

Chapitre IV. Génération de Résidus par espace de parité

I. Introduction

L'objet de cette méthode ne concerne pas uniquement la génération des relations de redondance, elle explicite également leur utilisation pour la détection et la localisation des défaillances de capteurs. Le principe est d'analyser la consistance des mesures et détecter la présence des défauts en cherchant à établir des relations de parité qui sont indépendantes des grandeurs inconnues mais qui restent sensibles aux défauts. En effet, cette approche consiste à réaliser une redondance analytique entre les entrées et les sorties du système et cela indépendamment des états du système, ce qui permet de comparer les informations fournies par plusieurs capteurs avec celles correspondant aux variables calculées à partir des modèles dynamiques, cette comparaison se traduit par la génération de variables d'écart appelées résidus.

Lorsque le processus est en état de fonctionnement normal, ces résidus sont nuls ; leur déviation par rapport à la valeur zéro, indique l'apparition d'un défaut. Il existe deux types de relations de redondance analytique :

- *Redondance statique* : c'est une *approche physique* qui se fonde sur l'utilisation d'un modèle de connaissance. Elle représente l'ensemble des relations algébriques entre les mesures issues des différents capteurs. Les résidus traduisent alors le degré de satisfaction des lois de la physique, en particulier les lois de conservation de la masse, de l'énergie ou de la quantité de mouvement. Les résidus ont alors une signification physique évidente et constituent des résidus de bilan.
- *Redondance dynamique* : c'est une *approche mathématique* autour d'un formalisme de représentation du type "représentation d'état" qui conduit au concept d'espace de parité simple et généralisé (ou autre méthode liée directement). Le formalisme d'état est puissant et bien adapté à une grande classe de problèmes régis par des équations différentielles ou récurrentes entre les mesures et les entrées du système. Elle concerne la prise de décision qui a trait à la détection et éventuellement à la localisation d'un élément défaillant. Elle met en œuvre des techniques de détection de ruptures et de tests multi-hypothèses.

II. Redondance statique

Dans un système physique, les variables mesurées sont généralement liées par un ensemble de relations algébriques. Le but de la redondance statique est de trouver les relations existantes entre les mesures fournies par les différents capteurs en utilisant le modèle mathématique du système de mesure. On considère le cas général d'une équation de mesure à l'instant k :

$$y(k) = Cx(k) + Fd(k) + \varepsilon(k)$$

Avec

$$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, d \in \mathbb{R}^p, \varepsilon \in \mathbb{R}^m, C \in \mathbb{R}^{m \times n}, F \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

où $y(k)$ est le vecteur de mesure, $x(k)$ le vecteur des variables à mesurer, $d(k)$ le vecteur des défauts pouvant affecter certains capteurs et $\varepsilon(k)$ le vecteur des bruits de mesure ; C est la matrice caractérisant le système de mesure et F est la matrice qui traduit la direction des défauts. Dans la suite, on considère le cas où le nombre de mesures m est supérieur au nombre de variables n de façon à se placer dans une situation de redondance (cette condition est suffisante mais non nécessaire).

On souhaite analyser la consistance des mesures et détecter la présence des défauts ; pour cela on cherche à établir des relations entre les mesures qui sont indépendantes des grandeurs inconnues $x(k)$ mais qui restent sensibles aux défauts $d(k)$.

On définit le vecteur de parité $p(k)$ projection du vecteur des mesures $y(k)$:

$$p(k) = Wy(k)$$

Où W est une matrice de projection de dimension $(m - \text{rang}(C), m)$. Parmi les propriétés de cette matrice, son orthogonalité avec C entraîne en particulier :

$$p(k) = W\varepsilon(k) + WFd(k)$$

On note, que dans le cas idéal (absence d'erreurs de mesure $e(k)$ et de défauts $d(k)$) le vecteur parité est nul. Par conséquent, l'équation précédente traduit l'ensemble des redondances reliant les mesures $y(k)$:

$$Wy(k) = 0$$

De nombreuses méthodes peuvent être employées pour la détermination de cette matrice W . On peut, par exemple, effectuer une élimination directe par substitution des inconnues. La matrice C , de rang m , peut être décomposée sous la forme :

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Où C_1 est inversible ou régulière ou encore non singulière. Une matrice orthogonale à C s'écrit alors simplement :

$$W = (C_2 C_1^{-1} \quad -I)$$

Exemple 1

On considère l'équation de mesure suivante :

$$y(k) = Cx(k) + Fd(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} d(k)$$

On a : $m = p = 3$, $C = (1 \ 1 \ 1)^T$ et le $\text{rang } C = 1$. Donc, l'espace de parité est de dimension $m - \text{rang } C = 2$. La matrice W peut être choisie en cherchant deux vecteurs orthogonaux à C . parmi les solutions existantes, on choisit :

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc, on obtient le vecteur de résidu $p(k)$:

$$p(k) = Wy(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} y(k)$$

$$p(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) - y_2(k) \\ y_2(k) - y_3(k) \end{pmatrix}$$

Le vecteur de résidu $p(k)$ s'écrit sous la forme :

$$p(k) = W F d(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} d(k)$$

$$p(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} d(k)$$

$$p(k) = \begin{pmatrix} d_2(k) - d_3(k) \\ -d_1(k) + d_3(k) \end{pmatrix}$$

Ou de même :

$$p(k) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{V_1} d_1(k) + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{V_2} d_2(k) + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_3} d_3(k)$$

L'interprétation géométrique de ces relations de redondance analytique (RRA) est appelée résidu directionnel. Ce type de résidu est employé afin d'effectuer la localisation de défauts. Il est conçu de façon que, en réponse à un défaut donné, le vecteur de résidu $p(k)$ soit orienté suivant une direction bien précise dans l'espace de parité. Dans cet exemple, l'espace de parité est un espace de dimension 2. Le vecteur de résidu se déplacera suivant une direction spécifique à chacun de défauts.

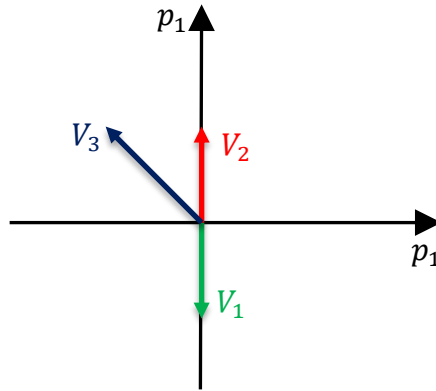


Figure : Résidu directionnel correspondant

Exemple 2

Soit l'équation de mesure suivante :

$$y(k) = Cx(k)$$

Avec

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rang}(C) = 2, \text{ soit : } C_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc, les deux relations RRA sont comme suite :

$$W = (C_2 C_1^{-1} - I)$$

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} - I \right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
p(k) &= Wy(k) = 0 \\
p(k) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} y(k) = 0 \\
p(k) &= \begin{pmatrix} -y_1(k) + 3y_2(k) - 4y_3(k) \\ 3y_1(k) + 3y_2(k) - 4y_4(k) \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Pour cet exemple de faible dimension, l'élimination de $y_2(k)$ entre les deux équations conduit à la nouvelle équation de redondance RRA:

$$\begin{aligned}
4y_1(k) + 4y_3(k) - 4y_4(k) &= 0 \\
y_1(k) + y_3(k) - y_4(k) &= 0
\end{aligned}$$

Avant l'occurrence de défauts, ces relations RRA sont satisfaites puisqu'elles sont nulles, ce qui indique qu'il y a une cohérence de mesure qui sera disparait et ces RRA n'ont plus vérifiées en présence d'un défaut.

Exemple 3

On considère le système de mesure suivant :

$$\begin{aligned}
y(k) &= Cx(k) + Fd(k) + \varepsilon(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon(k)
\end{aligned}$$

Qui correspond à une configuration simple où l'on dispose de cinq mesures couplées de trois grandeurs. Le lecteur pourra aisément constater la redondance inhérente à ce système de mesure ; celle-ci peut être mise à profit pour générer deux équations de redondance reliant les composantes $y_i(k)$ du vecteur de mesure.

