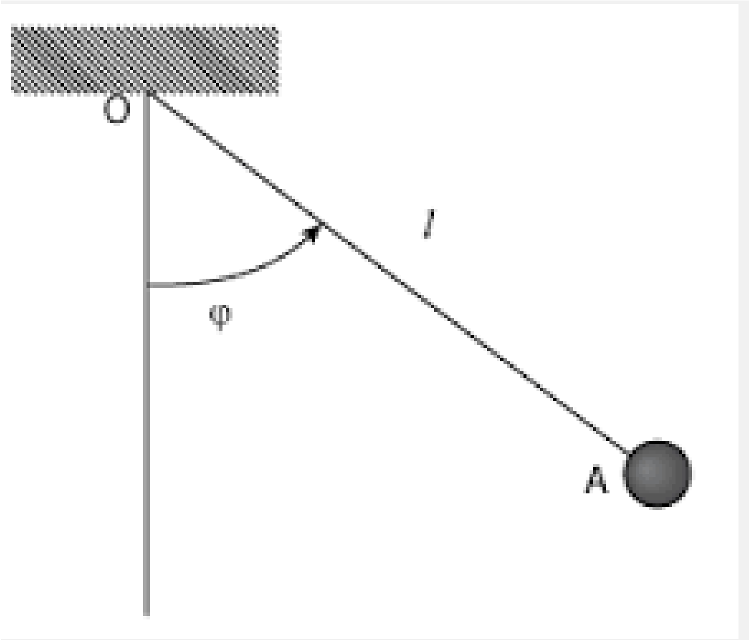
Ondes et Vibrations

Pr. Mactar FAYE

Chapitre 2 Oscillations libres non amorties des systèmes à un degré de liberté



On considère une masse m attachée à un fil au point A. L'extrémité du fil est fixée au plafond en O.

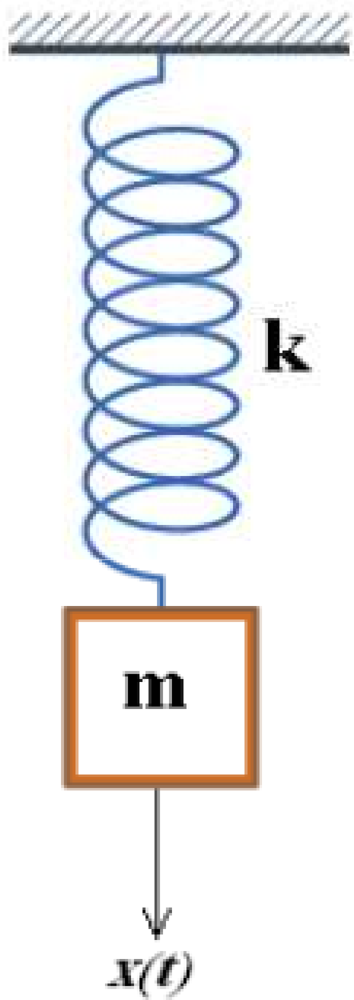
La masse oscille autour de l'axe vertical.

Au cours de cette oscillation on suppose que la masse n'est soumise à aucune force extérieure (c'est-à-dire elle n'est pas excitée par une force excitatrice et les forces de frottement entre la masse et l'air sont négligeables)

- Le système est libre car il n'y a pas de force excitatrice

- Le système n'est pas amorti car il n'y a pas de forces de frottement

1. Etude de cas: masse soumise à une force de rappel



Le système n’est pas soumis à une force excitatrice. Les forces de frottement sont négligeables

$$F = 0 \qquad\qquad F_{diss} = 0$$

Etape 1: Etablissement de l'équation du mouvement (Equation de Lagrange)

L'équation de Lagrange s'écrit donc : $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=0$$

avec $L=E_c-E_p$

$$E_c=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad E_p=\frac{1}{2}k\,x^2$$

Après calcul on trouve : $$m\ddot{x}+k\,x=0$$

soit $$\ddot{x}+\omega_0^2\,x=0 \qquad \omega_0^2=\frac{k}{m}$$

Etape 2: Résolution de l'équation du mouvement

La solution générale de l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 \, x = 0$ est de la forme :

$$x(t) = Ae^{\alpha t}$$

Après avoir calculé $\ddot{x}$, l'équation différentielle peut s'écrire : $Ae^{\alpha t}\left(\alpha^2 + \omega_0^2\right) = 0$

d'où $$\alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

soit $$\alpha = \pm j\omega_0$$

La solution générale est donc : $$x(t) = A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}$$

$x(t)$ est réel puisque c'est une quantité physique, donc A1 et A2 sont complexes conjugués :

$$A_1 = a + jb \qquad A_2 = a - jb$$

La solution réelle est donc : $$x(t) = 2a\cos(\omega_0 \cdot t) - 2b\sin(\omega_0 \cdot t) = D\cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

