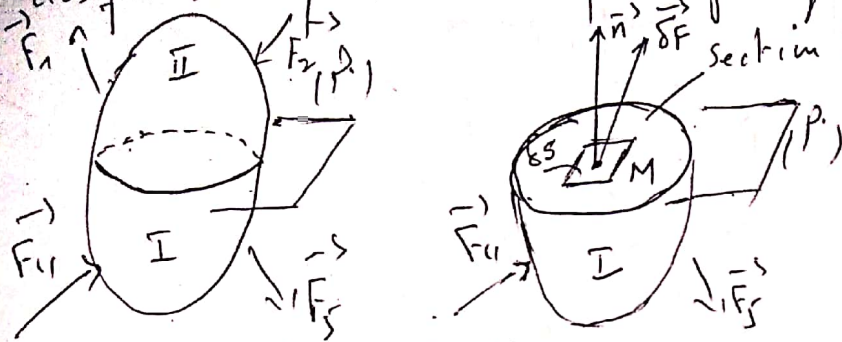


CHAPITRE ①

Contraintes et Déformations

① Notion de Contrainte: soit un solide qq à la surface duquel s'exercent des forces. Coupons ce solide par un plan fictif (P).



Remarque: Sur la surface de coupe S la partie (II) du solide exerce des forces sur la partie (I).

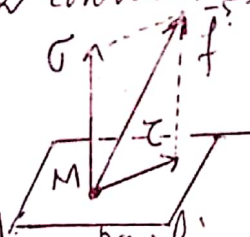
- soit un point $M \in (S')$
- δs : petite portion de surface entourant le point M.
- $\delta \vec{F}$: la force exercée par la partie (II) sur δs au pt M.
- Définition: On appelle contrainte au pt M sur la facette δs , le vecteur $\vec{f}$:

$$\vec{f} = \frac{\delta \vec{F}}{\delta s}$$

- la contrainte est une fonction du point considéré et de l'orientation de la facette passant par ce point.

Remarque: la contrainte $\vec{f}$ se décompose suivant la normale Mn à la facette et suivant le plan de la facette en 2 contraintes σ et τ

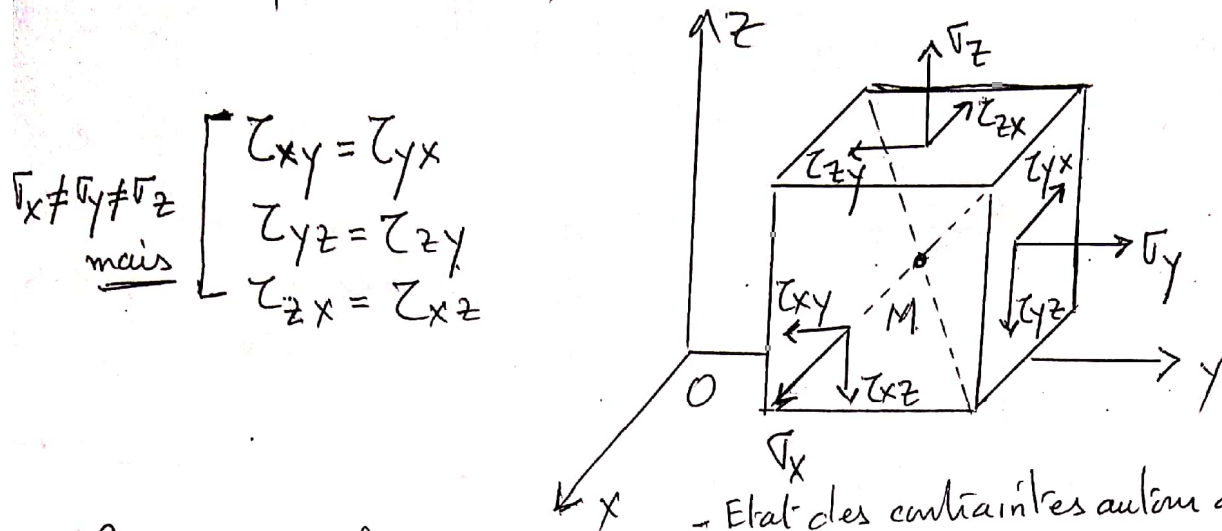
σ : contrainte normale
 τ : contrainte tangentielle.