On peut extraire de C une sous-matrice régulière de *rang* 3, notée C_1 formée, par exemple, des trois premières lignes de C ; on a donc :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D'après l'équation $W = (C_2 C_1^{-1} - I)$, la matrice W s'écrit :

$$W = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} - I \right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de donner les deux formes du vecteur de parité, en fonction des mesures ou en fonction des "perturbations" :

$$\begin{aligned}
p(k) &= Wy(k) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} y(k) \\
p(k) &= \begin{pmatrix} -y_1(k) + 2y_3(k) - y_4(k) \\ -2y_1(k) + 4y_3(k) - y_5(k) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(k) &= W\varepsilon(k) + WFd(k) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon(k) + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d(k) \\
p(k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon(k) + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} d(k) \\
p(k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2d_1(k) - d_2(k) \\ -2d_1(k) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La forme de $p(k)$ en fonction de $y(k)$ permet le calcul du vecteur de parité ; comme les erreurs $\varepsilon(k)$ sont à valeur moyenne nulle, la deuxième forme de $p(k)$ en fonction de $d(k)$ est utilisable pour détecter et estimer les défaillances éventuelles.

Pour cet exemple de faible dimension, l'élimination de $y_1(k)$ entre les deux équations conduit à la nouvelle équation de redondance :

$$2y_4(k) - y_5(k) = 0$$

On remarquera que l'élimination de $y_1(k)$ entraîne systématiquement celle de $y_3(k)$; les défauts éventuels intervenant sur ces deux mesures ne seront donc pas isolables (différentiables). On notera également que la mesure $y_2(k)$ n'intervient dans aucune équation de redondance ; un défaut sur cette mesure ne sera donc pas détectable.

Découplage par rapport à certains défauts

Soit l'expression du vecteur de mesure sous la forme :

$$y(k) = Cx(k) + F^+ d^+(k) + F^- d^-(k) + \varepsilon(k)$$

Où $d^+(k)$ et $d^-(k)$ désignent respectivement les défauts auxquels on veut être sensible et insensible et F^+ et F^- les matrices associées. Le principe précédent de la génération du vecteur de parité est conservé. On cherche alors une matrice W orthogonale à l'espace engendré par les colonnes de C et de F^- : $W(C \ F^-) = 0$, Le vecteur de parité s'exprime alors :

$$p(k) = WF^+ d^+(k) + W\varepsilon(k)$$

Il est donc sensible aux défauts à détecter, mais comme nous l'avons déjà fait remarquer, il faut préalablement étudier le rang de la matrice WF^+ . Dans le cas où l'équation de la matrice W n'admet pas de solution, on peut envisager une résolution approchée en essayant de satisfaire au mieux la condition d'orthogonalité. Le problème peut être formulé en termes d'optimisation multi-variable, par exemple :

$$\begin{cases} \min_W \|W(C \ F^-)\| \\ \max_W \|WF^+\| \end{cases} \quad \text{sous } WC = 0$$

Par exemple, si l'on souhaite un découplage parfait par rapport à l'état, deux problèmes peuvent être considérés :

$$\begin{cases} \omega^T C \\ \max_{\omega} \frac{\|\omega^T F^-\|^2}{\|\omega^T F^+\|^2} \end{cases}$$

Celui-ci peut être résolu en relaxant les contraintes par élimination des variables dépendantes. En effet, la matrice C est, par hypothèse, de plein rang colonne. On peut donc en extraire une sous-matrice régulière notée C_1 . La contrainte s'écrit alors sous la forme :

$$\omega^T C = (\omega_1^T \quad \omega_2^T) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0$$

Cela permet d'exprimer le vecteur ω uniquement en fonction de ω_2

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_1^{-1})^T C_2^T \\ I \end{bmatrix} \omega_2 = P \omega_2$$

La recherche du minimum, par rapport à ω , du critère :

$$\alpha = \frac{\|\omega^T F^-\|^2}{\|\omega^T F^+\|^2}$$

Sous la contrainte $\omega^T C = 0$

Se ramène à la recherche du minimum, par rapport à ω_2 , du critère :

$$\alpha = \frac{\|\omega_2^T P^T F^-\|^2}{\|\omega_2^T P^T F^+\|^2} = \frac{\omega_2^T P^T F^- (F^-)^T P \omega_2}{\omega_2^T P^T F^+ (F^+)^T P \omega_2} = \frac{\omega_2^T A \omega_2}{\omega_2^T B \omega_2}$$

En utilisant la dérivée du produit de la forme matricielle suivante:

Soit un vecteur $v \in \mathbb{R}^k$ et une matrice $M \in \mathbb{R}^{k \times k}$

$$\frac{\partial (v^T M v)}{\partial v} = (M + M^T) v$$

En particulier, si M est symétrique, $M^T = M$, alors $\frac{\partial (v^T M v)}{\partial v} = 2Mv$

Donc, la condition de stationnarité du critère, par rapport à ω_2 s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_2} &= \frac{2A\omega_2 \omega_2^T B \omega_2 - \omega_2^T A \omega_2 2B\omega_2}{(\omega_2^T B \omega_2)^2} = 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_2} &= \frac{2A\omega_2}{\omega_2^T B \omega_2} - \frac{\omega_2^T A \omega_2 2B\omega_2}{(\omega_2^T B \omega_2)^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \omega_2} = \frac{2}{\omega_2^T B \omega_2} \left[A - \underbrace{\frac{\omega_2^T A \omega_2}{\omega_2^T B \omega_2}}_{\alpha} B \right] \omega_2 = 0$$

Le vecteur ω_2 est donc solution de :

$$(A - \alpha B) \omega_2 = 0$$

Par définition, cela signifie que ω_2 est vecteur propre généralisé de la paire (A, B) . Comme α est la valeur propre généralisée correspondante, mais que c'est également la valeur du critère que l'on cherche à minimiser, on choisira pour ω_2 le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre généralisée de la paire (A, B) .

Exemple 4

On applique cette procédure à l'exemple suivant qui correspond à un système comportant cinq capteurs mesurant trois variables et soumis à trois perturbations :

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} d^+(k) + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d^-(k)$$

On pourra vérifier que les colonnes des matrices C , F^+ et F^- sont indépendantes ; cela garantit l'existence d'une solution non dégénérée pour ω . On peut extraire de C une sous-matrice régulière de rang 3, notée C_1 formée, par exemple, des trois premières lignes de C ; on a donc :

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice P s'écrit alors :

$$P = \begin{bmatrix} -[C_1^{-1}]^T C_2^T \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ -2 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur ω_2 correspondant à la plus petite valeur propre généralisée de la paire (A, B) vaut :

Le vecteur ω_2 est donc solution de :

$$(A - \alpha B)\omega_2 = 0$$

$$\omega_2 = (-0.5771 \ 0.8167)^T$$

Ce qui donne ensuite, en utilisant la matrice de passage P :

$$\omega = (1.0562 \ 0 \ -2.1123 \ -0.5771 \ 0.8167)^T$$

On peut alors en déduire le vecteur de parité, sous la forme calcul (en fonction des mesures disponibles) et sous la forme explicative (par rapport aux défauts) :

$$p = \omega^T y = 1.0562y_1 - 2.1123y_3 - 0.5771y_4 + 0.8167y_5$$

$$p = \omega^T F^- d^- + \omega^T F^+ d^+ = (1.0562 \ 0 \ -2.1123 \ -0.5771 \ 0.8167)^T \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d^- + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} d^+ \right)$$

$$p = -0.098d_1^- + 0.0436d_2^- - 5.0411d^+$$

Les expressions obtenues par l'une ou l'autre méthode, traduisent bien le découplage parfait vis-à-vis de l'état du système, une sensibilité "réduite" par rapport aux perturbations d^- et une sensibilité "marquée" par rapport à la perturbation d^+ . Le lecteur pourra alors se poser le problème plus délicat de l'interprétation quantitative du vecteur de parité en fonction des défauts auxquels on ne veut pas être sensible ; en particulier, pour ces derniers, l'hypothèse de bornitude peut être exploitée pour construire l'enveloppe du vecteur de parité et ainsi disposer d'un seuil de détection garantissant le rejet des fausses alarmes dus aux perturbations indésirables.

