**Chapitre I Notions des erreurs**

**1.1 Définition**

L’analyse numérique est la conception et l’étude d’algorithmes pour obtenir des solutions à des ensembles d’équations issus de modèles issus de la physique, de la biologie, de la ﬁnance ...

**1.2 Erreurs absolue et relative**

Soient **x** une quantité exacte comme 1, e log2 et π … ; et **x∗**est une quantité $x^{\*}$ve ( valeur approchée ) comme $\sqrt{2}$͌ ≈1.141 , π ≈ 3.14 et 1/3 ≈ 0.33333333 puis qu’il y a toujours un écart entre la valeur exacte et la valeur approchée.

**1.2.1 Erreur absolue :**

**Déf :** On appelle erreur absolue de **x∗** ( la valeur approchée de **x**) **sur x ,** laquantité **:**

 **Ea =**$│x-x^{\*}│$

**Exemple :** pour la valeur exacte **x=2/3 ;** la valeur approchée $x\_{1}^{\*}$=0.666667 est mille fois plus précise que la valeur approchée $x\_{2}^{\*}$**=**O.667 ;

Nous avons :

Ea1=│ $x-x\_{1}^{\*}$│ =│ 2 /3- 0.666667│=│ $\frac{2000000-2000001}{3.10^{6}}$│=$1/3. 10^{-6}$

Ea2=│ $x-x\_{2}^{\*}$│ =│ 2 /15- 0.667│=│ $\frac{2000-2001}{3.10^{3}}$│=$1/3. 10^{-3}$

Ainsi ; Ea2=$10^{-3}$. Ea1

L’erreur absolue Ea2 est mille fois plus grande que l’erreur absolue Ea1 et donc $x\_{1}^{\*} $est mille fois plus précise que $x\_{2}^{\*}$.

**1.2.2 Erreur relative :**

**Déf :** On appelle erreur relative à$x^{\*}$ quantité : $E\_{r}=\frac{│x-x^{\*}│}{│x│}=\frac{E\_{a}}{│x│}$ ; et $E\_{r}$ est souvent exprimée en pourcentage.

**Exemple :** pour les valeurs exactes **x=2/3 et y=1 /15** on considère les valeurs approchées respectives $x^{\*}=0.67$et $y^{\*}=0.07$ ; on a les erreurs absolues(e.a) respectives est :

$E\_{a1}$=│ $x-x^{\*}$│ =│ 2 /3- 0. 67│=│ $\frac{200-201}{3.10^{2}}$│=$1/3. 10^{-2}$

$E\_{a2}$=│ $y-y^{\*}$│ =│ 2 /3- 0.07│=│ $\frac{100-105}{15.10^{2}}$│=$1/3. 10^{-2}$

Les erreur relative (e.r) correspondantes sont :

 $ E\_{r1}=\frac{E\_{a1}}{│x│}=0.5\*10^{-2}=0.5\%$

 $E\_{r2}=\frac{E\_{a2}}{│y│}=5\*10^{-2}=5\%$

On a $E\_{a1}= E\_{a2}$ mais $x^{\*}$est une approximation dix fois plus précise pour $x$ que $y^{\*}$ est pour $y$

**1.2.3 Majoration des erreurs absolue et relative :**

**Déf :** On appelle majorant de l’erreur absolue d’une valeur approchée $x^{\*}$ tout nombre réel positif $Δx$ vérifiant :$E\_{a}=│x-x\_{1}^{\*}│\leq Δx$ ou de manière équivalente :

$$x^{\*}-Δx \leq x\leq x^{\*}+Δx$$

**Déf :** On déﬁnit un majorant de l’erreur relative $δx$ d’une valeur approchée $x^{\*} $par :

$$E\_{r1}=\frac{E\_{a}}{│x│}\leq δx$$

Tel que $ δx$ est un nombre réel positif.

Par suite le majorant de l’erreur relative à $x^{\*}$ est déﬁni par : $δx=$$\frac{Δx}{│x^{\*}│}$

**En pratique ;** on ne connait en général pas la valeur exacte $x$maison peut souvent avoir une idée de l’erreur maximale.

**Remarque**: Soit $x$ un nombre tel que $x\_{1}\leq x\leq x\_{2} $ alors : $x^{\*}=\frac{x\_{1}+x\_{2}}{2} $ est une approximation de $x$ avec une majoration de l’erreur absolue $Δx=\frac{│x\_{1}-x\_{2}│}{2} $ .