② Introduction à la Mécanique des Milieux Continus (M.M.C):

- la théorie en M.M.C montre que pour déterminer les contraintes qui s'exercent sur toutes les différentes facettes autour d'un point M, il suffit de connaître en ce point les valeurs des 6 quantités:
- les 6 quantités représentent les composantes des contraintes s'exerçant sur les faces d'un cube centré au pt M et dont les arêtes sont // axes $\vec{Ox}, \vec{Oy}, \vec{Oz}$
- le vecteur normal unitaire a pour composantes (α, β, γ) avec $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1)$
- la contrainte sur une facette est symbolisée par $\vec{f}$.

- les composantes de $\vec{f}$ avec $\vec{f}_M, \vec{f}_Y$ et $\vec{f}_Z$ dans le repère $(O\vec{x}, O\vec{y}, O\vec{z})$

$$\begin{cases} f_x = \sigma_x \alpha + \tau_{xy} \beta + \tau_{xz} \gamma \\ f_y = \tau_{yx} \alpha + \sigma_y \beta + \tau_{yz} \gamma \\ f_z = \tau_{zx} \alpha + \tau_{zy} \beta + \sigma_z \gamma \end{cases}$$


- Remarque: Il existe en tout point M, 3 plans privilegiés pour lesquels la contrainte est uniquement normale. ($\tau = 0$).

- Ces plans sont appelés plans principaux.

- leurs directions normales sont appelées directions principales.

- les contraintes correspondantes appelées contraintes principales.

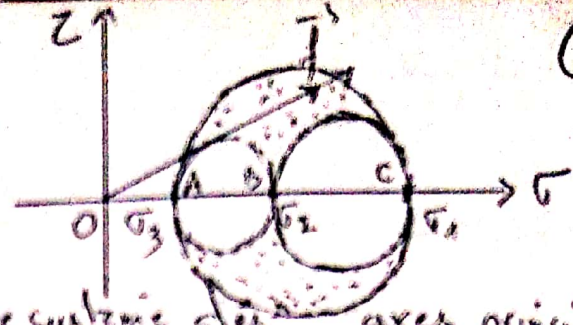
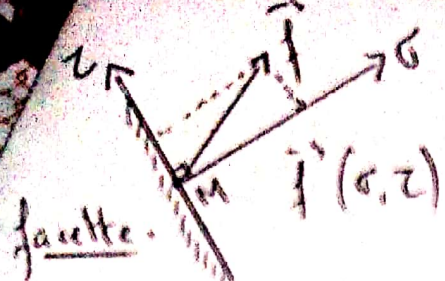
$\begin{cases} \sigma_1: \text{contrainte principale majeure (maximale)} (\sigma_1, \sigma_2 \text{ et } \sigma_3) \\ \sigma_2: \text{" " " moyenne.} \\ \sigma_3: \text{" " " mineure (minimale)} \end{cases}$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

③ Cercle de MOHR: Pour étudier l'état des contraintes autour d'un point, on utilise une représentation graphique appelée diagramme de MOHR (Cercle de MOHR)

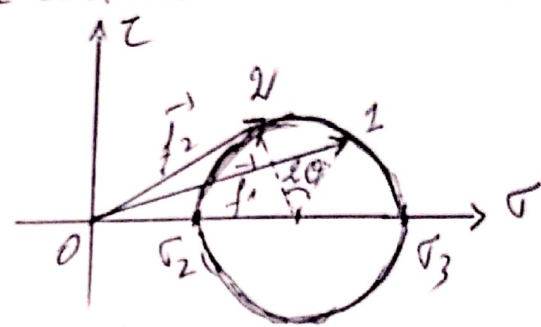
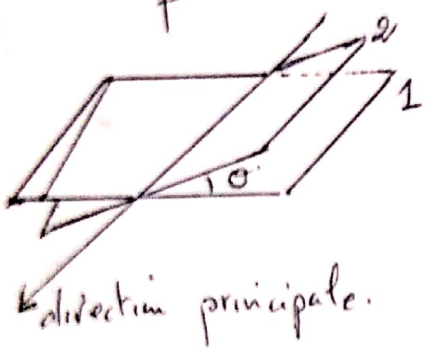
- la méthode consiste à représenter le vecteur contrainte $\vec{f}$ dans un système d'axes (τ, σ) et les pts représentant les contraintes principales sont sur l'axe $O\vec{\sigma}$.