Code scilab

```

//Détermination de la plus petite valeur propre généralisée de la paire(A,B)
C = [1 2 1;1 0 2;1 1 1;1 0 1;2 0 2]; // Matrice caractérisant le système de mesure
F1=[1 2;1 2;0 0;2 5;0 1]; // Matrice des défauts F^-
F2=[1;0;3;1;1]; // Matrice des défauts F^+
C1=[1 2 1;1 0 2;1 1 1]; // Sous matrice régulière de la matrice C
C2=[1 0 1;2 0 2]; // Sous matrice régulière de la matrice C
P=[-(inv(C1))*(C2)';eye(2,2)] // Matrice de passage
A=P'*F1'*F1'*P
B=P'*F2'*F2'*P
evals = spec(A) // Valeurs propres de A
evals = spec(B) // Valeurs propres de B
[diagevals,w2] = bdiag(A,B) // Vecteur propre associé à la plus petite valeur propre généralisée de la paire (A,B)
w=P*w2 // Vecteur omega
/////
p1=w'*F1
p2=w'*F2

```

Extension aux systèmes avec contraintes

Le formalisme précédent s'étend aisément au cas de systèmes de mesure dont les variables sont contraintes. Cette situation apparaît quand on considère un processus caractérisé par un modèle et une équation de mesure :

$$\begin{cases} y(k) = Cx(k) + \varepsilon(k) + Fd(k) \\ Ax(k) = 0 \end{cases}$$

On retrouve la structure du cas non contraint en écrivant ce système sous la forme agrégée :

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} y(k) = \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \varepsilon(k) + \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} d(k)$$

Comme précédemment, la génération du vecteur parité et des équations de redondance qui lui sont associées repose sur l'élimination des variables inconnues $x(k)$. Il suffit donc de chercher une matrice W telle que :

$$W \begin{bmatrix} C \\ A \end{bmatrix} = 0$$

Le vecteur de parité est alors défini par ses formes successive d'équation de calcul et "d'explication":

$$\begin{aligned} p(k) &= W \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} y(k) \\ p(k) &= W \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \varepsilon(k) + W \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} d(k) \end{aligned}$$

Comme précédemment le vecteur $d(k)$ peut être décomposé en composantes vis-à-vis desquelles on souhaite être sensible et en composantes vis-à-vis desquelles on souhaite être insensible.

Il est à noter que la nécessité d'avoir le nombre des états inférieur au nombre des mesures du système ($n < m$), rend la redondance statique un peu restreinte. Afin de relaxer cette contrainte, on prend en considération la dynamique du système, c'est-à-dire, l'évolution temporelle des mesures et des entrées de commande. Donc, on parle de la redondance dynamique (ou temporelle).

Décomposition systématique

Les résultats issus de la classification des variables par l'analyse d'observabilité peuvent être utilisés pour l'extraction des équations de redondance.

Les systèmes contraints et non contraints peuvent être traités de la même manière sous réserve de transformations préalables (élimination de la contrainte).

Considérons en effet le système d'équations de mesure avec contraintes :

$$\begin{cases} y(k) = Cx(k) + \varepsilon(k) + Fd(k) \\ Ax(k) = 0 \end{cases}$$

Où les colonnes de la matrice des contraintes A peuvent être permutées de façon à faire apparaître la partie régulière A_1 de A . La contrainte s'écrit alors :

$$(A_1 \ A_2) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} = 0$$

La matrice A_1 étant régulière, on peut alors exprimer une partie de l'état en fonction de l'autre. Le vecteur d'état s'écrit alors :

$$x(k) = \begin{pmatrix} -A_1^{-1}A_2 \\ I \end{pmatrix} x_2(k)$$

Le report de cette expression dans l'équation de mesure permet d'écrire :

$$y(k) = C \begin{pmatrix} -A_1^{-1}A_2 \\ I \end{pmatrix} x_2(k) + \varepsilon(k) + Fd(k)$$

Cette expression revêt une forme tout à fait identique à la description des systèmes non contraints. De manière générale, les deux types de systèmes peuvent donc être décrits par l'équation :

$$(-I \ C) \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} = \varepsilon(k) + Fd(k)$$

Ou encore, avec une écriture plus "compacte" :

$$Mz(k) = b(k)$$

L'analyse d'observabilité d'un tel système peut être conduite de la manière suivante. La matrice de contrainte M est tout d'abord partitionnée en accord avec le partitionnement de z en composantes mesurées et non mesurées :

$$z(k) = \begin{pmatrix} z_m(k) \\ z_p(k) \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} M_{m1} & M_p \end{pmatrix}$$

Des permutations de lignes et de colonnes permettent ensuite de faire apparaître la partie régulière M_{p11} de la matrice M_p :

$$M = \begin{pmatrix} \overbrace{M_{m1}}^{\text{Variables mesurées}} & \overbrace{\begin{pmatrix} M_{p11} & M_{p12} \\ M_{p21} & M_{p22} \end{pmatrix}}^{\text{Variables non Mesurées}} \end{pmatrix}$$

La multiplication à gauche de M par la matrice régulière T

$$T = \begin{pmatrix} M_{p11}^{-1} & 0 \\ -M_{p21}M_{p11}^{-1} & I \end{pmatrix}$$

Permet d'obtenir la forme "canonique" de M :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & I & M_2 \\ M_r & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} M_1 \\ M_r \end{pmatrix} \text{ variables mesurées et } \begin{pmatrix} I & M_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ variables non mesurées}$$

La matrice M_r décrit alors les équations de redondance recherchées.

Exemple :

Dans cet exemple on représente le processus industriel par un graphe orienté dans lequel :

- les arcs (voies) correspondent aux flux de matière dont les directions sont déterminées par la structure du processus,
- les nœuds représentent les unités de traitement, de transformation ou les points de jonction de plusieurs arcs, chaque nœud est décrit par une équation.

A ce système, on associe une matrice d'incidence M définie par :

$$M = (m_{ij}) \quad i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, v$$

Où n est le nombre de nœuds et v le nombre de voies, et telle que :

$m_{ij} = 0$ si la voie j n'est pas reliée au nœud i ,

$m_{ij} = 1$ si la voie j "entre" dans le nœud i ,

$m_{ij} = -1$ si la voie j "sort" du nœud i .

En définissant le vecteur X des différents flux de matière au sein du processus, le modèle s'écrit simplement :

$$MX = 0$$

Il revêt directement la forme d'équation $Mz(k) = b(k)$; les équations de redondance peuvent donc être générées en suivant la démarche proposée précédemment.

Considérons, à titre d'exemple, le réseau de la figure 4 formé de huit nœuds et quinze voies.

