Université de Relizane — Faculté des Sciences et Technologie

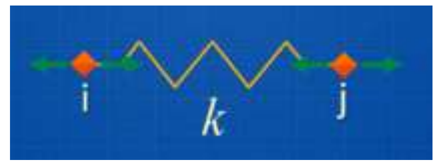
Année Universitaire : 2021-2022 — Département de Génie Mécanique

TD Méthode des éléments finis

Solution TD N° 02

En commence par l'exemple le plus simple, les ressorts à 1D en statique.

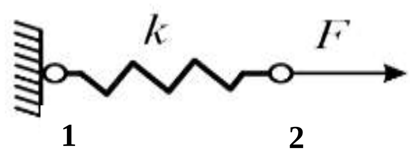
Ce sont des éléments définis par leur coefficient de raideur K et deux nœuds qui ne peuvent que glisser sur un seul axe chacun



Un seul DDL
par nœud

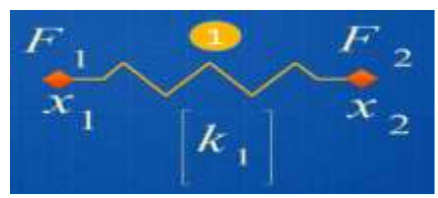
Exercice N°01 :

$R_x = ?, \quad U_x = ?$



Solution :

1- En commence par le maillage.



2- établir le tableau de connectivité.

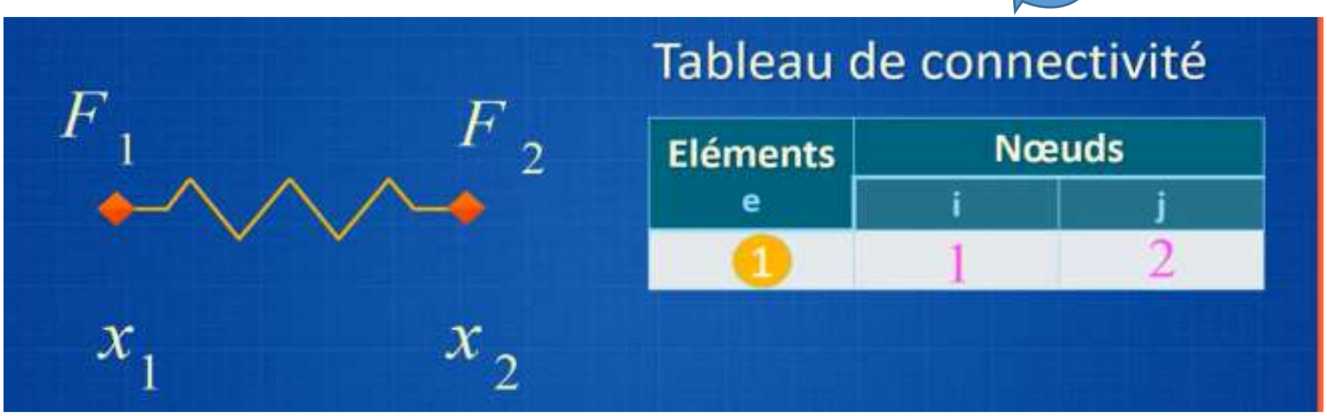


Tableau de connectivité

Eléments e	Nœuds i	Nœuds j
1	1	2

3- écrire la matrice de rigidité élémentaire et globale.

Dimension de la matrice globale = 1 DDL x 2 Nœuds = matrice (2 x 2).

Université de Relizane

Année Universitaire : 2021-2022

Faculté des Sciences et Technologie

Département de Génie Mécanique

TD Méthode des éléments finis

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix}$$

4- écrire l'équation d'équilibre statique.

$$\{F\} = [K] * \{U\} \rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

5- application des conditions aux limites.

On va simplifier l'équation d'équilibre statique en appliquant les conditions aux limites.

On un encastrement au niveau du nœud N°1 signifiant un déplacement x_1 nulle : (x_1=0)

Le système simplifier sera :

$$\cancel{\begin{Bmatrix} R_x \\ F_{ext} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2 \end{Bmatrix}}$$

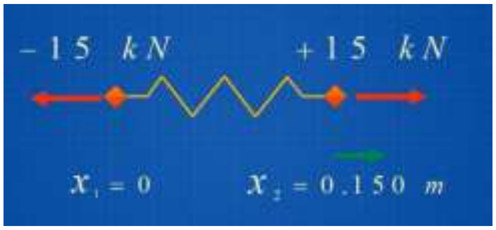
$$F_{ext} = K_1 * x_2 \Longrightarrow x_2 = \frac{F_{ext}}{K_1} \Longrightarrow x_2 = \frac{15}{100} = 0.15\, m$$

Une fois le déplacement est calculer, en revient au système globale pour calculer les réactions.