- En tout point M, les extrêmes sur les différentes facettes passant par M se situent dans le plan (τ, σ) dans une zone comprise entre les 3 cercles de diamètres AB, BC et AC avec A, B, C les points représentatifs des contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 .



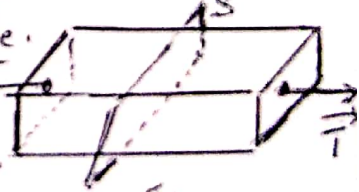
- Si on prend pour système d'axes $(Oxyz)$ -> le système des axes principaux on aura $f = \begin{cases} f_x = \alpha \sigma_1 \\ f_y = \beta \sigma_2 \\ f_z = \gamma \sigma_3 \end{cases}$ avec $\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \text{ (vecteur normal)} \\ \alpha^2 \sigma_1 + \beta^2 \sigma_2 + \gamma^2 \sigma_3 = \sigma \text{ (} f \cdot \vec{n} = \sigma \text{)} \\ \alpha^2 \sigma_1^2 + \beta^2 \sigma_2^2 + \gamma^2 \sigma_3^2 = z^2 + \sigma^2 \text{ (} f = z\vec{e}_3 + \sigma\vec{e}_1 \text{)} \end{cases}$

- Propriété importante: lorsque le plan d'une facette passant par 1 direction principale tourne d'un angle θ autour de cette direction, le point représentatif du vecteur contrainte sur le cercle de MOHR tourne de l'angle 2θ .

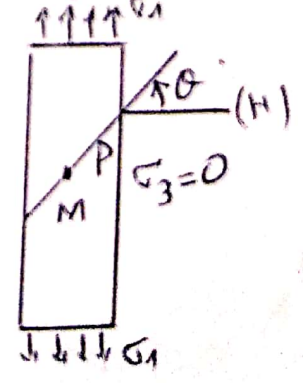
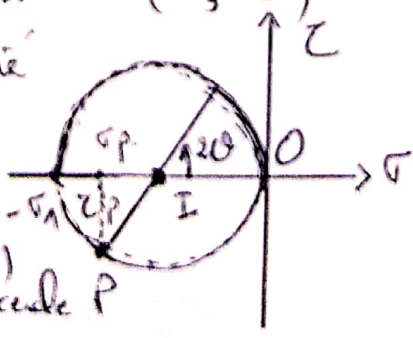


- les plans principaux sont perpendiculaires ($\theta = \pi/2$) et se coupent suivant les directions principales
- les points représentatifs des contraintes principales sur le cercle de MOHR sont diamétralement opposés ($2\theta = \pi$)
- Remarque: Cas du milieu bidimensionnel (2 dimensions) -> cas fréquent en MAS
Les contraintes principales se réduisent à 2, il y a qu'un cercle de MOHR qui devient ainsi le lieu des extrémités des vecteurs contraintes.

Exemple: Cas d'une barre bidimensionnelle en traction simple.



- La contrainte sur le plan horizontal en tout pt P est normale et a pour valeur (σ_1) -> état homogène.
- La contrainte sur le plan vertical est nulle ($\sigma_3 = 0$)
- l'état des contraintes est représenté par le cercle de MOHR -> cercle de traction simple.
- le Plan (P) -> fait l'angle θ avec l'Horizontale (H) représenté par P sur le cercle P



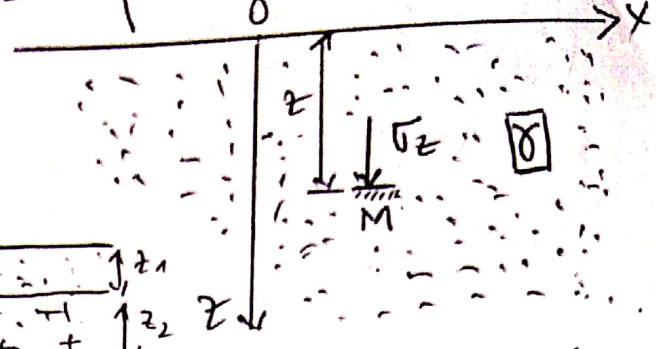
$P \begin{cases} \sigma_P \\ \tau_P \end{cases}$ avec $\sigma_P = -\frac{\sigma_1}{2} (1 + \cos 2\theta)$ et $\tau_P = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\theta$

(4) Application aux sols: contraintes dans les sols.