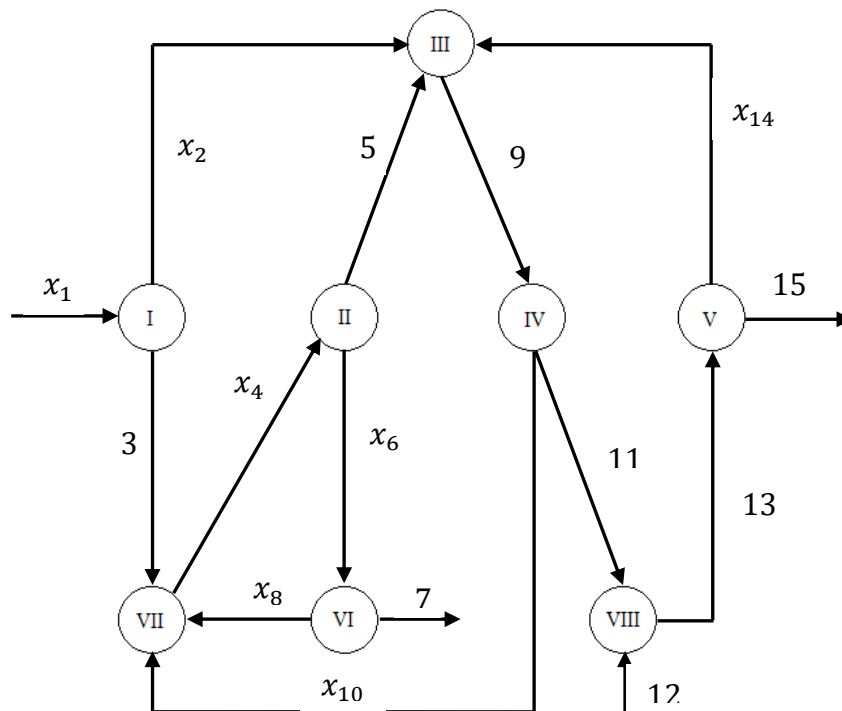


Figure : Réseau de transport

Les arcs marqués par des x_i correspondent aux mesures de flux. Si l'on note X_m le sous-secteur correspondant aux mesures, on a :

$$X_m = (x_1 \ x_2 \ x_4 \ x_6 \ x_8 \ x_{10} \ x_{14})^T$$

La matrice d'incidence associée M s'écrit :

	Voies	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	Nœuds															
$M =$	I	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	II	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	III	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0
	IV	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0
	V	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1
	VI	0	0	0	0	0	1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
	VII	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
	VIII	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0

Compte tenu de la nature particulière de la matrice M , une méthode plus simple peut être envisagée. On sépare tout d'abord les parties mesurées et non mesurées par simple permutation des colonnes de la matrice

	Voies	1	2	4	6	8	10	14	3	5	7	9	11	12	13	15
	Nœuds															
$M =$	I	1	-1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
	II	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
	III	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
	IV	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
	V	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	-1
	VI	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
	VII	0	0	-1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	VIII	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	0

On fait ensuite apparaître, dans la partie de la matrice correspondant aux grandeurs non mesurées, une matrice identité à l'aide d'une méthode de pivot. Rappelons brièvement cette méthode. Pour chaque colonne de la matrice M_p :

- rechercher le premier élément non nul (s'il est négatif, inverser tous les signes de la ligne où il se trouve),
- marquer cet élément comme pivot si la ligne considérée n'en comporte pas, sinon poursuivre la recherche dans la colonne (si aucun élément ne peut être marqué, passer à la colonne suivante),
- éliminer, par combinaison linéaire de lignes (ici somme ou différence), les éléments non nuls situés sur la colonne du pivot.

La matrice M s'écrit après la première opération portant sur la colonne 3 et les lignes 1 et 7 :

Voies		1	2	4	6	8	10	14	3	5	7	9	11	12	13	15
Nœuds																
$M =$	I	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	II	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
	III	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	0	0	0	0
	IV	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
	V	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	-1
	VI	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
	VII	1	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	VIII	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	0

Sur cette matrice, l'élément encadré correspond au pivot choisi. En réitérant l'opération sur l'ensemble des colonnes de la sous-matrice correspondant à la partie non mesurée, on obtient :

Voies		1	2	4	6	8	10	14	3	5	7	9	11	12	13	15
Nœuds																
$M =$	I	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	II	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	III	0	-1	-1	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
	IV	0	-1	-1	1	0	-1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0
	V	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	-1
	VI	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	VII	1	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	VIII	0	1	1	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1

Sur cet exemple, on remarquera que la colonne 15 ne peut être utilisée pour effectuer des réductions pivotâtes. La dernière étape consiste à réordonner la matrice obtenue par des permutations de lignes et de colonnes de manière à obtenir la forme canonique de la matrice M

Voies		1	2	4	6	8	10	14	3	5	7	9	11	12	13	15
Nœuds																
$M =$	I	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	II	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	VI	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	III	0	-1	-1	1	0	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
	IV	0	-1	-1	1	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0	0
	VIII	0	1	1	-1	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	0	-1
	V	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	-1
	VII	1	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

La lecture de cette matrice permet d'obtenir une équation de redondance :

$$x_1 - x_2 - x_4 + x_8 + x_{10} = 0$$

Qui correspond, en fait, à l'agrégation des équations des nœuds I et VII .

III. L'approche espace de parité - cas dynamique

3.1. Principe de la génération d'équations de redondance

Considérons le modèle déterministe du système ci-dessous où x est l'état inconnu, u et y les entrées et sorties connues. Dans tout ce qui suit et sans atteinte à la généralité, les mesures y dépendent seulement de l'état x et ne font pas intervenir l'entrée u :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + F_1 d(k) \\ y(k) = Cx(k) + F_2 d(k) \end{cases}$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$, $d \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement, les vecteurs : d'état, de mesure, d'entrée de commande et de défauts.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $F_1 \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $F_2 \in \mathbb{R}^{m \times p}$, avec F_1 et F_2 matrices de défauts actionneurs. L'objectif est de construire un générateur de résidu capable d'effectuer, à la fois, la détection et la localisation des défauts de capteurs et / ou d'actionneurs.

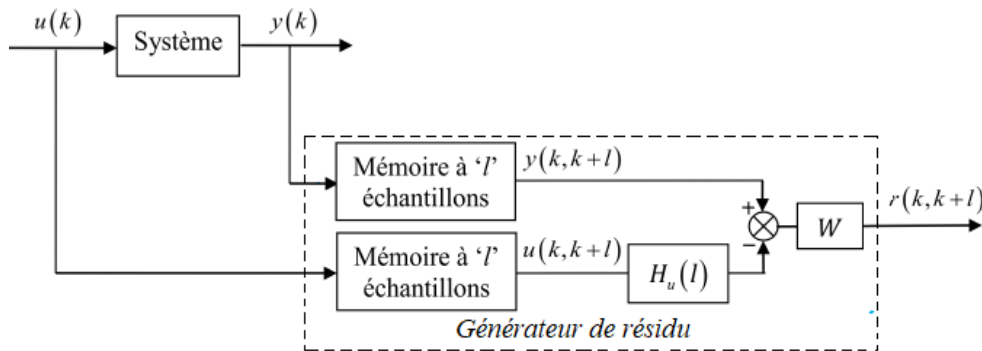


Figure Générateur de résidu à l'aide de l'espace de parité

Une représentation discrète est utilisée, mais l'ensemble des résultats de ce paragraphe se transcrit sans difficulté au cas continu.

A un instant donné, la redondance directe entre capteurs peut exister si certaines sorties y sont liées d'un point de vue algébrique ; physiquement, cela correspond à la situation où une variable mesurée par un capteur peut être déduite instantanément à partir d'autres mesures. Cette redondance directe (encore appelée massive ou matérielle) est très utile pour la détection de défauts de capteurs ; elle peut s'avérer coûteuse mais reste utilisée pour les systèmes à haut risque technologique. Elle offre cependant peu d'intérêt pour la surveillance des actionneurs du système. Dans ce cas, la redondance temporelle, qui lie les informations de capteurs et d'actionneurs à différents instants, peut-être d'un grand secours.

