

II.1. Introduction

L'optimisation est une branche des mathématiques cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à minimiser ou maximiser une fonction sur un ensemble.

L'étape d'optimisation permet en générale d'aboutir une ou plusieurs solutions de bonne qualité.

II.2. Problèmes d'optimisation en génie des procédés

L'optimisation classique se **sinde** deux types de problèmes :

1. Problèmes sans contraintes ;
2. Problèmes avec contraintes.

Dans les deux cas, le but consiste à trouver les valeurs maximisent ou minimisent une fonction.

Exemple :

Soit la fonction

$$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \dot{f}(x) = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$\dot{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow f''(0) = 6(0 - 1) = -6 < 0 \Rightarrow f \text{ a maximum} \\ x = 2 \Rightarrow f''(2) = 6(2 - 1) = 6 > 0 \Rightarrow f \text{ a minimum} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(0) = 0^3 - 3(0)^2 + 5 = 5 \\ f(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 5 = 1 \end{cases}$$

- La fonction a un maximum si $x=0$, les coordonnées du maximum $(0, 5) \Rightarrow$ la fonction un maximum locale ou relatif.
- La fonction a un minimum si $x=2$, les coordonnées du minimum $(2, 1) \Rightarrow$ la fonction un minimum locale ou relatif.
- Ces deux valeurs (maximum et minimum) sont appelées des extrema locaux ou relatifs. Parce qu'il existe des valeurs de x pour la quelle plus grandes que 5 ou plus petites que 1. Comme illustre dans la figure suivante :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	6
y	-49	-15	1	5	5	1	5	21	113

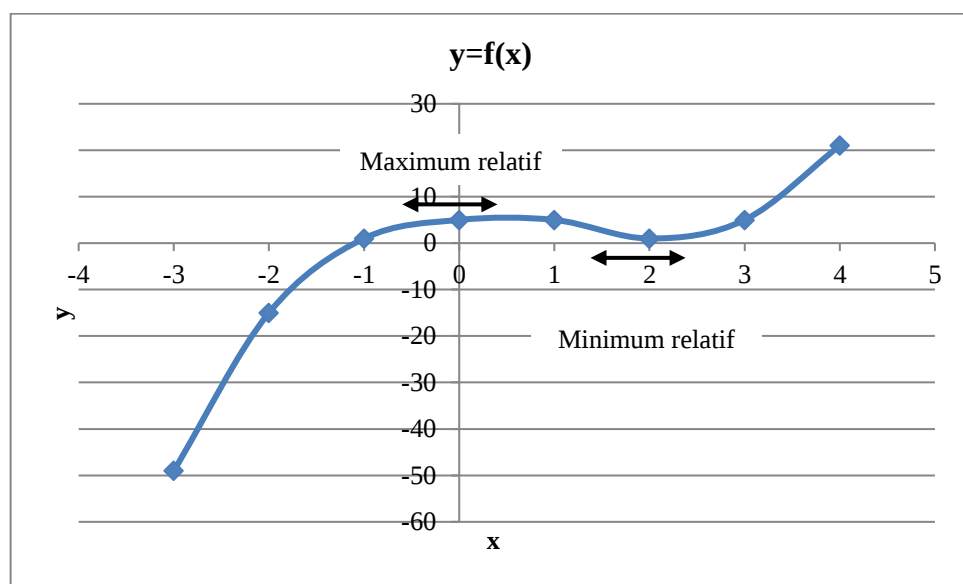


Figure II.1. Extrema locaux.

Cependant, on peut définir ce que l'on appelle un maximum ou un minimum global ou absolu. En ce point la fonction prend la valeur la plus grande ou la plus petite sur un intervalle donnée (voir la figure suivante).