- Sol indéfini à surface horizontale soumis uniquement à l'action de la pesanteur (pooids volumique γ)

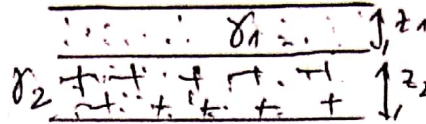
σ_z : contrainte totale.

$$\sigma_z = \gamma \cdot z$$

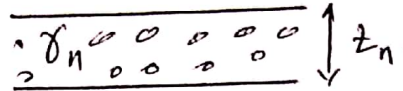


- Cas de plusieurs couches:

$$\sigma_z = \sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot z_i$$



$$\sigma_z = \gamma_1 \cdot z_1 + \gamma_2 \cdot z_2 + \dots + \gamma_n \cdot z_n$$



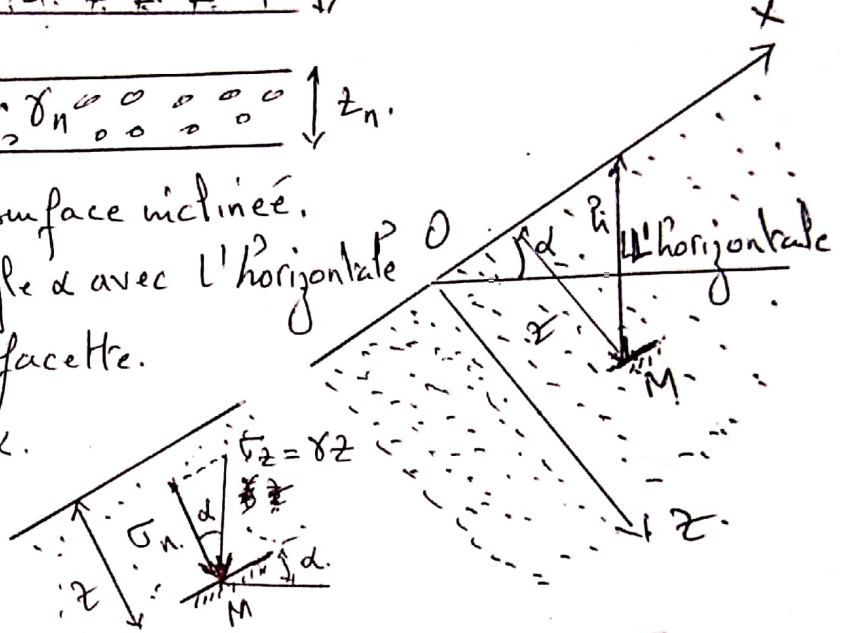
- Remarque: Sol indéfini à surface inclinée.

- La surface plane fait un angle α avec l'horizontale

- σ_n : contrainte normale à la facette.

$$\cos \alpha = \frac{\sigma_n}{\sigma_z} \Rightarrow \sigma_n = \sigma_z \cdot \cos \alpha$$

$$\sigma_n = \gamma \cdot z \cdot \cos \alpha$$



- Postulat de TERZAGHI:

Dans le squelette solide, sur toute facette s'exerce une contrainte normale σ' appelée contrainte effective qui est égale à la contrainte totale σ amoindrie de la pression interstitielle u due à l'eau.

$$\sigma' = \sigma - u \quad \text{ou} \quad \sigma = \sigma' + u \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma: \text{contrainte totale.} \\ \sigma': \text{ " effective.} \\ u: \text{pression interstitielle} \\ \quad \text{(pression de l'eau)} \end{cases}$$

Les Contraintes dans le sol.

(5)

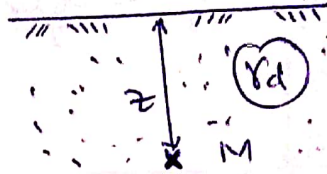
① Etat de contrainte d'un sol sous son propre poids (pas de charge):

a) Sol parfaitement sec:

u_M : pression interstitielle au pt M située à une profondeur z .

σ_M : contrainte totale au pt M

σ'_M : contrainte effective au pt M.