En effet sur un horizon d'observation $[k, k+l]$, les équations du système peuvent être regroupées sous la forme :

$$Y(k, l) - G(l)U(k, l) = H(l)x(k) + F(l)D(k, l)$$

Où les vecteurs $W(k, l)$ avec $W \in \{Y, U, D\}$ et la matrice $H(l)$ sont définis par :

$$W(k, l) = \begin{bmatrix} W(k) \\ W(k+1) \\ \vdots \\ W(k+l) \end{bmatrix} \text{ et } H(l) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^l \end{bmatrix}$$

Avec

$$G(l) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CB & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CAB & CB & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ CA^{l-1}B & CA^{l-2}B & \cdots & CB & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F(l) = \begin{pmatrix} F_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ CF_1 & F_2 & \cdots & 0 & 0 \\ CAF_1 & CF_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & F_2 & 0 \\ CA^{l-1}F_1 & CA^{l-2}F_1 & \cdots & CF_1 & F_2 \end{pmatrix}$$

L'entrée $u(k)$ et la sortie $y(k)$ du système sont connues; pour générer des équations de redondance, les états inconnus $x(k)$ doivent être éliminés. Les équations de redondance qui lient Y et U indépendamment de x sont obtenues en multipliant l'équation du système par une matrice Ω (appelée matrice de parité) orthogonale à $H(l)$ (l'existence de Ω est liée au rang de $H(l)$) :

$$\Omega H(l) = 0$$

En conséquence, le vecteur de parité s'explicite en fonction des grandeurs connues (forme de calcul ou forme externe) :

$$P(k) = \Omega(Y(k, l) - G(l)U(k, l))$$

Où en fonction des défauts (forme interne) :

$$P(k) = \Omega F(l)D(k, l)$$

$P(k)$, appelé vecteur de parité généralisé, caractérise toutes les relations existant entre les entrées et les sorties du système. Il a une valeur moyenne nulle si aucun défaut n'existe sur le système. Si une mesure est biaisée (suite à une défaillance d'un capteur ou d'un actionneur par exemple), le vecteur de parité devient différent de zéro et s'oriente dans une direction privilégiée en fonction du défaut. La recherche des équations de redondance peut être affinée en recherchant tout d'abord les équations de redondance pour chaque sortie prise isolément (auto-redondance), puis les relations de redondance entre différentes sorties (inter-redondance). Cette hiérarchisation peut être mise à profit dans l'étape d'isolation des défauts affectant les capteurs et les actionneurs.

Relations d'auto-redondance

La notion d'auto-redondance ou de redondance directe est importante car elle est liée à la génération de relations exprimant au cours du temps la sortie d'un seul capteur. Pour cela, il suffit d'extraire la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur d'observations en sélectionnant dans C la ligne C_j . L'équation du système se réduit alors à :

$$Y_j(k, l) - G_j(l)U(k, l) = H_j(l)x(k) + F_jD(k, l)$$

Où H_j , G_j et F_j se déduisent des définitions de H , G et F en remplaçant C et F_2 par leur $j^{\text{ème}}$ ligne.

Dans ce cas, si Ω_j est une matrice orthogonale à $H_j(l)$, l'unique relation de parité relative au $j^{\text{ième}}$ capteur est définie par :

$$P_j(k) = \Omega_j(Y_j(k, l) - G_j(l)U(k, l))$$

Précisons maintenant la valeur de la largeur de la fenêtre d'observation et cherchons en particulier sa valeur minimale. L'application du théorème de *Cayley-Hamilton* implique l'existence d'une valeur l_j telle que :

$$\text{Si } l < l_j \rightarrow \text{rang}(H_j(l)) = 1 + l$$

$$\text{et } l \geq l_j \rightarrow \text{rang}(H_j(l)) = l_j$$

Comme la ligne $(l_j + 1)$ de la matrice $H_j(l_j)$ est une combinaison linéaire des l_j autres lignes, alors il existe un vecteur Ω_j tel que :

$$\Omega_j \begin{bmatrix} C_j \\ C_j A \\ \vdots \\ C_j A^{l_j} \end{bmatrix} = 0$$

On obtient alors l'équation de redondance relative au $j^{\text{ième}}$ capteur ou équation d'auto-redondance

$$P_j(k) = \Omega_j(Y_j(k, l_j) - G_j(l_j)U(k, l_j))$$

Cette équation, qui ne fait intervenir qu'une seule sortie du système, explicite la redondance temporelle entre les entrées et la $j^{\text{ième}}$ sortie et fournit ainsi un moyen de test du bon fonctionnement du $j^{\text{ième}}$ capteur si on fait l'hypothèse du bon fonctionnement des actionneurs. Cependant, en présence de défauts simultanés des capteurs et de l'actionneur, l'occurrence des défauts pourra être détectée, mais la localisation précise des composants défaillants sera en général impossible à réaliser uniquement à partir de l'équation principale.

Relations d'inter-redondance

La redondance temporelle existe aussi entre plusieurs capteurs. Pour chaque matrice d'observation H_i construite à partir d'une seule sortie et de toutes les entrées, on retient uniquement les l_i premières lignes indépendantes (l_i a été défini par le théorème de *Cayley-Hamilton*). A partir de l'équation d'auto-redondance précédente, on obtient donc, pour $i = 1, \dots, m$:

$$Y_i(k, l_i - 1) - G_i(l_i - 1)U(k, l_i - 1) = H_i(l_i - 1)x(k) + F_i D(k, l_i - 1)$$

Pour obtenir une formulation unique regroupant toutes les sorties, on peut introduire des vecteurs communs $U(k, l)$ et $D(k, l)$ (où $l = \max(l_1, l_2, \dots, l_m)$ pour toutes les entrées $U(k, l_i - 1)$ et $D(k, l_i - 1)$); dans certains cas, cela ne peut être possible qu'en complétant les matrices G_i avec des colonnes de "zéros". Avec des définitions évidentes, le système peut s'écrire de façon condensée :

$$Y(k, l_1, l_2, \dots, l_m) - G(l_1, l_2, \dots, l_m)U(k, l) = H(l_1, l_2, \dots, l_m)x(k) - E(l_1, l_2, \dots, l_m)D(k, l)$$

Avec

$$Y(k, l_1, l_2, \dots, l_m) = \begin{pmatrix} Y_1(k, (l_1 - 1)) \\ \vdots \\ Y_m(k, (l_m - 1)) \end{pmatrix}$$

Comme dans le cas précédent, définissons une matrice Ω , orthogonale à $H(l_1, l_2, \dots, l_m)$. Les équations de parité sont alors données par l'expression :

$$P(k) = \Omega(Y(k, l_1, l_2, \dots, l_m) - G(l_1, l_2, \dots, l_m)U(k, l))$$

Exemple:

On considère, pour l'horizon d'observation $[k, k + 2]$, l'exemple suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [I]$$

Déterminer les équations d'auto-redondance

Déterminer l'équation d'inter-redondance

Déterminer les directions de références du vecteur de parité correspondant

- Pour la première sortie, $C_1 = (1 \ 0)$, on a :

$$H_1(2) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ C_1 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.7 & 0.2 \\ 0.49 & 0.24 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}(2,2) \\ C_{21}(1,2) \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice d'observabilité $H_1(2)$ est égal à 2.

Détermination d'une matrice orthogonale à $H_1(2)$

La troisième ligne de la matrice $H_1(2)$ peut s'exprimer par une combinaison linéaire des deux précédentes; cette dépendance peut donc être explicitée en déterminant Ω à partir de l'équation

$$\Omega H(l) = 0.$$

$$\Omega_1 = (-C_{21} C_{11}^{-1} \ I) = \left[-(0.49 \ 0.24) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}^{-1} \ I \right] = (0.35 \ -1.2 \ 1)$$

Puis, en appliquant l'équation du vecteur de parité en fonction des grandeurs connues on obtient la relation d'auto-redondance de cette sortie relative au premier capteur :

$$P_1(k) = \Omega_1(Y_1(k, 2) - G_1(2)U(k, 2))$$

Avec :

$$Y_1(k, 2) = \begin{pmatrix} Y_1(k) \\ Y_1(k+1) \\ Y_1(k+2) \end{pmatrix}, \quad U_1(k, 2) = \begin{pmatrix} U_1(k) \\ U_1(k+1) \\ U_1(k+2) \end{pmatrix}, \quad G_1(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ CB & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation de parité de la relation d'auto-redondance de cette sortie est :

$$\begin{aligned}
 (0.35 - 1.2s^1 + s^2)y_1(k) - 0.2u(k) &= 0 \\
 (0.35 - 1.2s^1 + s^2)y_1(k) &= 0.2u(k) \\
 (1.75 - 6s^1 + 5s^2)y_1(k) &= u(k) \\
 1.75y_1(k) - 6s^1y_1(k) + 5s^2y_1(k) &= u(k) \\
 1.75y_1(k) - 6y_1(k+1) + 5y_1(k+2) &= u(k)
 \end{aligned}$$

