هو متجه/شعاع ذاتي لـ S^2 مع قيمة ذاتية 0. الآن

$$S^2 = \left(\mathbf{S}^(1) + \mathbf{S}^{(2)}\right)\cdot\left(\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}\right) = \left(S^{(1)}\right)^2 + \left(S^{(2)}\right)^2 + 2\mathbf{S}^{(1)}\cdot\mathbf{S}^{(2)}. \tag{4.85}$$

باستخدام المعادلتين (4.53) و (4.55) لدينا

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(1)}\cdot\mathbf{S}^{(2)}|\uparrow\downarrow\rangle &= \left(S_x^{(1)}|\uparrow\rangle\right)\left(S_x^{(2)}|\downarrow\rangle\right) + \left(S_y^{(1)}|\uparrow\rangle\right)\left(S_y^{(2)}|\downarrow\rangle\right) + \left(S_z^{(1)}|\uparrow\rangle\right)\left(S_z^{(2)}|\downarrow\rangle\right) \\ &= \left(\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle\right)\left(\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\right) + \left(\frac{\imath\hbar}{2}|\downarrow\rangle\right)\left(\frac{-\imath\hbar}{2}|\uparrow\rangle\right) + \left(\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle\right)\left(\frac{-\hbar}{2}|\downarrow\rangle\right) \\ &= \frac{\hbar^2}{4}\left(2|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\right) \end{aligned}$$

وبالمثل

$$\mathbf{S}^{(1)}\cdot\mathbf{S}^{(2)}|\downarrow\uparrow\rangle = \frac{\hbar^2}{4}\left(2|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right).$$

ومنه

$$\mathbf{S}^{(1)}\cdot\mathbf{S}^{(2)}|10\rangle=\frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2|{\downarrow\uparrow}\rangle-|{\downarrow\uparrow}\rangle+2|{\uparrow\downarrow}\rangle-|{\uparrow\downarrow}\rangle\right)=\frac{\hbar^2}{4}|10\rangle, \tag{4.86}$$

و

$$\mathbf{S}^{(1)}\cdot\mathbf{S}^{(2)}|00\rangle=\frac{\hbar^2}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2|{\downarrow\uparrow}\rangle-|{\downarrow\uparrow}\rangle-2|{\uparrow\downarrow}\rangle+|{\uparrow\downarrow}\rangle\right)=-\frac{3\hbar^2}{4}|00\rangle. \tag{4.87}$$

بالعودة إلى المعادلة (4.85) (وباستخدام المعادلة (4.50)) ، نستنتج أن

$$S^2|10\rangle=\left(\frac{3\hbar^2}{4}+\frac{3\hbar^2}{4}+2\frac{\hbar^2}{4}\right)|10\rangle=2\hbar^2|10\rangle, \tag{4.88}$$

إذن فإن $|10\rangle$ هي حقيقة حالة/تابع ذاتية لـ S^2 مع قيمة ذاتية $2\hbar^2$؛ و

$$S^2|00\rangle=\left(\frac{3\hbar^2}{4}+\frac{3\hbar^2}{4}-2\frac{3\hbar^2}{4}\right)|00\rangle=0, \tag{4.89}$$

لذا فإن $|00\rangle$ هي حالة ذاتية لـ S^2 مع قيمة ذاتية 0. (سأترك الأمر لك لتأكيد أن $|11\rangle$ و $|1-1\rangle$ هي حالات/توابع ذاتية لـ S^2، مع القيمة الذاتية المناسبة - راجع المسألة **3.4.4**(c).)

ما قمنا به للتو (الجمع بين لف 1/2 مع لف 1/2 للحصول على لف 1 ولف 0) هو أبسط مثال لمسألة أكبر: إذا جمعت اللف s_1 مع اللف s_2، فما هي اللفات/السبينات الإجمالية s التي يمكنك الحصول عليها؟ الإجابة هي أنك تحصل على كل لف من (s_1+s_2) إلى (s_1-s_2) - أو (s_2-s_1) ، إذا كانت $s_2>s_1$ –في خطوات عدد صحيح:

$$\boxed{s=(s_1+s_2),(s_1+s_2-1),(s_1+s_2-2),\ldots,|s_2-s_2|.} \tag{4.90}$$

(بالمعنى التقريبي، يحدث اللف الكلي الأعلى/الأكبر عندما تكون اللفات الفردية متوازية مع بعضها البعض، ويحدث الأدنى /الأصغر عندما يكونان متعاكسين). على سبيل المثال، يمكنك الحصول على لف إجمالي قدره 7/2 أو 5/2 أو 3/2 أو 1/2 ، حسب التركيب. مثال آخر: إذا كانت ذرة الهيدروجين في الحالة $\psi_{n\ell m}$، فإن صافي الزخم الزاوي للإلكترون (اللفي/المغزلي زائد المداري) هو $\ell+1/2$ أو$\ell-1/2$؛ إذا قمت الآن بإضافة لف **البروتون**، فإن العدد الكمي للزخم الزاوي **الإجمالي** للذرة هو $\ell+1$، أو $\ell-1$ (ويمكن تحقيق ℓ بطريقتين مختلفتين، اعتمادًا على ما إذا كان الإلكترون وحده في التركيب $\ell+1/2$ أو التركيب $\ell-1/2$).

ستكون الحالة/التابع المركبة $|sm\rangle$ مع إجمالي لف s و مركبة-z، m تركيبا خطيًا من الحالات المركبة $|s_1s_2m_1m_2\rangle$:

$$|sm\rangle=\sum_{m_1+m_2=m}C^{s_1s_2s}_{m_1m_2m}|s_1s_2m_1m_2\rangle. \tag{4.91}$$

(لأن المركبات-z **تجمع**، فإن الحالات المركبة الوحيدة التي تساهم هي تلك التي فيها $m_1+m_2=m$). المعادلتان (4.83) و (4.84) هي حالات خاصة من هذا الشكل العام، حيث $s_1=s_2=1$. تسمى الثوابت $C^{s_1s_2s}_{m_1m_2m}$ معاملات

كلبش-جوردن ((Clebsch-Gordan . عدد قليل من أبسط الحالات في الجدول **4.1** . على سبيل المثال، يخبرنا العمود المظلل في الجدول 2×1 بأن

$$|30\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|21\rangle|1-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|20\rangle|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2-1\rangle|11\rangle.$$

إذا كان هناك جسيمان (ذي لف 2 ولف 1) في وضع السكون في علبة، وكان **إجمالي** اللف هو 3، ومركبته z يساوي 0، فإن قياس $S_z^{(1)}$ يمكن أن يعطي القيمة $\hbar$ (مع احتمال 1/5)، أو 0 (مع احتمال 3/5)، أو $-\hbar$ (مع احتمال 1/5). لاحظ أن مجموع الاحتمالات يجمع لـ 1 (مجموع مربعات أي عمود في جدول كلبش-جوردن هو 1).

تعمل هذه الجداول أيضًا بالعكس:

$$|s_1 s_2 m_1 m_2\rangle = \sum_s C^{s_1 s_2 s}_{m_1 m_2 m}|sm\rangle, \qquad (m = m_1 + m_2). \tag{4.92}$$

على سبيل المثال، يخبرنا **الصف** المظلل في الجدول $3/2 \times 1$ بأن

$$\left|\frac{3}{2}1\frac{1}{2}0\right\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\left|\frac{5}{2}\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{15}}\left|\frac{3}{2}\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle.$$

إذا وضعت جسيمات بلف 3/2 ولف 1 في العلبة، وتعلم أن الأول له $m_1 = 1/2$ والثاني له $0 = {}_2$ (ومنه m تساوي بالضرورة 1/2)، وقمت بقياس اللف **الإجمالي**، s، يمكنك الحصل على 5/2 (مع احتمال 3/5)، أو 3/2 (مع احتمال 1/15)، أو 1/2 (مع احتمال 1/3). مرة أخرى، مجموع الاحتمالات هو 1 (مجموع مربعات كل **صف** في جدول كلبش-جوردن هو 1).