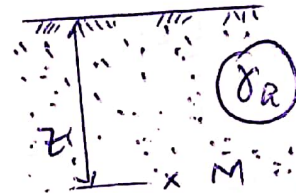


$$\sigma_M = \gamma_d \cdot z \quad u_M = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma'_M = \sigma_M - u_M = \gamma_d \cdot z}$$

b) Sol humide non saturé:

$$u_M \approx 0 \quad \sigma_M = \gamma_a \cdot z$$

$$\boxed{\sigma'_M = \gamma_a \cdot z}$$



c) Présence d'une nappe dans le sol:

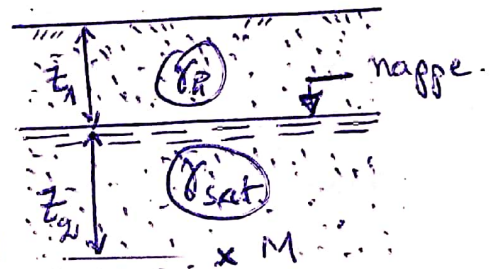
$$u_M = \gamma_w \cdot z_2$$

$$\sigma_M = \gamma_a \cdot z_1 + \gamma_{sat} \cdot z_2$$

$$\sigma'_M = \gamma_a \cdot z_1 + \gamma_{sat} \cdot z_2 - \gamma_w \cdot z_2 = \gamma_a \cdot z_1 + z_2 (\gamma_{sat} - \gamma_w)$$

$$\boxed{\sigma'_M = \gamma_a \cdot z_1 + \gamma' \cdot z_2}$$

γ' : poids volumique déjaugé.



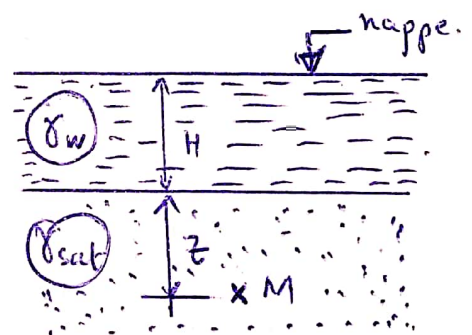
d) Le sol est submergé par l'eau:

$$u_M = \gamma_w (H + z)$$

$$\sigma_M = \gamma_w \cdot H + \gamma_{sat} \cdot z$$

$$\sigma'_M = \gamma_w H + \gamma_{sat} \cdot z - \gamma_w \cdot H - \gamma_w \cdot z = z (\gamma_{sat} - \gamma_w)$$

$$\boxed{\sigma'_M = \gamma' \cdot z}$$

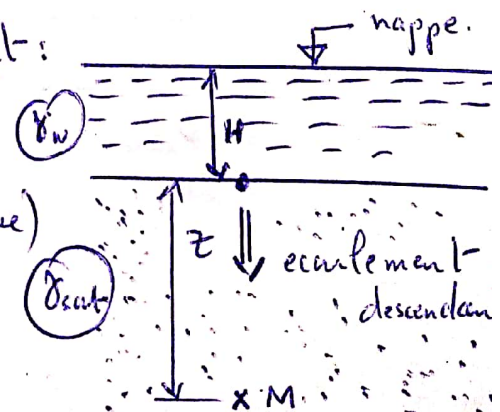


e) Le sol est saturé avec un écoulement descendant:

$$\sigma_M = \gamma_w \cdot H + \gamma_{sat} \cdot z$$

$$u_M = (H + z) \gamma_w - \bar{J} \cdot \gamma_w \cdot z \quad \text{avec } \bar{J} = \frac{dh}{dz} \text{ (gradient hydraulique)}$$

$$\boxed{\sigma'_M = z (\gamma' + \bar{J} \cdot \gamma_w)}$$



f) Sol saturé avec écoulement ascendant:

$$\boxed{\sigma'_M = z (\gamma' - \bar{J} \cdot \gamma_w)}$$

⑥ État de contrainte d'un sol sous chargement: Pour déterminer les contraintes au sein du massif, on utilise les résultats obtenus grâce à la théorie de l'élasticité (déformation élastique) d'un milieu homogène, isotrope, non pesant et semi infini (limité à sa partie supérieure par un plan horizontal illimité)

① Cas d'une charge ponctuelle P:

- formules de Boussinesq:

$$\sigma'_M = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{P}{z^2} \cdot \cos^5 \theta$$