Avec s opérateur avance : $s^r x(k) = x(k+r)$

- Pour la première sortie, $C_2 = (0 \ 1)$, on a :

$$H_2(2) = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice d'observabilité $H_2(2)$ est égal à 1. Cette matrice est non inversible, alors :

Ces valeurs propres : $(0, \frac{1}{2})$, et les vecteurs propres sont : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C_2$

Détermination d'une matrice orthogonale à $H_2(2)$

$$\Omega_2 = (-C_1 \ C_2 \ I) = \begin{bmatrix} -(1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & 0 \end{bmatrix} = (-1 \ 2)$$

$$P_2(k) = \Omega_2(Y_2(k, 2) - G_2(2)U(k, 2))$$

Avec :

$$Y_2(k, 2) = \begin{pmatrix} Y_2(k) \\ Y_2(k+1) \end{pmatrix}, \quad U_2(k, 2) = \begin{pmatrix} U_2(k) \\ U_2(k+1) \end{pmatrix}, \quad G_2(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2(k) = (-1 \ 2) \left[\begin{pmatrix} Y_2(k) \\ Y_2(k+1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2(k) \\ U_2(k+1) \end{pmatrix} \right]$$

L'équation de parité de la relation d'auto-redondance de cette sortie est :

$$\begin{aligned}
 (-1 + 2s)y_1(k) - 2u(k) &= 0 \\
 (-1 + 2s)y_1(k) &= 2u(k) \\
 (-0.5 + s)y_1(k) &= u(k) \\
 -0.5y_1(k) + sy_1(k) &= u(k) \\
 -0.5y_1(k) + y_1(k+1) &= u(k)
 \end{aligned}$$

A chaque instant, le vecteur de parité est donc défini par :

$$P(k) = \begin{pmatrix} 1.75y_1(k) - 6y_1(k+1) + 5y_1(k+2) - u(k) \\ -0.5y_2(k) + y_2(k+1) - u(k) \end{pmatrix}$$

Déterminons maintenant les équations d'inter-redondance. Pour le premier et le deuxième capteurs, les lignes indépendantes sont :

$$Y_1(k, 1) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ C_1 B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k+1) \end{pmatrix}$$

$$Y_2(k, 0) = C_2 x(k)$$

En combinant ces équations, ($l = 2$)

$$Y(k, 2, 1) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ C_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_1 B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k+1) \end{pmatrix}$$

Et par conséquent

$$Y(k, 2, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.7 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

L'élimination de l'état inconnu $x(k)$ est obtenue avec $\Omega = (\Omega_1 \ \Omega_2 \ I)$:

$$(\Omega_1 \ \Omega_2 \ I) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.7 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (0 \ 0)$$

$$(\Omega_1 \ \Omega_2 \ I) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.7 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{10\Omega_1 + 7\Omega_2}{10} \quad \frac{\Omega_2 + 5I}{5} \right) = (0 \ 0)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} 10\Omega_1 + 7\Omega_2 = 0 \\ \Omega_2 + 5I = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega_1 = 3.5 \\ \Omega_2 = -5 \end{cases} \Rightarrow \Omega = (3.5 \ -5 \ 1) \text{ ce qui génère l'inter-redondance :}$$

$$(3.5 \ -5 \ 1) \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = 0$$

$$3.5y_1(k) - 5y_1(k+1) + y_2(k) = 0$$

Finalement, l'ensemble des équations de redondance s'écrit :

$$5y_1(k+2) - 6y_1(k+1) + 1.75y_1(k) - u(k) = 0$$

$$y_2(k+1) - 0.5y_2(k) - u(k) = 0$$

$$3.5y_1(k) - 5y_1(k+1) + y_2(k) = 0$$

Direction du vecteur de parité selon les défauts à analysés

Défaut	aucun	Actionneur	Capteur 1	Capteur 2
Direction du vecteur de parité	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.75 \\ 0 \\ -1.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

On peut noter, sur l'exemple considéré, que les équations d'inter-redondance peuvent aussi s'obtenir par combinaison linéaire des équations d'auto-redondance en ayant soin d'éliminer les entrées u . Si les actionneurs sont en fonctionnement normal, la première équation est seulement sensible aux défauts du premier capteur alors que la seconde est affectée par les défauts du second capteur. Ainsi, ces deux équations fournissent un moyen d'identifier les défauts des capteurs. La troisième équation est seulement affectée par les défauts de capteurs, même si l'actionneur est défectueux ; il est ainsi possible d'isoler les défauts de capteur et d'actionneur puisque leurs signatures sont différentes.

Utilisation du calcul symbolique

Pour obtenir des équations qui ne dépendent que des grandeurs connues, les entrées $u(k)$ et les sorties $y(k)$, il suffit d'éliminer les états inconnus. Donc on peut générer des équations de redondance grâce à une technique plus directe à partir des équations d'état du système.

Ainsi et en l'absence de défauts on peut écrire à partir du modèle déterministe du système:

$$\begin{aligned}(sI - A)x(k) &= Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}$$

Où s représente l'opérateur (le symbole) avance ($sx(k) = x(k + 1)$). L'élimination de x entre ces deux équations ci-dessus donne les redondances :

$$r(k) = y(k) - C(sI - A)^{-1}Bu(k) = 0$$

Cette formulation présente l'intérêt de fournir directement les relations de redondance pour chaque sortie, ce qui permet l'isolation des défauts de chaque capteur.

Le problème peut également être formulé en s'inspirant du cas statique. Après réarrangement des équations d'état, on peut séparer les variables inconnues x , des variables connues u et y :

$$\begin{pmatrix} C \\ sI - A \end{pmatrix} x(k) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$$

La technique de projection, largement utilisée dans le cas des systèmes statiques, permet d'éliminer l'état x . On cherche deux vecteurs α et β , polynômes en la variable s , tels que :

$$(\alpha(s) - \beta(s)) \begin{pmatrix} C \\ sI - A \end{pmatrix} = 0$$

En multipliant à gauche l'équation $\begin{pmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$ par le vecteur $(\alpha(s) - \beta(s))$, il vient :

$$(\alpha(s)y(k) - \beta(s)Bu(k)) = 0$$

Cette expression constitue les équations de redondance recherchées.

Exercice

On considère le système dynamique décrit, en temps discret, par le triplet de matrices A , B et C avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur de défauts $d(k)$ est initialement considéré nul ($d(k) \equiv 0, \forall k$).

- ❖ En utilisant les méthodes présentées aux paragraphes précédents, établir les relations d'auto-redondance relatives aux deux mesures ainsi que les relations d'inter-redondance.
- ❖ Reprendre la question précédente en utilisant cette fois les méthodes de calcul symbolique.
- ❖ Afin de structurer les résidus, est-il possible d'établir des équations de redondance ne faisant pas intervenir l'une des commandes ?

Le vecteur de défauts étant considéré nul, on ne s'intéressera qu'à établir la forme externe (celle qui permet le calcul) des équations de redondance.