**1.2 Propagation des erreurs :**

Soient $x$ et$ y$ deux quantités exactes positives ; $x^{\*}$ et $y^{\*}$ deux approximations positives de $x$ et$ y$ ; $Δx$ et $Δy$ des erreurs absolues sur $x$ et$ y$ ;

**Proposition 1** **(Addition) :**

1. $Δ(x+y$)=$ Δx+Δy$ ;

2. $δ(x+y)\leq max(δx,δy).$

**Preuve**:

1. On a $x^{\*}-Δx\leq x\leq x^{\*}+Δx $ et $y^{\*}-Δy\leq y\leq y^{\*}+Δy$.

Alors : $\left( x^{\*}+y^{\*}\right)-\left(Δx+Δy\right)\leq x+y\leq \left( x^{\*}+y^{\*}\right)+(Δx+Δy)$

Ainsi $\left(Δx+Δy\right)$ est un majorant de l’erreur absolue de $(x+y$) , donc $Δ(x+y$)=$ Δx+Δy$

1. On a : $δ\left(x+y\right)=\frac{Δ(x+y)}{│x^{\*}+y^{\*}│}$ = $\frac{Δx}{│x^{\*}│}$ $\frac{│x^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│} +\frac{Δy}{│y^{\*}│}$ $\frac{│y^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│}$

Donc $δ\left(x+y\right)=δx\*ʎ\_{1}+δy\*ʎ\_{2}$ avec $ʎ\_{1}=\frac{│x^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│}>0$ et $ʎ\_{2}=\frac{│y^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│}>0$ et $ʎ\_{1}+ʎ\_{2}=1$

Alors $δ\left(x+y\right)\leq max\left(δx,δy\right)ʎ\_{1}+max\left(δx,δy\right)ʎ\_{2}\leq (ʎ\_{1}+ʎ\_{2})max\left(δx,δy\right)$

* Alors : $δ\left(x+y\right)\leq max\left(δx,δy\right)$.

**Proposition 2** **(Soustraction) :**

1. $Δ(x-y$)=$ Δx+Δy$ ;

2. $δ\left(x-y\right)\leq \frac{x^{\*}+y^{\*}}{x^{\*}-y^{\*}} max(δx,δy).$

**Preuve**:

1. On a : $x^{\*}-Δx\leq x\leq x^{\*}+Δx $ et $y^{\*}-Δy\leq y\leq y^{\*}+Δy$ => $-y^{\*}-Δy\leq -y\leq -y^{\*}+Δy$

Alors : $\left( x^{\*}-Δx\right)+\left(-y^{\*}-Δy\right)\leq x-y\leq \left(x^{\*}+Δx\right)+(-y^{\*}+Δy)$

Donc : $\left( x^{\*}-y^{\*}\right)-\left(Δx+Δy\right)\leq x-y\leq \left( x^{\*}-y^{\*}\right)+(Δx+Δy)$

Ainsi $\left(Δx+Δy\right)$ est un majorant de l’erreur absolue de $(x-y$) , et par suite $Δ(x+y$)=$ Δx+Δy$

1. On a : $δ\left(x-y\right)=\frac{Δ(x-y)}{│x^{\*}-y^{\*}│}$ =$\frac{Δ\left(x\right)+Δy}{│x^{\*}-y^{\*}│}$ = $\frac{Δx}{│x^{\*}│}$ $\frac{│x^{\*}│}{│x^{\*}-y^{\*}│}\frac{│x^{\*}+y^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│} +\frac{Δy}{│y^{\*}│}$ $\frac{│y^{\*}│}{│x^{\*}-y^{\*}│}\frac{│x^{\*}+y^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│}$

Donc $δ\left(x-y\right)=(δx\*ʎ\_{1}+δy\*ʎ\_{2})\frac{│x^{\*}+y^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│}$ avec $ʎ\_{1}=\frac{│x^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│}>0$ et $ʎ\_{2}=\frac{│y^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│}>0$ et $ʎ\_{1}+ʎ\_{2}=1$

Alors $δ\left(x-y\right)\leq \left(max\left(δx,δy\right)ʎ\_{1}+max\left(δx,δy\right)ʎ\_{2}\right)\frac{│x^{\*}+y^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│}$

 $\leq (ʎ\_{1}+ʎ\_{2})max\left(δx,δy\right)\frac{│x^{\*}+y^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│}$

* Alors : $δ\left(x-y\right)\leq max\left(δx,δy\right)\frac{│x^{\*}+y^{\*}│}{│x^{\*}+y^{\*}│}$ .