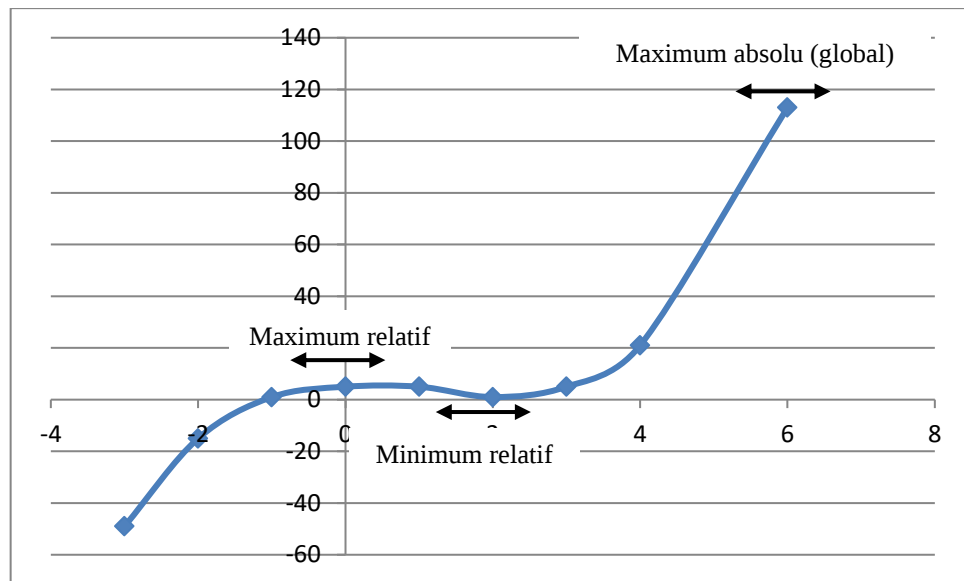


Figure II.2. Extrema relatif et absolu.

Exercice

L'industrie pharmaceutique produit q boîtes de médicament par semaine à un coût total de $c = 6q^2 + 80q + 5000$, son prix s'exprime par la relation $P = 1080 - 4q$.

Montrons que le bénéfice net maximum est atteint lorsque la production est de 50 boîtes par semaine.

Solution

On sait que la revue de la firme est égale au prix multiple par la quantité.

$$R = q \cdot P = q(1080 - 4q) \Rightarrow R = -4q^2 + 1080q$$

Son bénéfice s'exprime par

$$B = R - C = -4q^2 + 1080q - 6q^2 - 80q - 5000$$

$$B = -10q^2 + 1000q - 5000$$

$$\frac{\partial B}{\partial q} = -20q + 1000$$

$$\hat{B} = -20q + 1000 = 0 \Rightarrow q = \frac{-1000}{-20} = 50$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial q^2} = -20 < 0 \text{ La fonction de bénéfice a un maximum en } q = 50$$

Ce maximum absolu "global" car la fonction est une parabole

q	0	50	100
B	-5000	2000	-5000

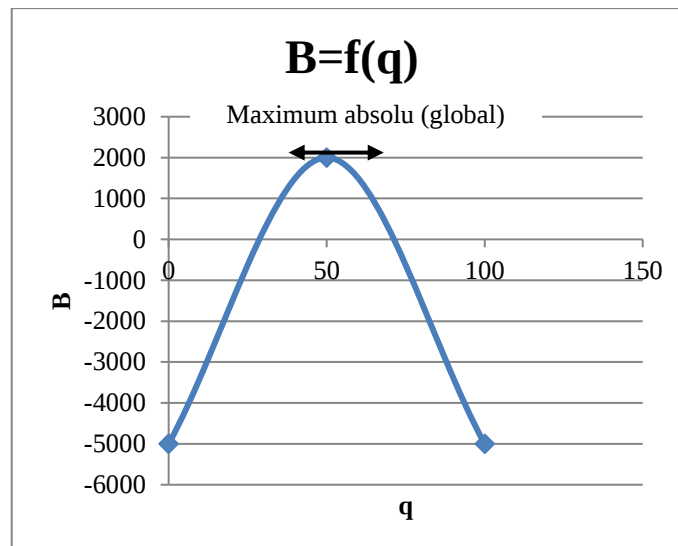


Figure II.3. Fonction bénéfice.

II.2. Recherche directe monodimensionnelle et multidimensionnelle

II.3. Approche mathématique de l'optimisation sans contrainte

I.4. Problèmes avec contraintes égalités et avec contraintes inégalités I.6.

