═══════════════════════════════════

Université de Relizane

Faculté des sciences et de technologie

Département de Physique Master 1 2020/2021

Cours:
Modélisations en contraintes – déformations

═══════════════════════════════════

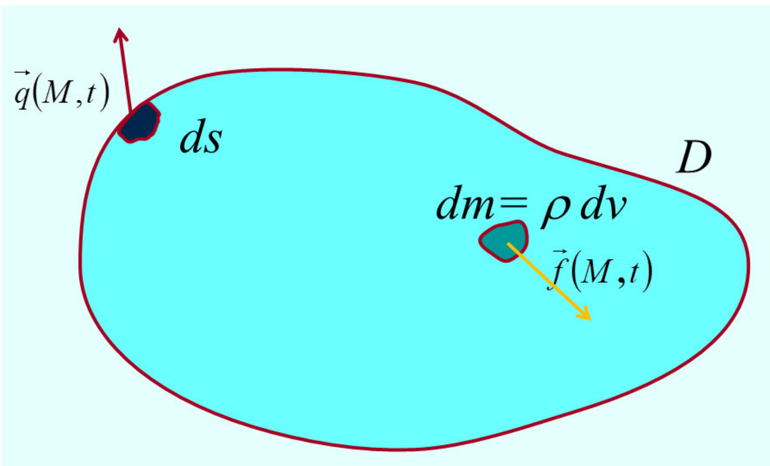
<u>CHAPITRE I</u>: TENSEUR DES CONTRAINTES

CONTRAINTES

Les efforts exercés par l'extérieur sur un domaine d'étude sont de deux types différents:

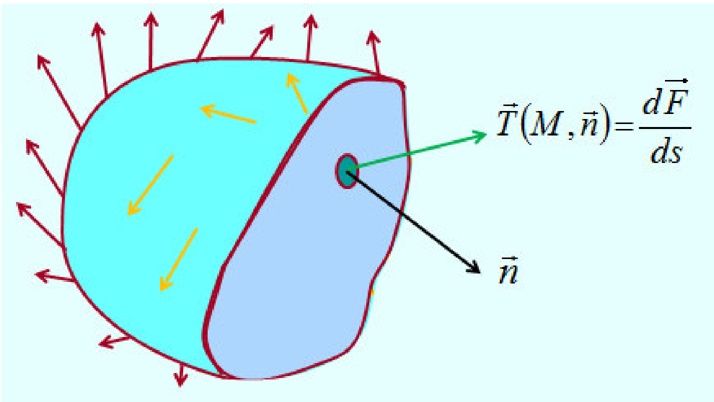
- des actions réparties dans le volume et exercées à distance. Par exemple l'action de la pesanteur ou les forces électromagnétiques. Elles sont représentées par une densité massique d'effort définie en chaque point du domaine $\vec{f}(M,t)$

- des actions réparties sur la surface délimitant le domaine. Par exemple la pression du fluide enveloppant le domaine ou encore les efforts dus aux liaisons cinématiques. Elles sont représentées par une densité surfacique d'effort définie en chaque point de la surface délimitant le domaine $\vec{q}(M,t)$



L'ensemble des efforts appliqués au domaine permet de satisfaire au principe fondamental de la mécanique. Si l'on coupe le domaine en deux parties et que l'on isole une partie les seuls efforts considérés ne permettent pas nécessairement de respecter le principe fondamental de la mécanique.

Il existe des efforts exercés par la partie enlevée sur la partie restante. On peut envisager des actions à distances, mais nous considérerons que ce sont des actions surfaciques créées par la rupture des liaisons interatomiques. Elles sont représentées par une densité surfacique de force $\vec{T}(M,\vec{n})$ appelée vecteur contrainte au point M dans la direction de la normale à la surface de coupe. Cette densité surfacique n'est fonction que de la normale extérieure au domaine pour le point d'étude. C'est le postulat de Cauchy.



On peut alors définir la contrainte normale σ_n comme étant la projection sur la direction de la normale $\vec{n}$ vecteur contrainte. De même on a le vecteur contrainte tangentielle $\vec{\tau}_n$ (encore appelé cission ou contrainte de cisaillement) qui représente le vecteur contrainte projeté dans le plan de la facette.

On peut obtenir ces composantes par de simples relations. Une contrainte normale positive traduit localement un état de traction de la matière. Si au contraire elle est négative, nous avons localement un état de compression.

$$\sigma_n=\vec{T}(M,\vec{n})\vec{n}$$

$$\vec{\tau}_n=\vec{n}\wedge\vec{T}(M,\vec{n})\wedge\vec{n}=\vec{T}(M,\vec{n})-\sigma_n\vec{n}$$

Les composantes du vecteur contrainte représentent une force rapportée à une surface. Elles sont donc homogènes à une pression et vont s'exprimer en pascal ou plus généralement en mégapascal.

$$\vec{T}(M,\vec{n})=\frac{d\,\overrightarrow{F}}{ds}$$

Le vecteur contrainte ainsi déterminé s'applique sur la structure dans sa configuration actuelle, c'est-à-dire déformée. C'est une version eulérienne de ce vecteur.

Si nous avions isolé l'autre partie de notre domaine, nous aurions trouvé des efforts opposés du fait du principe des actions mutuelles.

$$\vec{T}(M,-\vec{n})=-\vec{T}(M,\vec{n})$$

TENSEUR CONTRAINTE

Dans une base cartésienne, les composantes du vecteur contrainte dans une direction quelconque sont déduites par une relation matricielle.

$$\begin{cases} T_1=n_1\sigma_{11}+n_2\sigma_{21}+n_3\sigma_{31} \\ T_2=n_1\sigma_{12}+n_2\sigma_{22}+n_3\sigma_{32} \\ T_3=n_1\sigma_{13}+n_2\sigma_{23}+n_3\sigma_{33} \end{cases}$$

$$\vec{T}(\vec{n})=\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n} \Leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Avec

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Considérons maintenant les facettes perpendiculaires aux vecteurs coordonnées $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Avec

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

REFERENCES

1) Michel. Maya – Cours de Mécanique des Milieux Continus, École nationale supérieures des arts et métiers.

2) Hemut Klocker – Mécanique des milieux continus Elasticité