**Proposition 3** **(Multiplication) :**

1. $Δ(x.y$)=$ x^{\*}.Δy+y^{\*}.Δx$ ;

2. $δ\left(x.y\right)=δx+δy.$

**Preuve**:

1. On a : $x^{\*}-Δx\leq x\leq x^{\*}+Δx $ et $y^{\*}-Δy\leq y\leq y^{\*}+Δy$

On supposant $x^{\*}-Δx> $0 et $y^{\*}-Δy>0$ donc $(x^{\*}-Δx)(y^{\*}-Δy)\leq xy\leq (x^{\*}+Δx)(y^{\*}+Δy)$

 ⬄ $x^{\*}y^{\*}-x^{\*}Δy-y^{\*}Δx+ΔxΔy\leq xy\leq x^{\*}y^{\*}+x^{\*}Δy+y^{\*}Δx+ΔxΔy$

Si on néglige l’erreur de second ordre $ΔxΔy$on obtient: $x^{\*}y^{\*}-x^{\*}Δy-y^{\*}Δx\leq xy\leq x^{\*}y^{\*}+x^{\*}Δy+y^{\*}Δx$

Ainsi «$ x^{\*}.Δy+y^{\*}.Δx$» devient (un majorant de) l’e.a de $ x.y$, donc $Δ(x+y$)=$ Δx+Δy$

1. L’erreur relative est : $δ\left(x-y\right)=\frac{Δ(xy)}{x^{\*}y^{\*}}=\frac{x^{\*}Δy+y^{\*}Δx}{x^{\*}y^{\*}}=\frac{Δy}{y^{\*}}+\frac{Δx}{x^{\*}}=δx+δy.$

**Proposition 3** **(Division) :**

1. $Δ(\frac{x}{y}$) =$ \frac{x^{\*}Δy+y^{\*}Δx}{y^{\*2}}$ ;

2. $δ\left(\frac{x}{y}\right)=δx+δy.$

**Preuve**:

1. Nous avons : $x^{\*}-Δx\leq x\leq x^{\*}+Δx $ et $y^{\*}-Δy\leq y\leq y^{\*}+Δy $ => $\frac{1}{y^{\*}+Δy}\leq y\leq \frac{1}{y^{\*}-Δy}$

D’où : $\frac{x^{\*}-Δx}{y^{\*}+Δy}\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^{\*}+Δx }{y^{\*}-Δy}$ ⬄ $\frac{y^{\*}-Δy}{y^{\*}-Δy} . \frac{x^{\*}-Δx}{y^{\*}+Δy}\leq \frac{x}{y} \leq \frac{y^{\*}+Δy}{y^{\*}+Δy} . \frac{x^{\*}+Δx }{y^{\*}-Δy}$

 ⬄ $ \frac{x^{\*}y^{\*}-x^{\*}Δy-y^{\*}Δx+ΔxΔy}{y^{\*2}-Δy^{2}}\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^{\*}y^{\*}+x^{\*}Δy+y^{\*}Δx+ΔxΔy}{y^{\*2}-Δy^{2}}$

Si on néglige l’erreur de second ordre $Δy^{2}$ et $ΔxΔy$ on obtient : $ \frac{x^{\*}y^{\*}-x^{\*}Δy-y^{\*}Δx}{y^{\*2}}\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^{\*}y^{\*}+x^{\*}Δy+y^{\*}Δx}{y^{\*2}}$

 ⬄ $\frac{x^{\*}}{y^{\*}}-\frac{x^{\*}Δy+y^{\*}Δx}{y^{\*2}}\leq \frac{x}{y} \leq \frac{x^{\*}}{y^{\*}}+\frac{x^{\*}Δy+y^{\*}Δx}{y^{\*2}}$

Donc $\frac{x^{\*}Δy+y^{\*}Δx}{y^{\*2}}$ est (un majorant de) l’e.a de $\frac{x}{y}$ et par suite : $Δ(\frac{x}{y})=\frac{x^{\*}Δy+y^{\*}Δx}{y^{\*2}}$

1. $δ\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{Δ(\frac{x}{y})}{\frac{x^{\*}}{y^{\*}}}= \frac{x^{\*}Δy+y^{\*}Δx}{y^{\*2}} =δx+δy$

**1.3 Chiffres significatifs :**

**Déf** : Un chiffre significatif d’un nombre approché est le seul chiffre qu’on doit garder, c’est à dire tout chiffre dans sa représentation décimale différent du zéro; et un zéro qui se trouve entre deux chiffres, ou il constitue un chiffre conservé.