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ 15 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.15 \end{Bmatrix}$$

$$R_x = K_1 * 0 - K_1 * 0.15 \Longrightarrow > R_x = -100 * 0.15 = -0.15\, KN$$

6- En résume résultat dans une figure suivant :



Exercice N°02 :

R_x = ?, U_x = ?

Solution :

1- En commence par le maillage.

TD Méthode des éléments finis

2- établir le tableau de connectivité.


Tableau de connectivité

Eléments e	Nœuds	
	i	j
1	1	2
2	2	3

3- écrire la matrice de rigidité élémentaire et globale.

$$[K_1] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \quad , \qquad [K_2] = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

Dimension de la matrice globale = 1 DDL x 3 Nœuds = matrice (3 x 3).

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

Le système global à résoudre sera :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

En appliquant les conditions aux limites :

$U_1 = x_1 = 0$	$F_1 = R_x = ?$
$U_2 = x_2 = ?$	$F_2 = 0$
$U_3 = x_3 = ?$	$F_3 = F_{ext} = ?$

Le système simplifier sera comme suite :

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ 0 \\ F_{ext} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 15 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = 0.15\ m \\ x_3 = 0.225\ m \end{cases}$$

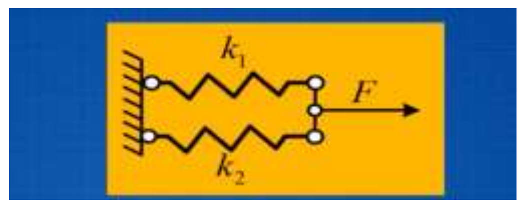
TD Méthode des éléments finis

En remplacent x_2 et x_3 dans le système global pour calculer les réactions :

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.15 \\ 0.225 \end{Bmatrix} \Longrightarrow R_x = K_1 * 0 - K_1 * 0.15 + 0 * 0.225$$

$$\Longrightarrow R_x = -15\ KN$$

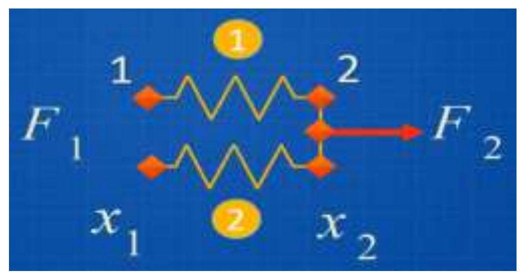
Exercice N°03 :



$R_x = ?, \quad U_x = ?$

Solution :

1- En commence par le maillage.



2- établir le tableau de connectivité.

Eléments	Nœuds	
	i	j
1	1	2
2	1	2

3- écrire la matrice de rigidité élémentaire et globale.

$$[K_1] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \quad , \qquad [K_2] = \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}$$

Dimension de la matrice globale = 1 DDL x 2 Nœuds = matrice (2 x 2).

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_1 - K_2 \\ -K_1 - K_2 & K_1 + K_2 \end{bmatrix}$$

Le système global à résoudre sera :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_1 - K_2 \\ -K_1 - K_2 & K_1 + K_2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

En appliquant les conditions aux limites :

$U_1 = x_1 = 0$	$F_1 = R_x = ?$
$U_2 = x_2 = ?$	$F_2 = F_{ext} = ?$

Le système simplifier sera comme suite :

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ F_{ext} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_1 - K_2 \\ -K_1 - K_2 & K_1 + K_2 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$F_{ext} = (K_1 + K_2) * x_2 \Longrightarrow x_2 = \frac{F_{ext}}{(K_1 + K_2)} \Longrightarrow x_2 = \frac{20}{240} = 0.08\,m$$

En remplacent x_2 dans le système global pour calculer les réactions :

$$R_x = (K_1 + K_2) * 0 - (K_1 + K_2) * 0.08 \Longrightarrow > R_x = -240 * 0.08 = -20\,KN$$