Chapitre I

Méthodes du raisonnement mathématique

Dans ce chapitre, on présentera les notions élémentaires de la logique mathématique et les différents modes de raisonnement

1 Logique

1.1 Assertions

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple 1.1
"15 *est plus grand que* 10" *est une assertion vraie.*
"*Trois est un nombre pair*" *est une assertion fausse.*
"*Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $x^2 \geq 0$" *est une assertion vraie.*
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ *on a* $|z| = 1$ *est une assertion fausse.*
" *Le nombre* x *est impair*" *n'est pas une assertion puisqu'il est impossible de décider si elle est vraie ou fausse tant que l'on connait pas* x.
Si P *est une assertion et* Q *est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de* P *et de* Q.
L'opérateur logique et($\wedge$)
L'assertion $\ll$ *Pet* $Q \gg$ *est vraie si* P *est vraie et* Q *est vraie. L'assertion* $\ll P$ *et* $Q \gg$ *est fausse sinon.*

On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.2
"$3 + 5 = 8 \wedge 3 \times 6 = 18$" *est une assertion vraie*
"$2 + 2 = 4 \wedge 2 \times 3 = 7$" *est une assertion fausse.*

L'opérateur logique *ou* (V)
L'assertion ≪ P ou Q ≫ est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion ≪ P ou Q ≫ est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.3
"$2 + 2 = 4 \vee 3 \times 2 = 6$" *est une assertion vraie*
"$2 = 4 \vee 4 \times 2 = 7$" *est une assertion fausse.*

1.1.1 La négation $\overline{P}$

L'assertion ≪ $\overline{P}$ ≫ est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Exemple 1.4 *La négation de l'assertion* $3 \geq 0$ *elle est l'assertion* $3 \lneqq 0$.

1.1.2 Limplication $\Longrightarrow$

La définition mathématique est la suivante :
L'assertion $\ll \overline{P}$ ou $Q \gg$ est notée $P \Rightarrow Q$. Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 1.5
$2+2=5 \Rightarrow \sqrt{2}=2$ *est vraie* ! *Eh oui, si* P *est fausse alors l'assertion* $P \Rightarrow Q$ *est toujours vraie.*

1.1.3 L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L'équivalence est définie par : $\ll P \Longleftrightarrow Q \gg$ est l'assertion $\ll (P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P) \gg$
On dira $\ll P$ est équivalent à $Q \gg$ ou $\ll P$ équivaut à $Q \gg$ ou $\ll P$ si et seulement si Q $\gg$. Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.2 Quantificateurs

Le quantificateur $\forall$:$\ll$ pour tout $\gg$
L'assertion

$$\forall x \in E, P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E. On lit $\ll$ Pour tout x appartenant à $E, P(x)$ est vraie $\gg$.
Par exemple :
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1$ est une assertion fausse.

Le quantificateur $\exists$:$\ll$ il existe $\gg$

L'assertion

$$\exists\, x \in E, P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit $\ll$ il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) $\gg$

Par exemple :

$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$ est vraie, par exemple $x = 0$

$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$ est fausse.

La négation des quantificateurs

La négation de $\ll \forall x \in E, P(x) \gg$ est $\ll \exists x \in E, \overline{P(x)} \gg$

Exemple : la négation de $\ll \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \gg$ est l'assertion $\ll \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \gg$

La négation de $\ll \exists x \in E, P(x) \gg$ est $\ll \forall x \in E, \overline{P(x)} \gg$

Exemple : la négation de $\ll \exists x \in \mathbb{R}, x \leq 0 \gg$ est l'assertion $\ll \forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \gg$

2 Raisonnements

2.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 2.1

Montrer que si $a = b \Longrightarrow \dfrac{a+b}{2} = b$

on a

$$\begin{aligned} a = b &\Longrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{a+b}{2} = b \end{aligned}$$

2.2 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante.

L'assertion $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \Longrightarrow Q$.

On montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*

Démonstration

Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair.
Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.
Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à si n^2 est pair alors n est pair.

2.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $\ll P \Longrightarrow Q \gg$ repose sur le principe suivant : On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $\ll P \Longrightarrow Q \gg$ est vraie.

Exemple 2.3 *Soient $a, b > 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$*

Démonstration :

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$.
Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$.
La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.
Conclusion : Si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$

2.4 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\ll \forall x \in E,\ P(x) \gg$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de $\ll \forall x \in E, P(x) \gg$ est $\ll \exists x \in E, \overline{P(x)} \gg$. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion $\ll \forall x \in E, P(x) \gg$.

Exemple 2.4 *Montrer que l'assertion suivante est fausse $\ll \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 1 \gg$*

Démonstration : Un contre-exemple est $x = 0.5$

2.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes:
• On prouve $P(0)$. Est vraie.
• On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.
Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exemple 2.5 *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N} \quad 2^n > n$.

Démonstration Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante : $2^n > n$
Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \quad \text{car par } P(n) \text{ nous savons } 2^n > n \\ &> n+1 \quad \text{car } 2^n \geq 1 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie .
Conclusion : Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est- à -dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$

Remarque 2.1 *Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout* $n \geq n_0$, *alors on commence l'initialisation au rang* n_0.

Exemple 2.6 *Montrons que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$$

On raisonne par récurrence. Pour $n = 1$, *On a*

$$3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17 = 17 \times 1$$

Donc

$$\exists k = 1 \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2-1} + 2^{3-2} = 17k$$

On suppose que

$$\exists k \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 17k$$

et montrons que

$$\exists k' \in \mathbb{N} : 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17k'$$

On a

$$\begin{aligned} 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} &= 3 \times 25 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2} \times 8 \\ &= 8 \left(3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}\right) + 17 \times 3 \times 5^{2n-1} \\ &= 8 \times 17k + 17 \times k'' \\ &= 17k' \ \textit{avec}\ k' = (8k + k'') \end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ *est divisible par* 17 .