**Note** : Un chiffre significatif d’un nombre approché $x^{\*}$ est dit exact (c s e) si l’erreur absolue de $x^{\*}$ vérifie : $Δx$ ***≤ 0,5×10m*** avec ***m*** est le rang de ce chiffre significatif. D’où

* Si : $Δx$ ***≤ 0,5×10−n***, alors le ***nème*** chiffre significatif après la virgule est exact
* Si : $Δx$ ***≤ 0,5×10n−1***, alors le ***nème*** chiffre significatif avant la virgule est exact.

**Propriétés** : **1.** Si un chiffre significatif est exact, alors tous les chiffres à sa gauche sont exacts.

1. Si un chiffre n’est pas exact, alors tous ceux à sa droite ne le sont pas.

**Remarque** : Il y a une relation entre l’erreur relative et les chiffres significatifs, en effet,

* Si un nombre approximatif possède ***n*** chiffres significatifs exacts, alors son erreur relative est ***< 5×10−n*** (sauf si le nombre est 1 suivi de ***(n−1)*** zéros).
* Si l’erreur relative à $x^{\*}$ est ***< 0,5 × 10−n*** alors $x^{\*}$ possède au moins ***n*** chiffres signiﬁcatifs exacts.

**Chapitre II : Interpolation et approximation**

A partir d’un ensemble de points $\left\{(x,\right.\left.y)\right\}\_{i=0:n}$ ; on recherche dans un espace de fonctions,

 

**Interpolation** : une fonction **s** qui interpole les nœud **s**(***xi ,yi***) , ***s(xi) = yi* , *∀ i = 0 : n***

**Approximation au sens des moindres carrés :** une fonction s qui minimise l’énergie,



**II.1 Existence du polynôme d’interpolation**

 **Théorème 1 :** Soit (*xi,yi), i* = 0,1,...,*n* avec *xi ≠ xj*; si *i ≠ j*, il existe un polynôme et un seul Pn(*x*) de degré inférieur ou égal à ***n*** tel que : **Pn(*xi*) *= yi  , i = 0,1,...,n.***

$$\left\{\begin{matrix}\begin{matrix}a\_{0}+a\_{1}x\_{0}+a\_{2}x\_{0}^{2}+…+a\_{n}x\_{0}^{n}=y\_{0}\\a\_{0}+a\_{1}x\_{1}+a\_{2}x\_{1}^{2}+…+a\_{n}x\_{1}^{n}=y\_{1}\end{matrix}\\\begin{matrix}a\_{0}+a\_{1}x\_{2}+a\_{2}x\_{2}^{2}+…+a\_{n}x\_{2}^{n}=y\_{2}\\… … … … …\\a\_{0}+a\_{1}x\_{n}+a\_{2}x\_{n}^{2}+…+a\_{n}x\_{n}^{n}=y\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\right.$$

* **Données:** $a\_{i} et y\_{i } où i=\overbar{1:n }$ **dans K avec K=R ou C ;**
* **Inconnues:** $x\_{i } où i=\overbar{1:n }$ **dans K .**

C’est un système linéaire par rapport à ai ; *i = 0,...,n,* on peut l’écrire sous forme matricielle :

*V*

$$\left(\begin{matrix}1 x\_{0} … x\_{0}^{n} \\1 x\_{1} … x\_{1}^{n}\\\begin{matrix}\vdots \vdots \ddots \vdots \\1 x\_{n} … x\_{n}^{n}\end{matrix}\end{matrix}\right) \left(\begin{matrix}a\_{0}\\a\_{1}\\\begin{matrix}\vdots \\a\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix}y\_{0}\\y\_{1}\\\begin{matrix}\vdots \\y\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\right)$$

* Δ=det(*V*) : est appelé le déterminant de la matrice de Vander Monde *V ;*
* det(V)  ≠ 0 : car les $x\_{i }$sontdistincts. D’où le polynôme existe et unique.

**II.1.1 Méthode de Lagrange :**

Soit : $P\_{n}\left(x\right)$ le polynôme d’interpolation de Lagrange avec :

$$P\_{n}\left(x\right)= \sum\_{i=0}^{n}y\_{i}\frac{\prod\_{\begin{matrix}j=0\\j\ne i\end{matrix}}^{n}\left(x-x\_{i}\right)}{\prod\_{\begin{matrix}j=0\\j\ne i\end{matrix}}^{n}\left(x\_{i}-x\_{j}\right)}$$

Ou encore : $P\_{n}\left(x\right)= \sum\_{i=0}^{n}y\_{i}\frac{\left(x-x\_{0}\right) \cdots \left(x-x\_{i-1}\right)\left(x-x\_{i+1}\right) \cdots \left(x-x\_{n}\right)}{\left(x\_{i}-x\_{0}\right) \cdots \left(x\_{i}-x\_{i-1}\right)\left(x\_{i}-x\_{i+1}\right) \cdots \left(x\_{i}-x\_{n}\right)}$