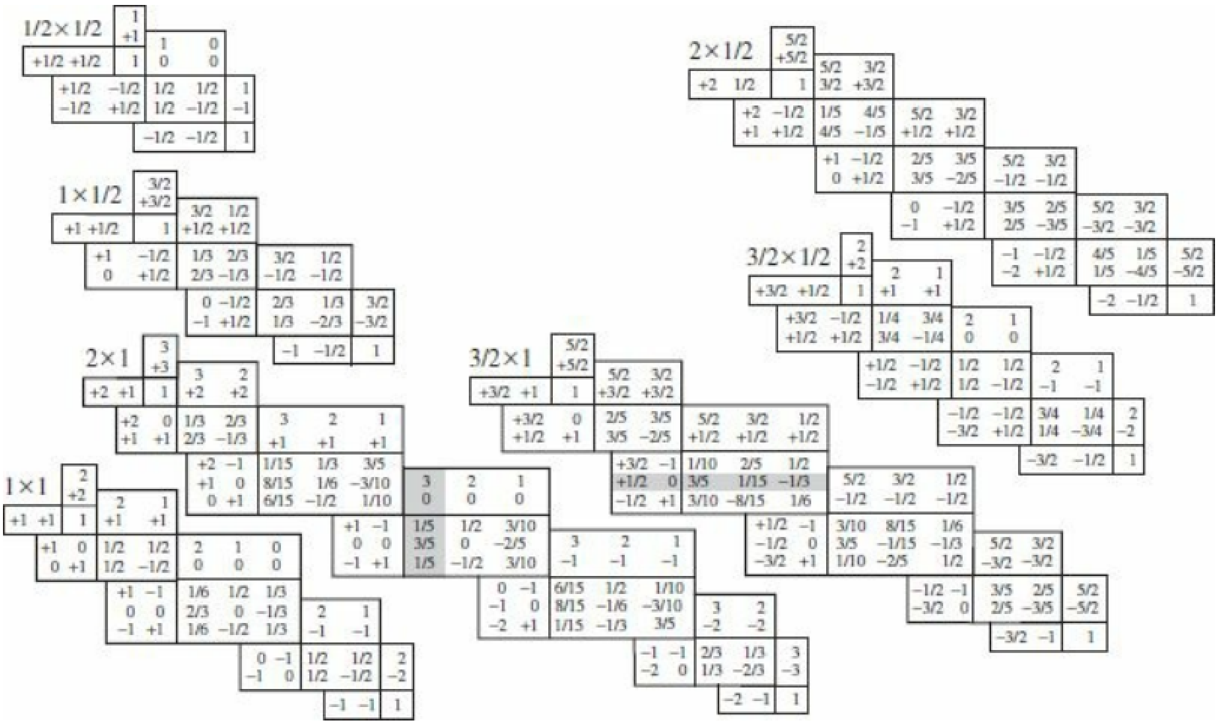
إذا كنت تعتقد أن هذا بدأ يبدو وكأنه علم الأعداد الغامض، فأنا لا ألومك. لن نستخدم جداول كلبش-جوردن كثيرًا في باقي الكتاب، لكنني أردت أن تعرف مكانها المناسب في مخطط الأشياء ، في حال واجهتها لاحقًا. بالمعنى الرياضي، هذه كلها **نظرية الزمر/المجموعات** التطبيقية - ما نتحدث عنه هو تحليل الضرب المباشر لتمثيلين غير قابلين للاختزال لمجموعة الدوران إلى مجموع مباشر لتمثيلات غير قابلة للاختزال (يمكنك اقتباس ذلك، لإثارة إعجاب أصدقائك).

مسألة 4.37*

(a) قم بتطبيق S_- على $|10\rangle$ (المعادلة (4.83))، وتأكد من حصولك على $2\hbar|1-1\rangle$.

(b) قم بتطبيق $S_\pm$ على $|00\rangle$ (المعادلة (4.84))، وتأكد من حصولك على صفر.

(c) بين أن $|11\rangle$ و $|1-1\rangle$ (المعادلة (4.83)) عبارة عن حالات ذاتية من S^2، مع القيمة الذاتية المناسبة.



الجدول 4.1 : معاملات كلبش-جوردن. (تُفهم علامة الجذر التربيعي لكل إدخال وعلامة الطرح، إن وجدت، تخرج خارج الجذر.)

مسألة 4.38 الكواركات تحمل لف $1/2$. ترتبط ثلاثة كواركات ببعضها البعض لتكوين باريون (مثل البروتون أو النيوترون)؛ اثنين من الكواركات (أو بتعبير أدق كوارك وكوارك مضاد) يرتبطان معًا لتكوين ميزون (مثل البايون أو الكايون). لنفترض أن الكواركات في الحالة الأرضية (بحيث أن الزخم الزاوي **المداري** هو صفر).

(a) ما هي اللفات/السبينات الممكنة للباريونات؟

(b) ما هي اللفات/السبينات الممكنة للميزونات؟

مسألة 4.39* تحقق من المعادلتين (4.83) و (4.83) باستخدام جدول كلبش-جوردن.