$\theta = 0$ (au droit de la charge) $\rightarrow \sigma'_M = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{P}{z^2}$
 $\cos \theta = 1$

$$P^2 = z^2 + r^2$$

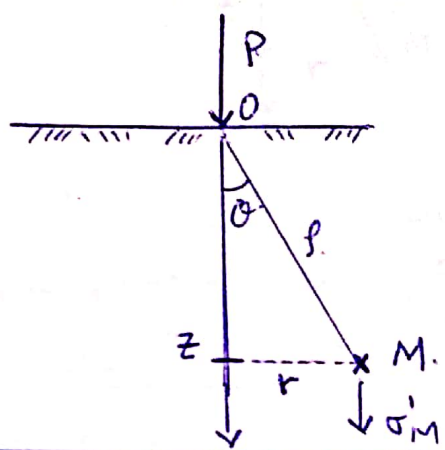
$$\sigma'_M = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi} \cdot \frac{z^3}{P^5}$$

$$\sigma'_M = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{\pi} \cdot z^3 \cdot (z^2 + r^2)^{-5/2}$$

$\sigma'_M = \frac{P}{z^2}$ avec $N = \frac{3}{2\pi} [1 + (\frac{r}{z})^2]^{5/2}$ (Abaque!)

- formule de Westergaard:

$$\sigma'_M = \frac{P}{\pi \cdot z^2} \left[1 + 2 \left(\frac{r}{z} \right)^2 \right]^{-3/2}$$



②

- Remarque: Cette contrainte, devra être ajoutée la contrainte due au poids propre.
- Remarque: Vu la complexité des expressions analytiques, on a souvent recours à des abaques ou tableaux.

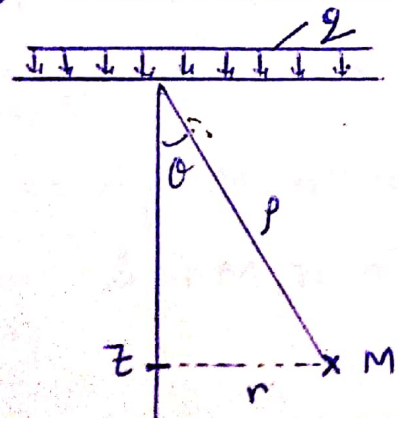
$$\sigma'_M = \frac{P}{z^2} \cdot I$$

avec I : facteur d'influence. $\rightarrow$ ses valeurs sont fonction de $\frac{r}{z}$ (voir tableau)

r/z	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	2,0
I (Boussinesq)	0,48	0,43	0,33	0,22	0,14	0,085	0,05	0,03	0,0085
I (Westergaard)	0,32	0,28	0,20	0,14	0,09	0,06	0,05	0,03	0,0085

② Cas d'une charge linéaire:

soit q : charge uniforme agissant par unité de longueur. (sur une droite)



$$\sigma'_M = \frac{2q}{\pi \cdot z} \cdot \cos^4 \theta$$

$$\sigma'_M = \frac{2q}{\pi \cdot \rho} \cdot \cos^3 \theta$$

③ Charge répartie sur une surface circulaire:

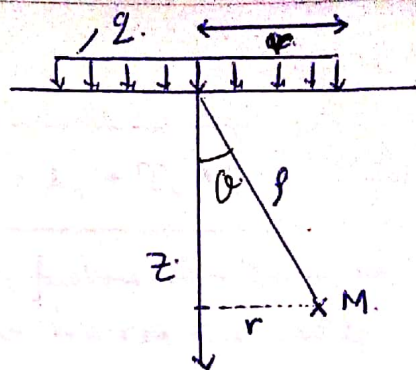
q : charge uniforme.

a : rayon de la surface circulaire.

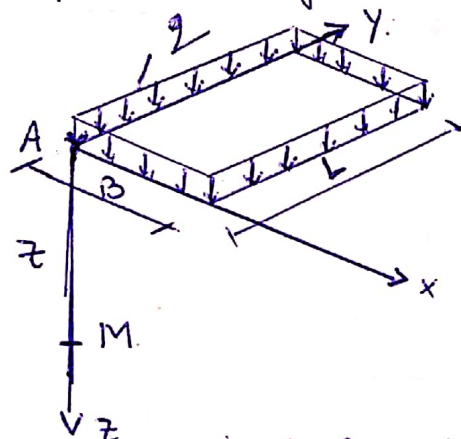
$$\sigma'_M = q \times \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{a^2}{z^2} + 1 \right)^{3/2}} \right]$$

$$\sigma'_M = I \cdot q$$

I : coefficient ou facteur d'influence dont les valeurs sont données soit par des abaques ou Tableaux en fonction de $\frac{a}{z}$ (Abaque 3)



④ Charge uniformément répartie sur une surface rectangulaire:



B : largeur du rectangle.