- La solution est de forme sinusoïdale, on dit alors que le mouvement est harmonique.
- L'amplitude D est une constante, on dit que le système est non amorti
- la fréquence propre du système $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$ ne dépend que des caractéristiques

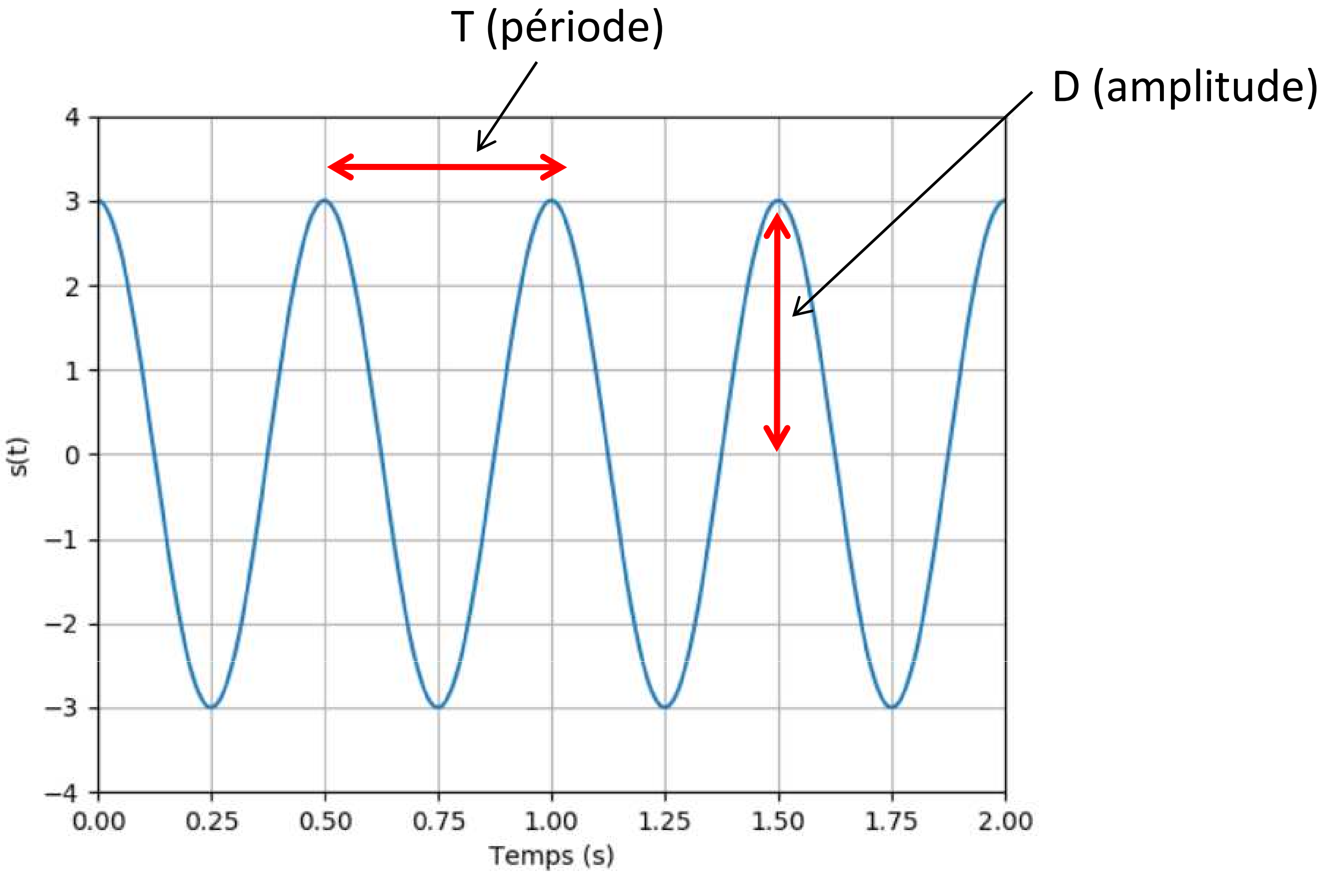
du système (m et K) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Une oscillation libre non amortie est caractérisée par :

- Son amplitude : D
- Sa phase initiale (en radian) : φ
- Sa période : $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