مسألة 4.40

(a) جسيم بلف 1 وجسيم بلف 2 في حالة سكون في تكوين/تركيب بحيث يكون إجمالي اللف 3 ومركبته z هي $\hbar$. إذا قمت بقياس المركبة z للزخم الزاوي للجسيم ذي اللف 2، فما هي القيم التي قد تحصل عليها، وما احتمال كل منها؟ تعليق: استخدام جداول كلبش-جوردن يشبه القيادة بعلبة سرعة يدوية – مخيف ومحبط عند البدء، ولكنه سهل بمجرد التعود عليه.

(b) إلكترون ذو لف سفلي في حالة ψ_{510} لذرة الهيدروجين. إذا كان بإمكانك قياس مجموع الزخم الزاوي التربيعي للإلكترون وحده (**لا** يشمل دوران البروتون)، فما هي القيم التي قد تحصل عليها، وما هو احتمال كل منها؟

مسألة 4.41 حدد مبدل S^2 مع $S_z^{(1)}$ (حيث $\mathbf{S} \equiv \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$). عمم نتيجتك لإظهار أن

$$\left[S^2, \mathbf{S}^{(1)}\right] = 2i\hbar \left(\mathbf{S}^{(1)} \times \mathbf{S}^{(2)}\right) . \tag{4.93}$$

تعليق: نظرًا لأن $S_z^{(1)}$ لا يتبادل مع S^2، لا يمكننا أن نأمل في العثور على الحالات/التوابع التي تمثل متجهات /أشعة ذاتية متزامنة لكليهما. من أجل تكوين حالات/توابع ذاتية لـ S^2، نحتاج إلى **مجموعات/تراكيب** خطية من الحالات الذاتية لـ $S_z^{(1)}$. هذا هو بالضبط ما تفعله معاملات كلبش-جوردن (في المعادلة (4.91)) لنا. من ناحية أخرى، يتبع ذلك باستدلال واضح من المعادلة (4.93) أن المجموع $\mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$ يتبادل مع S^2، والذي يؤكد فقط ما كنا نعرفه سابقا (انظر المعادلة (4.9)).

قاموس المصطلحات المترجمة

A

كيفي/اعتباطي	Arbitrary
مختلف-الطور/متضاد-الطور	Anti-phase
مقاربة/طريقة	Approach
زاوية سمتية	Azimuthal angle
مُناظر	Analog

C

جيب-التمام	cosine
تبديل/تبادل	Commutation
علاقة تبادلية/تبديلية	Commutation relation
مبدل	Commutator
مُقنن	Canonical
اكتمال، تتميم، تمام	Completeness

D

تضاؤل	Decay
إخماد	Damping
ذبذبات مُخَمَّدة	Damped oscillations
قوة قسرية/سائقة	Driving force
منحل	Degenerate
متميز	Discrete

E

قيم-ذاتية	Eigen-values
مثارة، محفزة	Excited

F

تردد	Frequency
التركيب الدقيق	Fine structure

G

انحدار	Gradient

I

متفق الطور	In-phase
محَاثَّة	Inductance
متكامل	Integrand

L

مسمى	Label
حد/تحديد/قيد	Limitation
الشَّبِيكة	Lattice
أدبيات، مراجع علمية	Literature

M

Modulation	تضمين
Momentum	زخم/كمية الحركة/اندفاع
Matrix	مصفوفة

N

Normalisation	استنظام

O

Oscillation	ذبذبة / تذبذب
Oscillatory motion	حركة تذبذبية
Oscillator	متذبذب
Out-of-phase	خارج-الطور
Observable	ملحوظ

P

Pace	خطو
Parameter	معامل، عامل
Pendulum	بندول/نواس
Pattern	شكل/نمط
Precession	رحوية
Potential	جهد

S

sine	جيب
Spectroscopy	التحليل الطيفي / مطيافية
Standing waves	الموجات المتوقفة
Particle state	تابع موجي/حالة جسيم
Spin	السبن/اللف/المغزل
Spinor	السبينور
shift	إزاحة، انسحاب

T

Transverse	العرضية
waves Travelling	الموجات المتحركة/المتنقلة

U

Universal	جامع، كلي

V

Vibration	اهتزاز
Vibrational motion	حركة اهتزازية
Vibrator	هزاز
Voltage	الجهد

W

example Worked	مثال معمول/محلول