Résolution des problèmes d'optimisation avec contraintes en utilisant Excel®

I.7. Programmation linéaire

La programmation mathématique est un problème d'optimisation qui consiste à trouver l'optimum (maximum ou minimum) d'une fonction à n variables $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (soumises à m contraintes) $f_i(x) = 0$ ou $g_i(x) \geq 0$

La typologie des problèmes de programmation mathématique est basée sur :

- La nature de la fonction (linéaire ou non linéaire)
- La présence ou l'absence des contraintes
- La nature des contraintes (linéaire ou non linéaire)
- La nature des variables x_i : réelles, entières ou binaires.

Les problèmes de programmation mathématiques dont les fonctions objectifs et les contraintes sont des fonctions linéaires. Ils sont appelés problèmes de programmation linéaire (P.L.).

L'objectif de la programmation linéaire (P.L.) est de trouver la valeur optimale d'une fonction linéaire sous un système d'équations d'inégalités de contraintes linéaires. La fonction à optimiser est baptisée "fonction économique" (utilisée en économie dans le cadre d'optimisations) et on la résout en utilisant une méthode dite "méthode simplexe" dont la représentation graphique consiste en un "polygone des contraintes".

Remarques

1. La programmation linéaire est beaucoup utilisée (pour ne citer que les cas les plus connus) dans la logistique, la finance d'entreprise ou encore aussi en théorie de la décision lorsque nous devons résoudre un jeu à stratégie mixte. C'est pour cette raison que MS Excel intègre un outil appelé le "solveur" dans lequel il existe une option appelée "modèle supposé linéaire" qui alors impose l'utilisation du modèle du simplexe que nous allons voir ci-après (dans MS Excel 2010, celle-ci est nommée "Simplex PL").
2. Dans le cadre de résolution de problèmes où interviennent des produits de deux variables nous parlons alors logiquement "programmation quadratique". C'est typiquement le cas en économétrie dans la modélisation des portefeuilles. C'est pour cette raison que MS Excel intègre un outil appelé le "solveur" dans lequel il existe une option appelée "estimation quadratique".
3. La programmation quadratique et linéaire sont réunies dans l'étude générale de ce que nous appelons la "recherche opérationnelle".

La recherche opérationnelle a pour domaine l'étude de l'optimisation de processus quels qu'ils soient. Il existe de nombreux algorithmes s'inspirant des problèmes du type exposés lors de notre étude de la programmation linéaire. Nous nous attarderons en particulier sur l'algorithme le plus utilisé qui est "l'algorithme du simplexe".

Lorsqu'on peut modéliser un problème sous forme d'une fonction économique à maximiser dans le respect de certaines contraintes, alors on est typiquement dans le cadre de la programmation linéaire.

Soit une fonction économique (objectif) Z telle que:

La fonction objective soit à maximiser ou à minimiser $\max(z) = 3x_1 + 4x_2$ ou $\min(z) = 3x_1 + 4x_2$

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j$$

où les x_i sont des variables qui influent sur la valeur de z , ils sont des variables de décision sont toute quantité utile à la résolution du problème, et dont on doit déterminer.

les c_i les poids respectifs de ces variables modélisant l'importance relative de chacune de ces variables sur la valeur de la fonction économique.

Les contraintes relatives aux variables s'expriment par le système linéaire suivant:

[illegible]

- On appelle contrainte toute relation limitant le choix des valeurs possible pour une variable.
- On appelle fonction objectif l'expression qui modélise la quantité à optimiser en fonction des variables du problème.

Sous forme générale et matricielle ce genre de problème s'écrit:

$$\min \sum_{j=1}^n c_j x_j = z$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i ; i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 ; j = 1, \dots, n$$

- Une solution réalisable est une solution qui vérifie les contraintes du P.L.
- Le domaine réalisable est l'ensemble de toutes les solutions réalisables
- Une solution optimale est une solution réalisable qui optimise (max, min) la fonction économique (elle peut être : unique, multiple, impossible, infinie).

La modélisation consiste à transformer un problème réel en un ensemble de relations mathématiques :

- Identifier les données
- Faire attention aux unités de mesure

Les étapes de modélisation d'un problème de PI sont les suivantes :

1. Identification les variables de décision. $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
2. Identifier les contraintes en les exprimant sous la forme d'équations ou d'inéquation linéaires.
 $\alpha x_1 + \beta x_2 \leq \delta$
3. Identifier l'objectif et le représenter sous forme linéaire en fonction des variables de décision, puis spécifier s'il faut maximiser ou bien minimiser l'objectif. $\max(z) = \alpha x_1 + \beta x_2$

Exercice n°1

Problème de production

Un fabricant produit 2 types de yaourts à la fraise A et B à partir de Fraise, de Lait et de Sucre. Chaque yaourt doit respecter les proportions suivantes de matières premières.

