Université Ahmed Zabana - Relizane 2021-2022

1^{er} **année ST Maths 01**

Fiche de TD 1

Exercice 1 : Soient p et q deux assertions
Montrer en utilisant la table de vérité que les propositions suivantes sont vraies

1· $p \Longleftrightarrow \overline{\overline{p}}$
2· $\overline{(p \wedge q)} \Longleftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
3· $\overline{(p \vee q)} \Longleftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$
4· $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$.

Exercice 2 : -Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
1· $\cos\frac{\pi}{2}$ est positif et $\ln e = 1$.
2· Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = \sin x$ ou $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$.
3· $\sin(-\pi) = \sin\pi \Longrightarrow \ln\frac{1}{\pi} > 0$.
4· $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0$.
5· $\exists\, x \in \mathbb{N}, \quad x^2 \leq 0$.
6· $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y + 1 = 0$.

Exercice 3 :
1) (Raisonnement direct). Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$
2)(Raisonnement par contre-exemple). Est ce que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x < 4 \Longrightarrow x^2 < 16.$$

3) (Contraposée). Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad n^2$ est impair $\Longrightarrow n$ est impair.

4)(Raisonnement par l'absurde). Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$ $\quad$ si $a = b \Longrightarrow \dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$.

5) (Récurrence). $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

Correction de fiche TD 1

Solution de L'exercice 1:

I) En utilisant la table de vérité

p	$\overline{p}$	$\overline{\overline{p}}$	$p \Longleftrightarrow \overline{\overline{p}}$
V	F	V	V
F	V	F	V

De la même manière, on prouve (2) et (3) :

p	q	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$	$(\overline{p \wedge q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

p	q	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$	$(\overline{p \vee q}) \Longleftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

on prouve (4) comme suit:

La définition mathématique est la suivante : L'assertion $(\overline{p} \vee q)$ est notée $(p \Longrightarrow q)$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \Longrightarrow q$	$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$	$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Solution de L'exercice 2:

1$\cdot$ $\cos\frac{\pi}{2}$ est positif et $\ln e = 1$ est une assertion vraie car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ et $\ln e = 1$

$$[(V \wedge V) \Longleftrightarrow V]$$

2$\cdot$ Pour tout $x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = \sin x$ ou $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ est une assertion vraie car $\sin(-x) = -\sin x$ fonction impaire (Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\sin(-x) = \sin x$ fausse, la fonction sin est impaire), $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ est toujours vraie pour $x \in \mathbb{R}$

$$[(F \vee V) \Longleftrightarrow V]$$

3$\cdot$ $\sin(-\pi) = \sin\pi \Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{\pi}\right) > 0$ est une assertion fausse car $(\sin(-\pi) = \sin\pi = 0)$ est vraie par contre $\ln\left(\frac{1}{\pi}\right)$ est négative

$$[(V \Longrightarrow F) \Longleftrightarrow F]$$

4$\cdot$ $\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^2 > 0$ est une assertion fausse car $\exists\, x = 0,\ x^2 = 0^2 = 0 > 0$ est fausse

5$\cdot$ $\exists\, x \in \mathbb{N}, \quad x^2 \leq 0$ est une assertion vraie car $\exists\, x = 0,\ x^2 = 0^2 = 0 \leq 0$

6$\cdot$ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, y \in \mathbb{R}, \quad x + y + 1 = 0$ est une assertion vraie
pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut prendre $y = -x - 1$ (existe) . On a $x + y + 1 = x - x - 1 + 1 = 0$

Solution de L'exercice 3:

1) Rappelons que les rationnels $\mathbb{Q}$ sont l'ensemble des réels s'écrivant $\dfrac{m}{n}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

On suppose $a, b \in \mathbb{Q}$ et on montre $a + b \in \mathbb{Q}$

$a \in \mathbb{Q}$ alors il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = \dfrac{m}{n}$

$b \in \mathbb{Q}$ alors il existe $m' \in \mathbb{Z}$ et $n' \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = \dfrac{m'}{n'}$

Alors

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} = \frac{mn' + nm'}{nn'}.$$

Or le numérateur $mn' + nm'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$, le dénominateur nn' est lui un élément de $\mathbb{N}^*$. Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $a + b = \dfrac{m''}{n''}$ avec $m'' \in \mathbb{Z}$ et $n'' \in \mathbb{N}^*$.

Donc $a + b \in \mathbb{Q}$

2) Si $x = -6 \in \mathbb{R}$ est un contre-exemple.

$$-6 < 4 \Longrightarrow 36 < 16 \text{ est une proposition fausse}$$

car $$(V \Longrightarrow F) \Longleftrightarrow F$$

3) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2$ est impair $\Longrightarrow n$ est impair
Le raisonnement par contraposition est basé sur léquivalence suivante.

$$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\overline{q} \Longrightarrow \overline{p})$$

On montre que si n est pair $\Longrightarrow n^2$ est pair.
n est pair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$
alors $n^2 = 4k^2 = 2\,(2k^2)$.
Finalement n^2 est pair.
4) Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $a = b$ et $\dfrac{a}{1+b} \neq \dfrac{b}{1+a}$

$$\begin{aligned}
&donc\ a = b\ et\ a(1+a) \neq b(1+b)\\
&donc\ a = b\ et\ a - b + a^2 - b^2 \neq 0\\
&donc\ a = b\ et\ (a-b)(1+a+b) \neq 0
\end{aligned}$$

est une contradiction car $a = b \Longrightarrow (a-b) = 0 \Longrightarrow (a-b)(1+a+b) = 0$.
Conclusion : Si $a = b$ alors $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$

5) Montrons que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.
Soit $p(n)$ l'assertion $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7
Etapes du raisonnement par récurrence :
1· Pour $n = 0$ $\quad 3^{2\times 0} - 2^0 = 1 - 1 = 0 = 0 \times 7,\ \ p(0)$ est vraie
2· On suppose $p(n)$ est vraie c'est à dire

$$\exists\ k \in \mathbb{Z}\ \text{ tel que } 3^{2n} - 2^n = 7k$$

3· On démontre que $p(n+1)$ est vraie

$$\exists\ L \in \mathbb{Z}\ \text{ tel que } 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 7L\ ?$$

On a :

$$
\begin{aligned}
3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 3^{2n+2} - 2^{n+1} \\
&= 3^{2n} \times 3^2 - 2^n \times 2 \\
&= 3^{2n}(7+2) - 2^n \times 2 \\
&= 3^{2n} \times 7 + 3^{2n} \times 2 - 2^n \times 2 \\
&= 3^{2n} \times 7 + 2(3^{2n} - 2^n) \\
&= 3^{2n} \times 7 + 2 \times 7k \\
&= 7(3^{2n} + 2k) = 7L \quad avec\ L = 3^{2n} + 2k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Finalement

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ 3^{2n} - 2^n \text{ est un multiple de 7.}$$