L : longueur du rectangle.

q : charge uniforme.

posons: $m = \frac{B}{z}$ $n = \frac{L}{z}$

la contrainte au pt M située à la profondeur z sous le coin A de la surface rectangulaire chargée uniformément par q est donnée par la formule de Newmark:

$$\sigma'_M = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2+m^2n^2+1} \left(\frac{m^2+n^2+2}{m^2+n^2+1} \right) + \text{Arctg} \left(\frac{2mn\sqrt{m^2+n^2+1}}{m^2+n^2-m^2n^2+1} \right) \right]$$

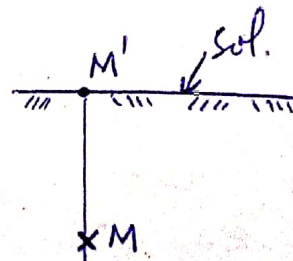
Remarque: Pratiquement $\sigma'_M = I \cdot q$ I : coefficient ou facteur d'influence.

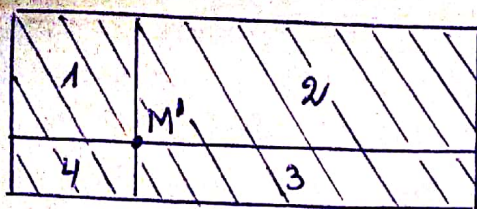
- les valeurs de I sont données par des abaques en fonction de B/z et L/z .
- les valeurs de I sont données par des abaques en fonction de $\frac{z}{B}$ et $\frac{z}{L}$ (Abaque 2)
- A la surface du sol, I ne dépend pas de L et B et vaut 0,25. ($z=0$)

Remarque: Emploi des rectangles auxiliaires.

a) le pt M' est à l'intérieur du rectangle chargé:

le pt M' est à la verticale de M sur la surface du sol.



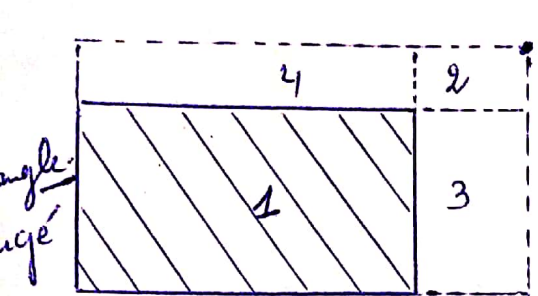


rectangle chargé.

$$\sigma'_M = q (I_1 + I_2 + I_3 + I_4)$$

I_1, I_2, I_3 et $I_4 \rightarrow$ facteurs d'influence des rectangles auxiliaires 1, 2, 3 et 4.

le pt M' est à l'extérieur du rectangle chargé:



$$\sigma'_M = q (I_{1234} + I_2 - I_{23} - I_{24})$$

$I_{1234} \rightarrow$ facteur d'influence du grand rectangle.
 $I_{23} \rightarrow$ " " du rectangle (2+3).
 $I_{24} \rightarrow$ " " du rectangle (2+4).

Pour traiter certains problèmes de fondations (les bi-conches), il est nécessaire de connaître la répartition des contraintes dans un plan vertical au centre de la surface de chargement.

$$\sigma'_M = I \cdot q$$

les valeurs de I sont données par des abaques ou tableau par ex:

z/B	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$\frac{L}{B} = 1$	1	0,73	0,33	0,18	0,12	0,08	0,05	0,04	0,04
$\frac{L}{B} = 1,5$	1	0,76	0,43	0,25	0,16	0,10	0,07	0,05	0,04
$\frac{L}{B} = 2$	1	0,82	0,49	0,30	0,20	0,13	0,10	0,07	0,06
$\frac{L}{B} = 3$	1	0,83	0,52	0,35	0,24	0,18	0,13	0,10	0,08
$\frac{L}{B} = \infty$	1	0,84	0,57	0,40	0,31	0,26	0,22	0,18	0,16