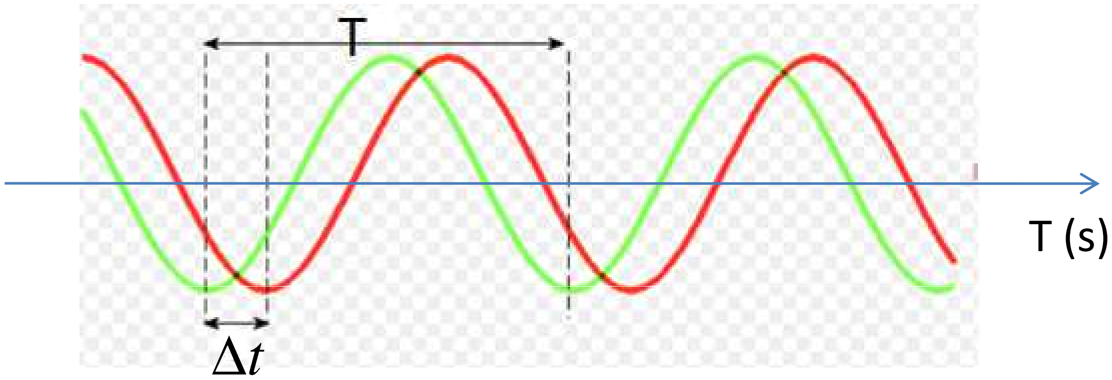
L'amplitude et la phase initiale sont déterminées à partir les conditions initiales du problème.

Un **oscillateur harmonique** est un oscillateur idéal dont l'évolution au cours du temps est décrite par une fonction sinusoïdale, dont la fréquence ne dépend que des caractéristiques du système et dont l'amplitude est constante (Wikipédia).


T (période)
D (amplitude)
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
s(t)
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
Temps (s)

Exercice 1

Détermination expérimentale du déphasage



T Période (en seconde)

Δt Différence de temps entre deux maximun (ou deux minimun) proches

La courbe verte est en avance sur la courbe rouge. En effet, la courbe verte atteint son maximum avant la courbe verte.

Le déphase (en radian) s'écrit : $\phi = \frac{2\pi}{T} \Delta t$

Détermination théorique du déphasage

Soient φ_1 et φ_2 les phases à l'origine des deux signaux

Le déphasage du signal 1 par rapport au signal 2 s'écrit : $\phi = \varphi_1 - \varphi_2$

Si $\phi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$ alors le signal 1 est en avance sur le signal 2.

Exemple $u_1 = A_1 \cos(wt)$ $u_2 = A_2 \cos\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$

$\phi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} > 0$ alors le signal 1 est en avance sur le signal 2.

Attention : le déphasage a un sens si les signaux ont la même fréquence

Etape 3: Calcul de la force, de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

Connaissant la réponse du système $x(t) = D\cos\left(\omega_0 \cdot t + \varphi\right)$ on peut calculer :

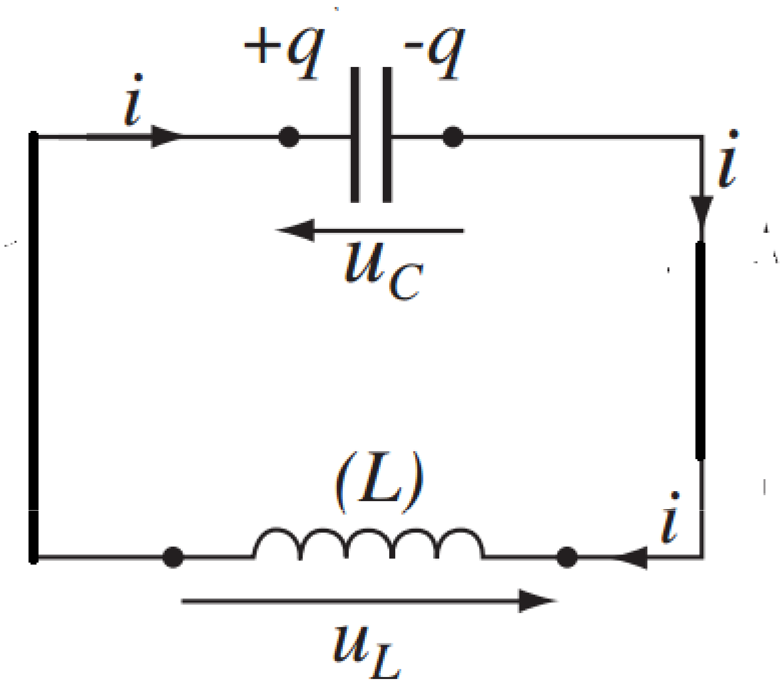
Force : $$F = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Energie cinétique : $$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Energie potentielle : $$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Consigne : Montrer que l'énergie totale se conserve (constante)

Exercice d’application : circuit électrique *LC*



1. Donner l’équation différentielle qui régit l’évolution de *q* au cours du temps

2. Quelle est l’expression de la fréquence propre

3. Quelle est le déphasage entre la charge *q* et le courant *i*.

Fin