	A	B
Fraise	2	1
Lait	1	2
Sucre	0	1

On dispose de 800 Kg de Fraises, 700 Kg de Lait et 300 Kg de sucre. La vente de 1 Kg de yaourts A et B rapporte respectivement 4€ et 5€. Le fabricant cherche à maximiser son profit.

- Sur quelles quantités peut-on travailler ?
- Que cherche-t-on à optimiser ?
- Quelles sont les contraintes du problème ?

Solution n°1

- Les quantités qu'on peut travailler
Les variables x_A et x_B
- On cherche à optimiser
 - Le profit z , calculé à partir de x_A et x_B
 - On parle de fonction
 Son profit de production

$$\max(z) = 4x_A + 5x_B$$

- Les contraintes du problème sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Première contrainte : 800 Kg de fraises disponibles} \\ \text{La quantité utilisée dépend de la production : } 2x_A + x_B \\ 2x_A + x_B \leq 800 \end{array} \right.$$

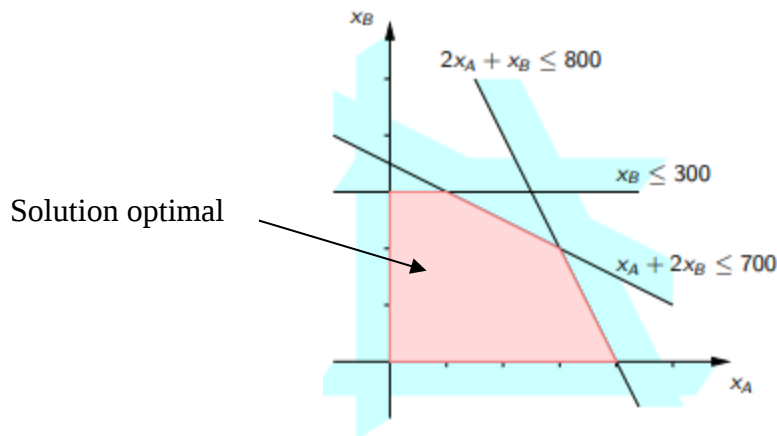
$$\text{Sous Contraintes} \left\{ \begin{array}{l} \text{Fraise : } 2x_A + x_B \leq 800 \\ \text{Lait : } x_A + 2x_B \leq 700 \\ \text{Sucre : } x_B \leq 300 \end{array} \right.$$

$$z = \max f(x) = 4x_A + 5x_B$$

$$\text{avec } x_A \geq 0 \text{ et } x_B \geq 0$$

I.7.1. Méthode graphique

	$2x_A + x_B = 800$		$x_A + 2x_B = 700$		$x_B = 300$	
x_A	0	400	0	700	0	0
x_B	800	0	350	0	300	300



Les solutions optimales est donnée par un sommet du domaine des solutions acceptables :

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; b \begin{pmatrix} 0 \\ 300 \end{pmatrix}; c \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}; d \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}; e \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = 4x_A + 5x_B$$

$$f(0,0) = 4(0) + 5(0) = 0$$

$$f(0,300) = 4(0) + 5(300) = 1500$$

$$f(100,300) = 4(100) + 5(300) = 400 + 1500 = 1900$$

$$f(300,200) = 4(300) + 5(200) = 1200 + 1000 = 2200$$

$$f(400,0) = 4(400) + 5(0) = 1600$$

$$\max f(x) = 4x_A + 5x_B = 2200 \Rightarrow d \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$SC \begin{cases} \text{Fraise : } 2x_A + x_B = 2(300) + 200 = 800 = 800 \Rightarrow \text{Contrainte 1 saturé} \\ \text{Lait : } x_A + 2x_B = 300 + 2(200) = 700 = 700 \Rightarrow \text{Contrainte 2 saturé} \\ \text{Sucre : } x_B = 200 < 300 \Rightarrow \text{Contrainte 3 non saturé} \end{cases}$$