- a- Considérons la première mesure ; la matrice d'observation correspondante s'écrit $C_1 = (1 \ 1 \ 0)$, et l'on a :

$$H_1(2) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ C_1 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.16 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice $H_1(2)$ est égal à 2. Une matrice Ω orthogonale à $H_1(2)$ vaut :

$$\Omega = (a \ b \ c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0.16 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{25a + 10b + 4c}{25} \quad \frac{4a + 2b + c}{4} \quad 0 \right) = 0$$

Comme solution générale : $\begin{pmatrix} a = \frac{1}{5}c \\ b = -\frac{9}{10}c \\ c \end{pmatrix}$, si on prend $c = 5$ alors

$$\Omega = (1 \ -4.5 \ 5)$$

La matrice $G_1(2)$ s'écrit alors :

$$G_1(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_1 B & 0 & 0 \\ C_1 A B & C_1 B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.4 & 1.5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de parité s'écrit alors :

$$P_2(k) = \Omega_2(Y_2(k, 2) - G_2(2)U(k, 2))$$

Avec :

$$Y_1(k, 2) = \begin{pmatrix} Y_1(k) \\ Y_1(k+1) \\ Y_1(k+2) \end{pmatrix}, \quad U_1(k, 2) = \begin{pmatrix} U_1(k) \\ U_1(k+1) \\ U_1(k+2) \end{pmatrix}, \quad G_1(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.4 & 1.5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1(k) = \Omega_2 \left[\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_1(k+2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.4 & 1.5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_1(k+1) \\ u_2(k+1) \\ u_1(k+2) \\ u_2(k+2) \end{pmatrix} \right]$$

$$P_1(k) = (1 \quad -4.5 \quad 5) \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) - 1.5u_1(k) - u_2(k) \\ y_1(k+2) - 0.7u_1(k) - 0.4u_2(k) - 1.5u_1(k+1) - u_2(k+1) \end{bmatrix}$$

$$P_1(k) = y_1(k) - 4.5y_1(k+1) + 5y_1(k+2) + 3.25u_1(k) - 2.5u_2(k) - 7.5u_1(k+1) - 5u_2(k+1)$$

Pour la seconde mesure, on a $C_2 = (0 \ 1 \ 1)$ et :

a-

$$H_2(2) = \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 A \\ C_2 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.9 \\ 0 & 0.25 & 0.81 \end{bmatrix}$$

Le rang de la matrice $H_2(2)$ est égal à 2. Une matrice Ω orthogonale à $H_2(2)$ vaut :

$$\Omega = (a \ b \ c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.9 \\ 0 & 0.25 & 0.81 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4a+2b+c}{4} & \frac{100a+90b+81c}{100} \end{pmatrix} = 0$$

Comme solution générale : $\begin{pmatrix} a = \frac{9}{20}c \\ b = -\frac{7}{5}c \\ c \end{pmatrix}$, si on prend $c = 5$ alors

$$\Omega = (2.25 \quad -7 \quad 5)$$

La matrice $G_2(2)$ s'écrit alors :

$$G_2(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_2 B & 0 & 0 \\ C_2 A B & C_2 B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.59 & 0.9 & 1.1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de parité s'écrit alors :

$$P_2(k) = \Omega_2(Y_2(k, 2) - G_2(2)U(k, 2))$$

Avec :

$$Y_2(k, 2) = \begin{pmatrix} Y_2(k) \\ Y_2(k+1) \\ Y_2(k+2) \end{pmatrix}, \quad U_2(k, 2) = \begin{pmatrix} U_2(k) \\ U_2(k+1) \\ U_2(k+2) \end{pmatrix}, \quad G_2(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.59 & 0.9 & 1.1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1(k) = \Omega_2 \left[\begin{pmatrix} y_2(k) \\ y_2(k+1) \\ y_2(k+2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.59 & 0.9 & 1.1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_1(k+1) \\ u_2(k+1) \\ u_1(k+2) \\ u_2(k+2) \end{pmatrix} \right]$$

$$P_2(k) = \begin{pmatrix} 2.25 & -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_2(k) \\ y_2(k+1) - 1.1u_1(k) - u_2(k) \\ y_2(k+2) - 0.59u_1(k) - 0.9u_2(k) - 1.1u_1(k+1) - u_2(k+1) \end{bmatrix}$$

$$P_2(k) = 2.25y_2(k) - 7y_2(k+1) + 5y_2(k+2) + 4.75u_1(k) + 2.5u_2(k) - 5.5u_1(k+1) - 5u_2(k+1)$$

Pour l'élaboration des équations d'inter-redondance, on concatène dans une même matrice, les lignes indépendantes des matrices $H_1(2)$ et $H_2(2)$; on obtient :

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_1 A \\ C_2 \\ C_2 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Une matrice orthogonale à $H(1,1)$ s'écrit alors:

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b & c & c \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5a+2b}{5} & \frac{2a+b+2c+c}{2} & \frac{10c+9d}{10} \end{pmatrix} = 0$$

Comme solution générale : $\begin{pmatrix} a = -\frac{8}{5}d \\ b = 4d \\ c = -\frac{9}{10}d \\ d \end{pmatrix}$, si on prend $c = 5$ on aura alors :

$$\Omega = \begin{pmatrix} -8 & 20 & -4.5 & 5 \end{pmatrix}$$

Après le calcul de $G(1,1)$:

$$G(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_1 B & 0 \\ 0 & 0 \\ C_2 B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(k) = \Omega(Y(k,2) - G(1,1)(2)U(k,2))$$

Avec :

$$Y(k,2) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix}, \quad U(k,2) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_1(k+1) \\ u_2(k) \\ u_2(k+1) \end{pmatrix}, \quad G(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1(k) = \Omega \left[\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_1(k+1) \\ u_2(k) \\ u_2(k+1) \end{pmatrix} \right]$$

$$P(k) = \begin{pmatrix} -8 & 20 & -4.5 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) - 1.5u_1(k) - u_2(k) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) - 1.1u_1(k) - u_2(k) \end{bmatrix}$$

On peut exprimer le vecteur de parité :

$$P_1(k) = -8y_1(k) + 20y_1(k+1) - 4.5y_2(k) + 5y_2(k+1) + 35.5u_1(k) - 25u_2(k)$$

Qui correspond à l'équation d'inter-redondance recherchée.

♦ Si l'on utilise les techniques de calcul symbolique, l'établissement de l'équation d'auto-redondance relative à la première mesure nécessite la détermination d'une matrice $\Omega_1(s)$ orthogonale à la matrice polynomiale :

$$H_1(k) = \begin{pmatrix} C_1 \\ sI - A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ s-0.4 & 0 & 0 \\ 0 & s-0.5 & 0 \\ 0 & 0 & s-0.9 \end{bmatrix}$$

Une matrice orthogonale à $H_1(k)$ s'écrit alors:

$$\Omega_1(k) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ s-0.4 & 0 & 0 \\ 0 & s-0.5 & 0 \\ 0 & 0 & s-0.9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-2b+5sb & 2a-c+2sc & -9d+10sd \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix} = 0$$

Comme solution générale : $\begin{pmatrix} a = \frac{-2s+1}{2}c \\ b = \frac{10s-5}{10s-4}c \\ c \\ d \end{pmatrix}$, si on prend $c = 10s - 4$ et $d = 0$ on aura alors :

$$\Omega_1(s) = \begin{pmatrix} (-2s+1)(5s-2) & 10s-5 & 10s-4 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation d'auto-redondance s'écrit :

$$P_1(k) = \Omega_1(s) \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$$

$$P_1(k) = \begin{bmatrix} (-2s+1)(5s-2) & 10s-5 & 10s-4 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ y_1(k) \end{pmatrix}$$

$$P_1(k) = (-2s + 1)(5s - 2)y_1(k) + (15s - 6.5)u_1(k) + (10s - 4)u_2(k)$$

On retrouve donc bien l'expression obtenue par l'application de la première méthode.