**Exemple** : (cas particuliers)

* Pour *n* =1 : $ P\_{n}\left(x\right)=y\_{0}\frac{\left(x-x\_{1}\right) }{\left(x\_{0}-x\_{1}\right) }+y\_{1}\frac{\left(x-x\_{0}\right) }{\left(x\_{1}-x\_{0}\right) }$ ; c’est l’équation d’une droite passant par les points $(x\_{0};y\_{0})$ et $(x\_{1};y\_{1})$ donnés.
* Pour *n* =2 : $ P\_{n}\left(x\right)=y\_{0}\frac{\left(x-x\_{1}\right) \left(x-x\_{2}\right) }{\left(x\_{0}-x\_{1}\right) \left(x\_{0}-x\_{2}\right)}+y\_{1}\frac{\left(x-x\_{0}\right)\left(x-x\_{2}\right) }{\left(x\_{1}-x\_{0}\right)\left(x\_{1}-x\_{2}\right) }+y\_{2}\frac{\left(x-x\_{0}\right)\left(x-x\_{1}\right) }{\left(x\_{2}-x\_{0}\right)\left(x\_{2}-x\_{1}\right) }$ ; qui est l’équation d’une parabole passe par les trois points $(x\_{0};y\_{0})$ , $(x\_{1};y\_{1})$ et $(x\_{2};y\_{2})$.
* **Détermination pratique des polynômes de Lagrange :**

La détermination des (n+1) polynômes $L\_{i}\left(x\right)$ peut être conduite de la façon suivante :

On dresse le tableau carrée

$$\begin{matrix} x-x\_{0} x\_{0}-x\_{1} x\_{0}-x\_{2} x\_{0}-x\_{3} \cdots x\_{0}-x\_{n}\\x\_{1}-x\_{0} x-x\_{1} x\_{1}-x\_{2} x\_{1}-x\_{3} \cdots x\_{1}-x\_{n}\\\begin{matrix}x\_{2}-x\_{0} x\_{2}-x\_{1} x-x\_{2} x\_{2}-x\_{3} \cdots x\_{2}-x\_{n}\\\begin{matrix}\vdots \vdots \vdots \vdots \ddots \vdots \\x\_{n}-x\_{0} x\_{n}-x\_{1} x\_{n}-x\_{2} x\_{n}-x\_{3} \cdots x-x\_{n}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}$$

Et on voit que :

$$L\_{i}\left(x\right)=\frac{Le produit des termes diagonaux du tableau }{Le produit des termes de la (i+1)^{eme} ligne du tableau }$$

**Exemple** : déterminer les 5 polynômes $L\_{i}\left(x\right)$ attachés aux valeurs : $x\_{0}=0$,$x\_{1}=4$ ,$ x\_{2}=-4$ , $x\_{3}=2$ et $x\_{4}=1$.

$$\begin{matrix}x -4 4 -2 -1\\4 x-4 8 2 3\\\begin{matrix}-4 -8 x+4 -6 -5\\2 -2 6 x-2 1\\1 -3 5 -1 x-1\end{matrix}\end{matrix}$$

Nous avons alors :

$$ L\_{0}\left(x\right)=\frac{x\left(x-4\right)\left(x+4\right)\left(x-2\right)\left(x-1\right)}{x\left(-4\right)4\left(-2\right)\left(-1\right)}=\frac{1}{32 }\left(x-4\right)\left(x+4\right)\left(x-2\right)\left(x-1\right)$$

$L\_{0}\left(x\right)= -1-\frac{3}{2 }x+\frac{7}{16 }x^{2}+\frac{3}{32 }x^{3}-\frac{1}{32 }x^{4}$

On obtient de la même manière :

$L\_{1}\left(x\right)= \frac{1}{24 }x-\frac{5}{96 }x^{2}+\frac{1}{192 }x^{3}+\frac{1}{192 }x^{4}$

$L\_{2}\left(x\right)= -\frac{1}{120 }x+\frac{7}{480 }x^{2}-\frac{7}{960 }x^{3}+\frac{1}{960}x^{4}$

$L\_{3}\left(x\right)= -\frac{2}{3 }x+\frac{2}{3 }x^{2}+\frac{1}{24 }x^{3}-\frac{1}{24 }x^{4}$

$L\_{4}\left(x\right)= -\frac{32}{15 }x-\frac{16}{15 }x^{2}-\frac{2}{15 }x^{3}+\frac{1}{15 }x^{4}$