L'équation d'auto-redondance relative à la seconde mesure s'obtient de manière analogue ; une matrice $\Omega_2(s)$ orthogonale à :

$$H_2(k) = \begin{pmatrix} C_2 \\ sI - A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ s - 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & s - 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & s - 0.9 \end{bmatrix}$$

Une matrice orthogonale à $H_2(k)$ s'écrit alors :

$$\Omega_2(k) = (a \ b \ c \ c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ s - 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & s - 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & s - 0.9 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -2b + 5sb & 2a - c + 2sc & 10a - 9d + 10sd \\ 5 & 2 & 10 \end{pmatrix} = 0$$

Comme solution générale : $\begin{pmatrix} a = \frac{-10s+9}{10}d \\ b \\ c = \frac{10s-5}{10s-4}d \\ d \end{pmatrix}$, si on prend $b = 0$ et $d = 10s - 4$ on aura alors :

$$\Omega_2(s) = ((-s + 0.9)(10s - 4) \quad 0 \quad 10s - 5 \quad 10s - 4)$$

L'équation d'auto-redondance s'écrit :

$$P_2(k) = \Omega_2(s) \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$$

$$P_2(k) = [(-s + 0.9)(10s - 4) \quad 0 \quad 10s - 5 \quad 10s - 4] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix}$$

$$P_2(k) = (-s + 0.9)(10s - 4)y_2(k) + (11s - 5.4)u_1(k) + (10s - 4)u_2(k)$$

Pour établir les équations d'inter-redondance, on cherche ensuite la matrice polynomiale orthogonale à :

$$H(k) = \begin{pmatrix} C \\ sI - A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ s - 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & s - 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & s - 0.9 \end{bmatrix}$$

Une matrice orthogonale à $H(k)$ s'écrit alors :

$$\Omega(k) = (a \ b \ c \ c \ e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ s-0.4 & 0 & 0 \\ 0 & s-0.5 & 0 \\ 0 & 0 & s-0.9 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{5a-2c+5sc}{5} \quad \frac{2a-2b-d+2sd}{2} \quad \frac{10b+10se-9e}{10} \right) = 0$$

Comme solution générale :

$$\begin{pmatrix} a = (-s+0.5)d + (s-0.9)e \\ b = (s-0.9)e \\ c = \frac{10s-5}{10s-4}d + \frac{10s-9}{10s-4}e \\ d \\ e \end{pmatrix}, \quad \text{si on prend } d = 0 \text{ et } e = 10s - 4$$

on aura alors :

$$\Omega_2(s) = \begin{pmatrix} (s-0.9)(10s-4) & (s-0.9)(10s-4) & (10s-9) & 0 & (10s-4) \end{pmatrix}$$

L'équation d'auto-redondance s'écrit :

$$P(k) = \Omega(s) \begin{pmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ y(k) \end{pmatrix}$$

$$P(k) = [(s-0.9)(10s-4) \ (s-0.9)(10s-4) \ (10s-9) \ 0 \ (10s-4)] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ y_1(k) \\ y_2(k) \end{pmatrix}$$

$$P(k) = (s-0.9)(10s-4)y_1(k) + (s-0.9)(10s-4)y_2(k) + (6s-4.9)u_1(k) + (20s-13)u_2(k)$$

♦ Toutes les méthodes proposées peuvent être adaptées à la génération d'équations de redondance "structurées". En particulier, on peut générer une équation de redondance ne faisant pas intervenir l'une des deux commandes. Intéressons-nous à l'élimination de u_1 .

Le système peut être réécrit de façon à isoler l'entrée que l'on souhaite éliminer :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1u_1(k) + B_2u_2(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Pour l'exemple considéré, le cumul des observations sur l'horizon temporel adéquat et le regroupement des grandeurs que l'on souhaite éliminer, $x(k)$ et $u_1(k)$, conduit à écrire :

$$\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_1(k+2) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) \\ y_2(k+2) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x(k) \\ u_1(k) \\ u_1(k+1) \\ u_1(k+2) \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} u_2(k) \\ u_2(k+1) \\ u_2(k+2) \end{pmatrix}$$

Avec

$$H = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 A & C_1 B_1 & 0 & 0 \\ C_1 A^2 & C_1 A B_1 & C_1 B_1 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 A & C_2 B_1 & 0 & 0 \\ C_2 A^2 & C_2 A B_1 & C_2 B_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0.16 & 0.25 & 0 & 0.7 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.9 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.81 & 0.59 & 1.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et } G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_1 B_2 & 0 & 0 \\ C_1 A B_2 & C_1 B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_2 B_2 & 0 & 0 \\ C_2 A B_2 & C_2 B_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation de redondance s'obtient de la même façon que précédemment ; une matrice orthogonale à H s'écrit :

$$\Omega = (a \ b \ c \ d \ e \ f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0.16 & 0.25 & 0 & 0.7 & 1.5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.9 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.81 & 0.59 & 1.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{50a + 25b + 8c}{50} \ \frac{4a + 2b + c + 4d + f + 2e}{4} \ \frac{100d + 81f + 90e}{100} \ \frac{150b + 70c + 59f + 110e}{100} \ \frac{15c + 11f}{10} \ 0 \right)$$

Comme solution générale : $\begin{pmatrix} a = -0.4309f \\ b = 1.0965f \\ c = -0.7333f \\ d = 0.5985f \\ e = -1.565f \\ f \end{pmatrix}$, si on prend $f = 15$ on aura alors :

$$\Omega = (-6.46 \ 16.45 \ -11 \ 8.98 \ -23.48 \ 15)$$

Et l'équation de redondance s'exprime sous la forme :

$$P(k) = \Omega \left(\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_1(k+2) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) \\ y_2(k+2) \end{pmatrix} - G \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_1(k+1) \\ u_1(k+2) \end{pmatrix} \right)$$

On obtient alors une équation de redondance indépendante de la commande u_1 :

$$P(k) = (-6.46 \ 16.45 \ -11 \ 8.98 \ -23.48 \ 15) \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_1(k+2) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) \\ y_2(k+2) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2(k) \\ u_2(k+1) \\ u_2(k+2) \end{pmatrix}$$

$$P(k) = -6.46y_1(k) + 16.45y_1(k+1) - 11y_1(k+2) + 8.98y_2(k) - 23.48y_2(k+1) + 15y_2(k+2) + 2.07u_2(k) + 4u_2(k+1)$$

On souhaite maintenant d'éliminer, $x(k)$ et $u_2(k)$, conduit à écrire :

$$\begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_1(k+2) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) \\ y_2(k+2) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x(k) \\ u_2(k) \\ u_2(k+1) \\ u_2(k+1) \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_1(k+1) \\ u_1(k+2) \end{pmatrix}$$

Avec

$$H = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1A & C_1B_2 & 0 & 0 \\ C_1A^2 & C_1AB_2 & C_1B_2 & 0 \\ C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2A & C_2B_2 & 0 & 0 \\ C_2A^2 & C_2AB_2 & C_2B_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.16 & 0.25 & 0 & 0.4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.81 & 0.9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Et } G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C_1B_1 & 0 & 0 \\ C_1AB_1 & C_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_2B_1 & 0 & 0 \\ C_2AB_1 & C_2B_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 0 & 0 \\ 0.59 & 1.1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation de redondance s'obtient de la même façon que précédemment ; une matrice orthogonale à H s'écrit :

$$\Omega = (a \ b \ c \ d \ e \ f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.16 & 0.25 & 0 & 0.4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.81 & 0.9 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{25a + 10b + 4c}{25} \ \frac{4a + 2b + c + 4d + f + 2e}{4} \ \frac{100d + 81f + 90e}{100} \ \frac{10b + 4c + 9f + 10e}{10} \ c \right. \\ \left. + f \ 0 \right)$$

Comme solution générale : $\begin{pmatrix} a = -0.2f \\ b = 0.9f \\ c = -f \\ d = 0.45f \\ e = -1.4f \\ f \end{pmatrix}$, si on prend $f = 20$ on aura alors :

$$\Omega = (-4 \quad 18 \quad -20 \quad 9 \quad -28 \quad 20)$$

Et l'équation de redondance s'exprime sous la forme :

$$P(k) = \Omega \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_1(k+2) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) \\ y_2(k+2) \end{pmatrix} - G \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_1(k+1) \\ u_1(k+2) \end{pmatrix}$$

On obtient alors une équation de redondance indépendante de la commande u_2 :

$$P(k) = (-4 \quad 18 \quad -20 \quad 9 \quad -28 \quad 20) \begin{pmatrix} y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ y_1(k+2) \\ y_2(k) \\ y_2(k+1) \\ y_2(k+2) \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1.5 & 0 & 0 \\ 0.7 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.1 & 0 & 0 \\ 0.59 & 1.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1(k) \\ u_1(k+1) \\ u_1(k+2) \end{pmatrix}$$

$$P(k) = -4y_1(k) + 18y_1(k+1) - 20y_1(k+2) + 9y_2(k) - 28y_2(k+1) + 20y_2(k+2) - 6u_1(k) - 8u_1(k+1)$$